

(A)

Perhatikan sistem pers diferensial sbb:

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad \dots (i)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2$$

Phase portrait dari sistem tsb dapat dicari dengan merubah sistem menjadi

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-x_1}{x_2^2} \quad \text{Catatan} \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} \end{matrix} \rightarrow \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{dx_1}{dx_2}$$

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2^2}$$

$$\ln|x_1| = \frac{1}{x_2} + c$$

$$x_2 = \frac{1}{\ln|x_1| - c} \quad \dots (ii)$$

Persamaan (ii) merupakan persamaan umum dari kurva² yang ada pada bidang x_1-x_2 yang menunjukkan phase portrait dari sistem (i).

Misalkan ditambahkan nilai awal $x_1(0)=1$ dan $x_2(0)=1$. Maka apabila disubstitusikan ke persamaan (ii) akan didapatkan nilai c . sbb:

Perhitungannya sbb:

$$1 = \frac{1}{\ln 1 - c}$$

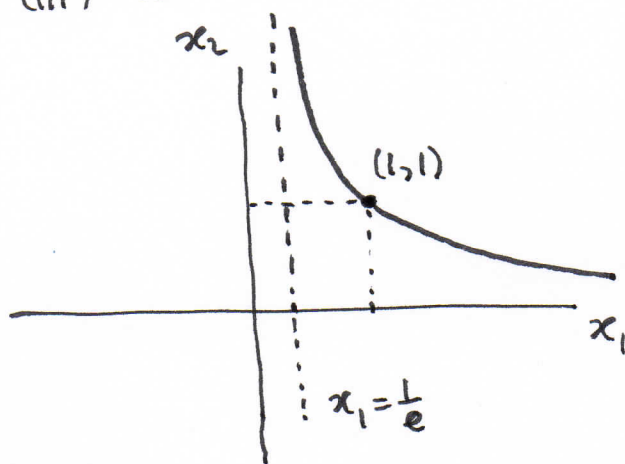
$$1 = \frac{1}{-c} \quad \text{atau} \quad c = -1$$

Jadi diperoleh persamaan

$$x_2 = \frac{1}{\ln|x_1| + 1} \quad \dots (iii)$$

Grafik dari (iii) sbb: (Gambar 1)

(B)



Garis $x_1 = \frac{1}{e}$ merupakan asimtot tegak sedangkan $x_2 = 0$ atau sumbu x_1 merupakan asimtot mendatar.

Karena persamaan (iii) merupakan persamaan fungsi

$$\text{genap yaitu } f(x_1) = \frac{1}{\ln|x_1|+1} = \frac{1}{\ln|-x_1|+1} = f(-x_1),$$

maka grafiknya simetri terhadap sumbu x_2 .

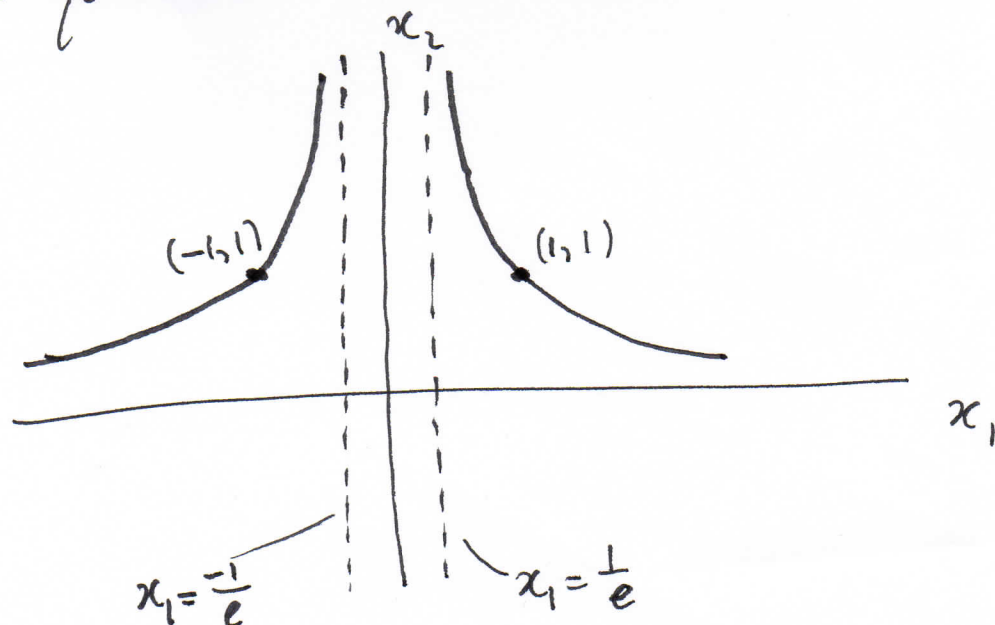
Dengan demikian apabila diberikan nilai awal

$$x_1(0) = -1 \text{ dan } x_2(0) = 1 \text{ maka akan diperoleh}$$

hubungan antara x_1 dan x_2 spt pada persamaan (iii)

dan grafik yang melalui titik $(-1, 1)$ ~~spt pada~~

diplot digambarkan sbb: (Gambar 2) (digabung dgn Gambar 1)



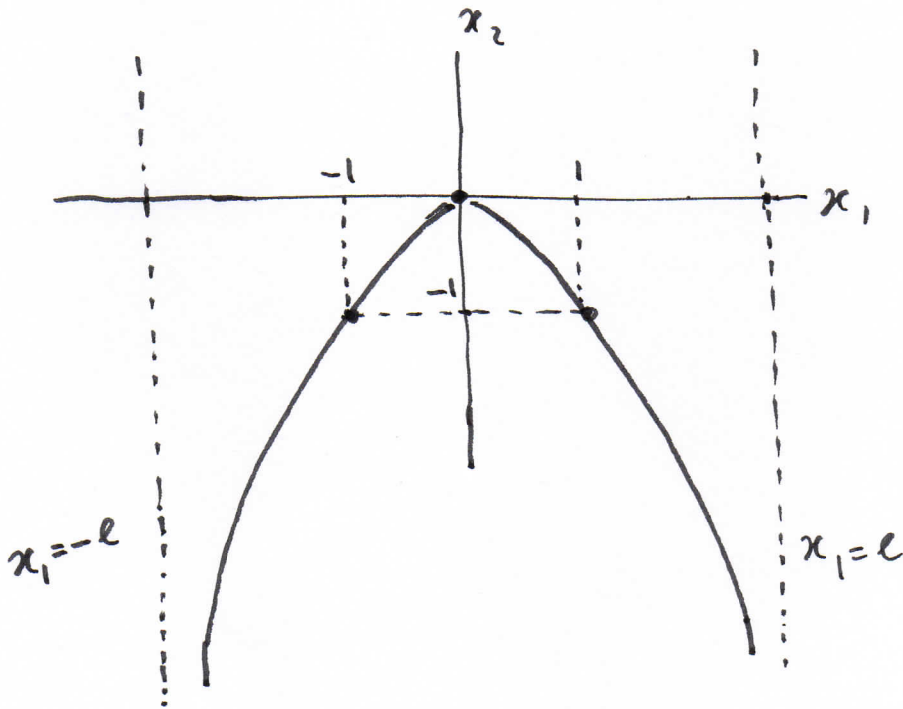
Selanjutnya apabila diberikan nilai awal $x_1(0) = 1$ dan $x_2(0) = -1$, maka diperoleh

$$-1 = \frac{1}{\ln|1-e|} \text{ atau } e = 1.$$

Jadi didapat $x_2 = \frac{1}{\ln|x_1|} \dots (iv).$

Untuk nilai awal $x_1(0) = -1$ dan $x_2(0) = -1$ akan didapatkan juga persamaan (iv).

Grafiknya sbb: (Gambar 3)



$x_1 = -e$ dan $x_2 = e$ merupakan asimtot tegak dari persamaan (iv).

(D)

Phase portrait dari persamaan (i) dapat diperoleh dari menggabungkan gambar 2 di atas sbb:

