MATRIKS

A. PENGERTIAN

- Matriks adalah suatu deretan elemen yang membentuk empat persegi panjang, terdiri dari *m* baris dan *n* kolom.
- Elemen tersebut dapat berbentuk koefisien, bilangan atau simbul.
- Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berdimensi m x n.

Misalkan suatu matriks A dengan elemen a_{ij} dapat ditulis sebagai berikut :

$A = (a_{ij})$

untuk i = 1 , 2 , 3 , ..., m : baris

j = 1 , 2 , 3 , ..., n : kolom

catatan : dalam menulis elemen, sebutlah **barisnya** dulu, baru diikuti **kolom**.

Contoh : a_{11} maksudnya adalah eleman a baris 1 kolom 1

A_{23} maksudnya adalah elemen a baris 2 kolom 3

Matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya disebut matriks bujur sangkar (*square matrix*).

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

B. DETERMINAN MATRIKS

Misalkan suatu matriks A maka determinan matriks tersebut diberi simbul dengan ∇ (A). Demikian juga simbul untuk determinan matriks B adalah ∇ (B).

Ekspansi determinan tersebut adalah :

$$\nabla (A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \, . \, a_{22} - a_{21} \, . \, a_{12}$$

$$\nabla (B) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = b_{11} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= b_{11}\ (b_{22}.b_{33} - b_{32}.b_{23}) - b_{12}(b_{21}.b_{33} - b_{31}.b_{23}) + b_{13}(b_{21}.b_{32} - b_{31}.b_{22})$$

Operasi ini disebut ekspansi diterminan matriks A dan matriks B. **Determinan matriks hanya ada pada matriks <u>bujur sangkar</u> saja**. Pedoman untuk menentukan tanda + atau – adalah sebagai berikut :

+	-	+	-	+	.	.	.
-	+	-	+	-	.	.	.
+	-	+	-	+	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

C. JENIS-JENIS MATRIKS

1. Matriks Transpose

Matriks A^T disebut *transpose* matriks A jika kolom-kolom matriks A merupakan baris-baris matriks A^T. Simbul untuk menyatakan traspose dari matrik A adalah A^T, A^* atau . Kita akan menggunakan A^T sebagai simbul traspose matrik A.

Jika : A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka A^T = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Jika : B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ maka B^T = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$

2. Matriks Simetri

Matriks bujur sangkar A disebut ***matriks simetri*** jika elemen $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j. Contoh matriks simetri terhadap diagonal utamanya adalah sebagai berikut :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

3. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar A disebut ***matriks diagonal*** jika semua elemen diluar elemen diagonalnya sama dengan 0. Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama dengan 1. Matriks diagonal dan matriks identitas adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal Matriks identitas

4. Matriks Segitiga Atas dan Segitiga Bawah

Matriks bujur sangkar A disebut *matiks segitiga atas* jika semua elemen di bawah elemen diagonal utamanya sama dengan 0. Sedangkan matriks bujur sangkar A disebut *matriks segitiga bawah* jika semua elemen di atas elemen diagonal utamanya sama dengan 0. Matriks segitiga atas dan bawah adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas Matriks segitiga bawah

($a_{ij} = 0$ untuk $i > j$) ($a_{ij} = 0$ untuk $i < j$)

5. Matriks Kolom dan Matriks Baris

Matriks A disebut matriks kolom jika elemennya hanya terdiri dari kolom tunggal. Matriks A disebut matriks baris jika elemennya hanya terdiri dari baris tunggal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Matriks kolom A berdimensi 3 x 1 Matriks baris A berdimensi 1 x 3

6. Matriks Nol

Matriks nol (ordo berapapun) yang semua elemennya adalah nol.

D. OPERASI MATRIKS

Operasi matriks adalah operasi aritmatika terhadap elemen-elemennya. Pada suatu matriks dapat dilakukan operasi penambahan, pengurangan dan perkalian. Operasi penambahan, pengurangan dan perkalian tersebut melalui elemen-elemennya.

1. Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks A dan B adalah sama jika elemen yang bersesuaian sama. Oleh sebab itu A = B jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j. Contoh dua matriks A dan B yang sama misalnya :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks A sama dengan matriks B karena $a_{11} = b_{11} = 2$; $a_{12} = b_{12} = 3$; $a_{21} = b_{21} = 7$ dan $a_{22} = b_{22} = 9$.

2. Penjumlahan Matriks

Jumlah dua matriks A dan B adalah matriks C yang elemennya merupakan penambahan elemen matriks A dan matriks B yang bersesuaian.

Misalkan dua matriks A dan matriks B sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Jika matriks C merupakan penjumlahan matriks A dan B maka elemen matriks C adalah :

$C_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 + 1 = 3$ $\qquad$ $C_{12} = a_{12} + b_{12} = 3 + 4 = 7$

$C_{21} = a_{21} + b_{21} = 5 + 9 = 14$ $\qquad$ $C_{22} = a_{22} + b_{22} = 0 + 7 = 7$

Sehingga diperoleh matriks C sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks A dan B adalah matriks C matriks yang elemen-elemennya merupakan pengurangan elemen matriks A dan matriks B yang bersesuaian.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks A dan B seperti di atas maka jika C=A-B maka elemen matriks C :

$C_{11} = a_{11} - b_{11} = 2 - 1 = 1$ $\qquad$ $C_{12} = a_{12} - b_{12} = 3 - 4 = -1$

$C_{21} = a_{21} - b_{21} = 5 - 9 = -4$ $\qquad$ $C_{21} = a_{21} - b_{21} = 0 - 7 = -6$

Sehingga matriks C adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Dua Matriks

Perkalian matriks A berdimensi m x n dengan matriks B berdimensi n x p adalah matriks C berdimensi m x p yang elemennya merupakan perkalian dari elemen **baris** pada matriks A dengan elemen **kolom** pada matriks B.

Misal matriks C = matriks A x matriks B, maka elemen matriks C :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ kali B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ sama dengan C = $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$

C_{11} = 2 . 1 + 3 . 9 = 2 + 27 = 29 (baris 1 x kolom 1)

C_{12} = 2 . 4 + 3 . 7 = 8 + 21 = 29 (baris 1 x kolom 2)

C_{21} = 5 . 1 + 0 . 9 = 5 + 0 = 5 (baris 2 x kolom 1)

C_{22} = 5 . 4 + 0 . 7 = 20 + 0 = 20 (baris 2 x kolom 2)

Sehingga matriks C adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 22 & 3 \\ 53 & 27 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian matriks A berdimensi m x n dengan skalar (suatu bilangan) adalah matriks D berdimensi m x n yang setiap elemennya merupakan perkalian setiap elemen matriks A dengan skalar itu.

Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ maka 3 A = 3 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga matriks D adalah :

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Perkalian Matriks Ordo Tiga

Perkalian dua matriks A . B dan B . A berdimensi 3 x 3 bawah ini menunjukkan bahwa tidak setiap perkalian dua matriks berlaku komulatif. Misalkan matriks A dan B sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks C = A . B maka elemen-elemen matriks C adalah :

$C_{11} = a_{11} . b_{11} + a_{12} . b_{21} + a_{13} . b_{31} = 3 . 2 + 1 . 1 + 0 . 3 = 6+1+0 = 7$

$C_{12} = a_{11} . b_{12} + a_{12} . b_{22} + a_{13} . b_{32} = 3 . -1 + 1 . 2 + 0 . 2 = 3+2+0 =-1$

$C_{13} = a_{11} . b_{13} + a_{12} . b_{23} + a_{13} . b_{33} = 3 . 0 + 1 . 1 + 0 . -1 = 0+1+1 = 1$

$C_{21} = a_{21} . b_{11} + a_{22} . b_{21} + a_{23} . b_{31} = 2 . 2 + 5 . 1 + 6 . 3 = 4 + 5 + 18 = 27$

$C_{22} = a_{21} . b_{12} + a_{22} . b_{22} + a_{23} . b_{32} = 2 . -1 + 5 . 2 + 6 . 2 = 2 + 10 + 12 = 20$

$C_{23} = a_{21} . b_{13} + a_{22} . b_{23} + a_{23} . b_{33} = 2 . 0 + 5 . 1 + 6 . -1 = 0 + 5 – 6 = -1$

$C_{31} = a_{31} . b_{11} + a_{32} . b_{21} + a_{33} . b_{31} = 1 . 2 + 4 . 1 + 3 . 3 = 2 + 4 + 9 = 15$

$C_{32} = a_{31} . b_{12} + a_{32} . b_{22} + a_{33} . b_{32} = 1 . -1 + 4 . 2 + 3 . 2 = -1 + 8 + 6 = 13$

$C_{33} = a_{31} . b_{13} + a_{32} . b_{23} + a_{33} . b_{33} = 1 . 0 + 4 . 1 + 3 . -1 = 0 + 4 + 3 = 7$

Berdasarkan perhitungantersebut matriks A . B = C adalah :

A . B = C

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 27 & 20 & -1 \\ 15 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

Misalkan B . A = D maka elemen-elemen matriks D adalah :

$d_{11} = b_{11} . a_{11} + b_{12} . a_{21} + b_{13} . a_{31} = 2 . 3 + -1 . 2 + 0 . 1 = 6 – 2 + 0 = 4$

$d_{12} = b_{11} . a_{12} + b_{12} . a_{22} + b_{13} . a_{32} = 2 . 1 + -1 . 5 + 0 . 6 = 2 – 5 + 0 = -3$

$d_{13} = b_{11} . a_{13} + b_{12} . a_{23} + b_{13} . a_{33} = 2 . 0 + -1 . 6 + 0 . 3 = 0 – 6 + 0 = -6$

$d_{21} = b_{21} . a_{11} + b_{22} . a_{21} + b_{23} . a_{31} = 1 . 3 + 2 . 2 + 1 . 1 = 3 + 4 + 1 = 8$

$d_{22} = b_{21} . a_{12} + b_{22} . a_{22} + b_{23} . a_{32} = 1 . 1 + 2 . 5 + 1 . 4 = 1 + 10 + 4 = 15$

$d_{23} = b_{21} . a_{13} + b_{22} . a_{23} + b_{23} . a_{33} = 1 . 0 + 2 . 6 + 1 . 3 = 0 + 12 + 3 = 15$

$d_{31} = b_{31} . a_{11} + b_{32} . a_{21} + b_{33} . a_{31} = 3 . 3 + 2 . 2 + -1 . 1 = 9 + 4 – 1 = 12$

$d_{32} = b_{31} . a_{12} + b_{32} . a_{22} + b_{33} . a_{32} = 3 . 1 + 2 . 5 + -1 . 4 = 3 + 10 – 4 = 9$

$d_{33} = b_{31} . a_{13} + b_{32} . a_{23} + b_{33} . a_{33} = 3 . 0 + 2 . 6 + -1 . 3 = 0 + 12 – 3 = 9$

Berdasarkan perhitungan tersebut maka matriks B . A = D adalah :

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} \;.\; \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 8 & 15 & 15 \\ 12 & 9 & 9 \end{bmatrix}}$$

Dari hasil A . B = C dan B . A = D ternyata elemen c_{ij} tidak sama dengan elemen d_{ij}. Dengan demikian tidak selalu A . B = B . A.

6. Matriks yang Dikuadratkan

Misalkan A^2 = E maka matriks E = A . A sehingga elemen e_{ij} adalah :

$e_{11} = a_{11} . a_{11} + a_{12} . a_{21} + a_{13} . a_{31} = 3 . 3 + 1 . 2 + 0 . 1 = 9 + 2 + 0 = 11$

$e_{12} = a_{11} . a_{12} + a_{12} . a_{22} + a_{13} . a_{32} = 3 . 1 + 1 . 5 + 0 . 4 = 3 + 5 + 0 = 8$

$e_{13} = a_{11} . a_{13} + a_{12} . a_{23} + a_{13} . a_{33} = 3 . 0 + 1 . 6 + 0 . 3 = 0 + 6 + 0 = 6$

$e_{21} = a_{21} . a_{11} + a_{22} . a_{21} + a_{23} . a_{31} = 2 . 3 + 5 . 2 + 6 . 1 = 6 + 10 + 6 = 22$

$e_{22} = a_{21} . a_{12} + a_{22} . a_{22} + a_{23} . a_{32} = 2 . 1 + 5 . 5 + 6 . 4 = 2 + 25 + 24 = 51$

$e_{23} = a_{21} . a_{13} + a_{22} . a_{23} + a_{23} . a_{33} = 2 . 0 + 5 . 6 + 6 . 3 = 0 + 30 + 18 = 48$

$e_{31} = a_{31} . a_{11} + a_{32} . a_{21} + a_{33} . a_{31} = 1 . 3 + 4 . 2 + 3 . 1 = 3 + 8 + 3 = 14$

$e_{32} = a_{31} . a_{12} + a_{32} . a_{22} + a_{33} . a_{32} = 1 . 1 + 4 . 5 + 3 . 4 = 1 + 20 + 12 = 33$

$e_{33} = a_{31} . a_{13} + a_{32} . a_{23} + a_{33} . a_{33} = 1 . 0 + 4 . 6 + 3 . 3 = 0 + 24 + 9 = 33$

Berdasarkan perhitungan tersebut matriks A^2 = A . A = E adalah :

$$A \quad . \quad A \quad = \quad E$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 6 \\ 22 & 51 & 48 \\ 14 & 33 & 33 \end{bmatrix}$$

7. Kofaktor Matriks Bujursangkar

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Maka Minor-minor dari matriks A adalah : $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 5 \,.\, 3 - 4 \,.\, 6 = 15 - 24 = -9$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2 \,.\, 3 - 1 \,.\, 6 = 6 - 6 = 0$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \,.\, 4 - 1 \,.\, 5 = 8 - 5 = 3$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1 \,.\, 3 - 4 \,.\, 0 = 3 - 0 = 3$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 \,.\, 3 - 1 \,.\, 0 = 9 - 0 = 9$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \,.\, 4 - 1 \,.\, 1 = 12 - 1 = 11$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 1 \,.\, 6 - 5 \,.\, 0 = 6 - 0 = 6$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 3 \,.\, 6 - 2 \,.\, 0 = 18 - 0 = 18$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \,.\, 5 - 2 \,.\, 1 = 15 - 2 = 13$$

Misalkan A_{ij} adalah kofaktor-kofaktor elemen matriks A maka besarnya setiap elemen matriks A adalah adalah nilai (tanda) setiap elemennya dikalikan minornya.

Pedoman untuk menentukan tanda adalah sebagai berikut :

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & . & . & . \\ - & + & - & + & - & . & . & . \\ + & - & + & - & + & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

Selain itu kofaktor juga dapat dihitung dengan cara mengalikan minornya dengan angka (-1) pangkat jumlah dari nomor elemennya.

Contoh:

$A_{11} = (-1)^{1+1} . M_{11} = (-1)^{2} . -9 = 1 . -9 = -9$

$A_{12} = (-1)^{1+2} . M_{12} = (-1)^{3} . 0 = -1 . 0 = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} . M_{13} = (-1)^{4} . 3 = 1 . 3 = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} . M_{21} = (-1)^{3} . 3 = -1 . 3 = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} . M_{22} = (-1)^{4} . 9 = 1 . 9 = 9$

$A_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23} = (-1)^{5} . 11 = -1 . 11 = -11$

$A_{31} = (-1)^{3+1} . M_{31} = (-1)^{4} . 6 = 1 . 6 = 6$

$A_{32} = (-1)^{3+2} . M_{32} = (-1)^{5} . \quad = -1 . 18 = -18$

$A_{33} = (-1)^{3+3} . M_{33} = (-1)^{6} . \quad = 1 . 13 = 13$

Susunan elemen A_{ij} pada matriks kofaktor A adalah :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & -11 \\ 6 & -18 & 13 \end{bmatrix}$$

8. Adjoint Matriks Bujursangkar

Adjoint (adj) matriks A adalah transpose dari matrik kofaktornya.

Misalnya dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ telah dihitung kofaktornya yaitu

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & -11 \\ 6 & -18 & 13 \end{bmatrix}$$ maka adjoint matriks A = C^T

$$C^T = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$$

9. Invers Matriks Bujursangkar

Untuk memperoleh invers matriks bujursangkar adalah dengan membagi adjoint matriks tersebut dengan determinan matriksnya dengan catatan determinannya ≠ 0.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$ maka adjoint A = $C^T = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$

∇ (A) = 3 . (15-24) – 1 (6-6) + 0 (8-5)= -27

Sehingga invers matriks A atau

$$A^{-1} = -1/27 \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/-27 & -3/-27 & 6/-27 \\ 0/-27 & 9/-27 & -18/-27 \\ 3/-27 & -11/-27 & 13/-27 \end{bmatrix}$$

Maka inversi matriks A adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix}$

Untuk memeriksa apakah inversi matriks A itu betul maka dapat dilakukan dengan mengalikan dengan matriks A dan hasilnya adalah matriks identitas. Oleh sebab itu $A^{-1} \cdot A = I$.

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena hasil kali matriks A dan inversinya adalah matriks identitas I dapat disimpulkan bahwa inversi matriks A dengan elemen-elemen tersebut sudah betul.

Kesimpulan :

Langkah untuk mencari invers matriks adalah sbb:

1. Hitung determinan
2. Cari kofaktornya (matriks C)
3. Cari transpose matriks (C^T) untuk memperoleh adjoint matriksnya.
4. Menghitung invers matriks dengan cara membagi adjointnya dengan determinan
5. Mengecek kebenaran dengan matriks identitas (bila diperlukan).

10. Penggunaan Invers Matriks

Penggunaan inversi suatu matriks diantaranya adalah untuk menyelesaikan persamaan linier simultan. Dalam persamaan linier simultan akan dicari harga-harga " *unkown* " yang belum diketahui. Jika dalam persamaan linier simultan mempunyai harga determinan yang tidak sama dengan nol maka penyelesaian persamaannya akan mempunyai harga yang unik (1 unkwon mempunyai 1 harga).

Misalkan persamaan linier simultan mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$a_{11} \, . \, x_1 + a_{12} \, . \, x_2 + a_{13} \, . \, x_3 = c_1$$

$$a_{21} \, . \, x_1 + a_{22} \, . \, x_2 + a_{23} \, . \, x_3 = c_2$$

$$a_{31} \, . \, x_1 + a_{32} \, . \, x_2 + a_{33} \, . \, x_3 = c_3$$

akan dicari harga-harga x_1 , x_2 dan x_3 yang memenuhi persamaan tersebut dengan invers matriks. Langkah pertama adalah membentuk persamaan linier simultan menjadi bentuk perkalian matriks sebagai berikut :

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \; . \; \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}$$

Dengan operasi matriks maka matriks x adalah :

$$x = A^{-1} \, . \, C$$

sehingga elemen pada matriks x dapat ditentukan.

Berikut ini ada penggunaan inver matriks pada penyelesaian persamaan linier simultan.

Contoh soal:

Tentukan harga-harga x_1 . x_2 dan x_3 dalam persamaan linier simultan :

$$3 . x_1 + x_2 = 9$$
$$2 . x_1 + 5 . x_2 + 6 . x_3 = 25$$
$$x_1 + 4 . x_2 + 3 . x_3 = 17$$

Penyelesaian : Persamaan linier simultan dalam bentuk matriks :

A . X = C

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Telah dihitung melalui adjoint matriks dan determinan untuk memperoleh invers matriks A yaitu A^{-1}. Sehingga bentuk perkalian matriks pada persamaan linier simultan menjadi :

X = A^{-1} . C

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Dengan perkalian matriks dapat diperoleh harga-harga x_1 . x_2 dan x_3 sebagai berikut :

$$x_1 = 1/3 . 9 + 1/9 . 25 + -2/9 . 17 = 3 + 25/9 – 34/9 = 3 – 1 = 2$$
$$x_2 = 0 . 9 + -1/3 . 25 + 2/3 . 17 = 0 – 25/3 + 34/3 = 9/3 = 3$$
$$x_3 = -1/9 .9 + 11/27 . 25 + -13/27 . 17 = -1 + 275/27 – 221/27 = 1$$

Untuk mengecek apakah harga-harga tersebut betul maka disubstitusikan kembali kedalam persamaan linier simultan di atas.

$3 . x_1 + x_2 = 3 . 2 + 3 = 6 + 3 = 9$ (betul)

$2 . x_1 + 5 . x_2 + 6 . x_3 = 2 . 2 + 5 . 3 + 6 . 1 = 4 + 15 + 4 = 25$ (betul)

$x_1 + 4 . x_2 + 3 . x_3 = 2 + 4 . 3 + 3 . 1 = 2 + 12 + 3 = 17$ (betul)