E. INTEGRASI BAGIAN (PARSIAL)

Integrasi bagian (parsial) digunakan untuk mengintegrasikan suatu perkalian fungsi yang masing-masing fungsinya bukan koefisien diferensial dari yang lain (seperti yang sudah dibahas pada sub. Bab. D)

Perhatikan bahwa jika $Y = U.\ V$

Maka $Y^1 = U.\ V^1 + U^1.\ V$

Atau bisa ditulis $\dfrac{d(UV)}{dx} = U.\ \dfrac{d(V)}{dx} + \dfrac{d(U)}{dx}.\ V$

Jika semua ruas dikalikan dengan dx maka

$$d\ (UV) = U.\ d(V) + V.\ d(U)$$

atau $U.\ d(V) = d\ (UV) - V\ d\ (U)$

Sehingga bila semua ruas diintegralkan :

$$\boxed{\int U.d(V) = U.V - \int V.d(U)}$$

Contoh:

1. Tentukan harga $\int \ln x(x^2)dx$.

   Jawab: Misal $U = \ln x$ maka $d(U) = \frac{1}{x}dx$

   $d(V) = (X^2)\ dx$, maka $V = \int (x^2)dx = \frac{1}{3}x^3$

$$\int \ln x(x^2)dx = \ln x.\ \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3.\ \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3.\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}x^3 + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}) + c$$

Pedoman untuk memisalkan U

* Jika salah satu faktornya adalah **fungsi logaritma**, maka ia harus diambil sebagai U $\rightarrow$ ln x=U
* Jika tak ada fungsi logaritma, tetapi ada **fungsi pangkat x**, maka fungsi pangkat tersebut yang diambil sebagai U $\rightarrow$ $x^n = U$
* Jika tidak ada fungsi logaritma maupun fungsi pangkat x tetapi ada **fungsi eksponensial**, maka fungsi eksponensial sbg U $\rightarrow e^{kx} = U$

contoh 2.

Carilah harga dari $\int x^2 \sin x.dx$

Jawab :

Misal $U = x^2$; $du = 2x.dx$

$dv = \sin x\, dx$; $V = -\cos x$

$$\boxed{\int U.dv = U.V - \int V.du}$$

$$\int x^2 \sin x.dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)2x.dx$$

$$= -x^2 \cos x - 2\int x(-\cos x)dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x dx}_{\text{dimisalkan lagi}}$$

misal $U = x$; $du = 1\, dx$

$dv = \cos x\, dx$; $v = \sin x$

$$2\int x \cos x\, dx = 2\{x.\sin x - \int \sin x\, .\, dx\}$$

$$= 2\{x \sin x + \cos x + c\}$$

$$= 2x \sin x + 2\cos x + c$$

Kemudian ditulis semua

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

INTEGRASI DAN PECAHAN PARSIAL

Misalkan kita menjumpai persoalan:

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2-3x+2)}\,\mathrm{dx} \rightarrow \text{Bukan bentuk baku}$$

$\rightarrow$ Pembilangnya bukan koefisien deferensial dari penyebutnya

Maka penyelesainnya : kita harus menyelesaikannya sebagai pecahan parsial.

Kaidah-Kaidah Pecahan Parsial

1. Pembilangnya harus lebih rendah derajatnya daripada penyebutnya. Jika tidak harus dibagi dahulu.
2. Faktorkanlah penyebutnya menjadi faktor-faktor primanya, contoh: x^2-3x+2 , difaktorkan menjadi (x-1)(x-2)
3. Faktor linier **(ax+b)** memberikan pecahan parsial berbentuk $\frac{A}{(ax+b)}$
4. Faktor **(ax+b)^2** akan memberikan pecahan parsial $\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}$
5. Faktor **(ax+b)3** akan memberikan pecahan parsial $\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$
6. Faktor kuadrat **(ax2 + bx + c)** memberikan pecahan parsial $\frac{(Ax+B)}{ax^2+bx+c}$

Contoh :

1. $\int \frac{(x+1)}{(x^2-3x+2)}\,\mathrm{dx}$

Jawab :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \text{ difaktorkan menjadi } \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Dari kaidah 3 diatas disebutkan bahwa **(ax+b)** memberikan pecahan parsial berbentuk

$$\frac{A}{(ax+b)}$$

Sehingga :

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan (x-1)(x-2)

x+1 = A(x-2) + B(x-1)

Dari persamaan ini kemudian dicari harga A dan B dengan cara memasukkan harga x sembarang.

Jika mungkin, pilih x yang membuat salah satu harga dalam tanda kurung berharga nol.

- Ambil (x-2) = 0; artinya kita substitusikan x = 2

  x+1 = A(x-2) + B(x-1)

  3 = A(0) + B(1)

  B = 3

- Ambil (x-1) = 0 ; artinya kita substitusikan x = 1

  x+1 = A(x-2) + B(x-1)

  2 = A(-1) + B(0)

  A = -2

Jadi $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)}$

Sehingga $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{3}{x-2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx$

$$= 3\int \frac{1}{x-2} dx - 2\int \frac{1}{x-1} dx$$

= 3 *ln*(x-2) – 2 *ln*(x-1)

2. Hitunglah $\int \frac{(x+2)}{(x-2)^2} dx$

Penyelesaian :

$$\frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} \longrightarrow \text{Mengunakan kaidah 4}$$

maisng-masing ruas dikalikan $(x-2)^2$

x + 2 = A (x-2) + B

$x = 2 \rightarrow$ 4 = A (0) + B

B = 4

$x = -2 \rightarrow$ 0 = A (-4) + 4

A = 1

Jadi $\frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$

Sehingga :

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{4}{(x-2)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2} dx + 4\int (x-2)^{-2} dx$$

$$= \ln (x\text{-}2) - \frac{4}{(x-2)} + c$$

3. Tentukan $\int \frac{x^2+1}{(x+2)^3}$ dx

Jawab :

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} \rightarrow \text{(kaidah 5)}$$

masing-masing ruas dikalikan $(x+2)^3$

$x^2 + 1 = A (x+2)^2 + B(x+2) + C$

$x = -2 \rightarrow$ 4 + 1 = A(0) + B(0) + C

5 = C

diambil x sembarang :

x = 0 $\rightarrow$ 1 = 4A + 2B + 5

-4 = 4A + 2B…………….(1)

x = -4 $\rightarrow$ 17 = 4A – 2B + 5

12 = 4A – 2B…………….(2)

jika persamaan (1) dan (2) dieliminasi

8 = 8A

A = 1

Masukkan harga A = 1 pada persamaan (1)

-4 = 4 + 2B

$$\mathbf{B = -\frac{8}{2} = -4}$$

Sehingga

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}$$

Jadi $$\int \frac{x^2+1}{(x+2)^3}dx = \int \frac{1}{x+2}dx - 4\int \frac{1}{(x+2)^2}dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3}dx$$

$$= \ln(x+2) + 4\frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c$$

$$= \ln(x+2) + \frac{4}{(x+2)} - \frac{5}{2(x+2)^2} + c$$

4. Hitunglah $\int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)}dx$

Jawab :

(x-2) menggunakan kaidah 3 dan

(x^2+1) menggunakan kaidah 6

$$\frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

masing-masing dikalikan (x–2) (x^2 +1)

x^2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C) (x-2)

misal x = 2 $\rightarrow$ 4 = 5A + (2B+C).0

jadi **A = 4/5**

misal $x = 0 \rightarrow 0 = A - 2C$

$$0 = \frac{4}{5} - 2C$$

$$2C = \frac{4}{5}$$

C = 2/5

$x^2 \quad = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x-2)$

misal $x = 1 \rightarrow 1 = 2A - B - C$

$$1 = 8/5 - B - 2/5$$

$$B = 6/5 - 1$$

B = 1/5

Jadi $\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{4/5}{(x-2)} + \dfrac{1/5x + 2/5}{(x^2+1)}$

Sehingga :

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+1)} dx = \int \frac{4/5}{(x-2)} dx + \int \frac{1/5x + 2/5}{(x^2+1)} dx$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{1}{(x-2)} dx + \frac{1}{5}\int x.\frac{1}{(x^2+1)} dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{1}{(x-2)} dx + \frac{1}{10}\int \frac{2x}{(x^2+1)} dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

$$= \frac{4}{5}\ln(x-2) + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\ln(x^2+1) + C$$

ingat $\displaystyle\int \frac{f^1(x)}{f(x)} dx = \ln[f(x)] + C$

INTEGRAL TERTENTU

Jika $\int f(x)dx = F(x) + C$

Maka $\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b$

$= [\ F(b) + C\ ] - [\ F(a) + C\ ]$

$= F\ (b) - F\ (a)$

Jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Perhatikan bahwa nilai konstanta (c), dalam hal integral tertentu menjadi hilang.

Keterangan :

a	: batas bawah
b	: batas atas
f(x)	: integran

Sifat-Sifat Integral Tertentu

1. $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ dimana harga a < b < c

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4. Bila $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ adalah fungsi-fungsi yang dapat di integralkan, maka:

   $$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

5. Bila c adalah suatu konstanta :

   $$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

contoh soal :

1. carilah harga dari $\int_{-4}^{2} (1/2x+3)^3 dx$

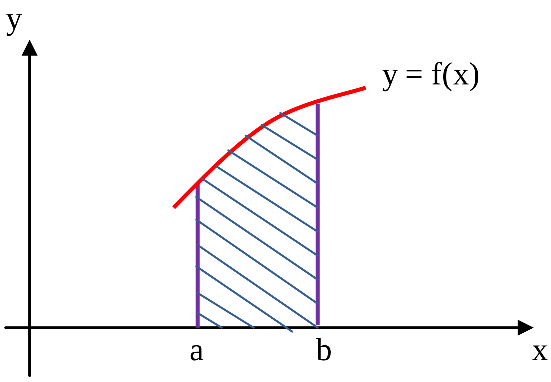
jawab : $$\int_{-4}^{2} (1/2x+3)^3 dx = \int_{-4}^{2} (1/2x+3)^3 .2.d(1/2x+3)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^4\right]_{-4}^{2}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}.2+3)^4\right\} - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-4)+3\right)^4\right\} = 127\frac{1}{2}$$

J. PENERAPAN INTEGRASI

1. Menghitung luas di bawah kurva.



Luas daerah yang diarsir :

$$L = \int_{a}^{b} f(x)dx = f(b) - f(a)$$

Contoh :

Hitunglah luas daerah yang di bawah kurva y = $3x^2 + 4x - 5$

Yang dibatasi garis x = 1 dan x = 3, serta sumbu x

Jawab :

$$L = \int_1^3 (3x^2 + 4x - 5)dx$$

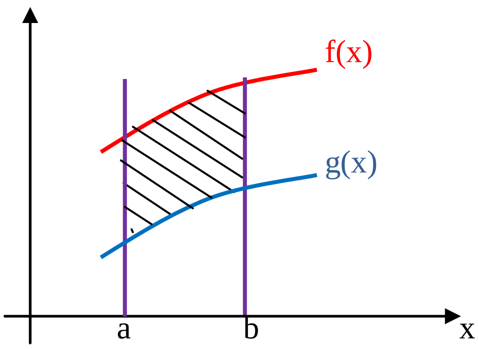
$$= \left[x^3 + 2x^2 - 5x\right]_1^3$$

$$= (27 + 18 - 15) - (1 + 2 - 5)$$

$$= 30 + 2 = 32$$

Jadi luas daerah dibawah kurva y = $3x^2 + 4x - 5$ yang dibatasi oleh garis x = 1, X = 3 dan sumbu x adalah 32 satuan^2

2. Menghitung Luas Daerah antara Dua kurva



Luas daerah yang diarsir adalah :

Luas daerah dibawah kurva f(x) yang dibatasi oleh garis x = a, x = b dan sumbu x

dikurangi

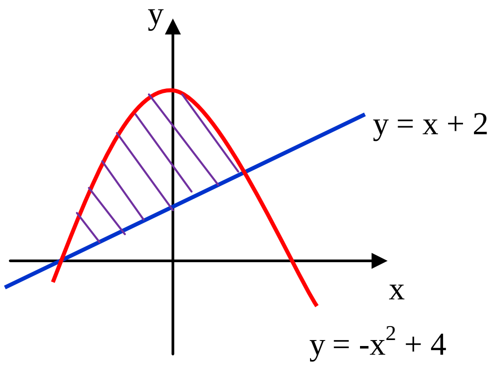
Luas daerah dibawah kurva g(x) yang dibatasi oleh garis x = a, x = b dan sumbu x

Atau bisa ditulis

$$L = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$L = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

Contoh :



Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 4$ dan $y = x + 2$