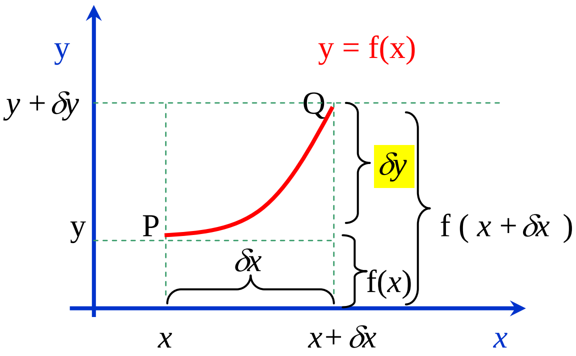
DIFERENSIAL

A. PENGERTIAN



Keterangan:

x : variable bebas

y : variable terikat

δx : perubah pada sumbu x

δy : perubah pada sumbu y

P : (x,y)

Tetapi karena y=f(x) maka P = (x, f(x))

Q : [($x + \delta x$), f ($x + \delta x$)] ➔ mengapa ($x + \delta x$)?

Hal ini dikarenakan fungsi di titik P adalah f(x) maka fungsi dititik Q adalah f ($x + \delta x$)

δy : f (x+ δx) – f(x)

laju perubahan = $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

Jika diambil limitnya untuk δx mendekati nol atau $\delta x \to 0$, maka

$$\underset{\delta x \to o}{\text{Limit}} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to o} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \qquad \text{………….(1)}$$

secara aljabar pers (1) disebut ***turunan pertama*** dari fungsi y = f(x)

keterangan :

- Turunanan = derrivatif
- Turunan pertama dari fungsi y = f(x) dilambangkan dengan notasi $\dfrac{dy}{dx}$ atau y^1

- Proses mencari y^1 dari y = f(x) disebut sebagai penurunan atau pendeferensialan
- Turunan kedua dari fungsi y = f(x) dilambangkan dengan $\frac{d^2y}{dx^2}$ atau y^{11}

Contoh soal

Carilah fungsi turunan yang dinyatakan dengan f(x) = $x^2 - 2x$

Jawab :

f(x) = $x^2 - 2x$, maka

$f(x+\delta x) = (x + \delta x)^2 - 2(x+\delta x)$ ➔ didapat dari (x) diganti dengan $(x+\delta x)$

sehingga

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{(x+\delta x)^2 - 2(x+\delta x)\} - (x^2 - 2x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\delta x + \delta x^2 - 2x - 2\delta x - x^2 + 2x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (2x - 2 + \delta x)$$

$$= 2x - 2$$

dari contoh soal diatas, dapat ditarik rumus umum untuk mencari turunan pertama dari suatu fungsi sebagai berikut :

Jika $y = x^n$ maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

B. KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIASI

1. Diferensiasi konstanta

$\boxed{y = k,}$ k adalah konstanta, maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$

contoh : $y = 7 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensiasi fungsi pangkat

$\boxed{y = x^n}$; n = konstanta, maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}}$

contoh : $y = x^9$ maka $\frac{dy}{dx} = 9\ x^{8}$

3. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

$\boxed{y = K.V}$; V = g(x), maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = K.\frac{dv}{dx}}$

contoh : $y = 3x^5$ maka $\frac{dy}{dx} = 3(5x^4) = 15x^4$

4. Diferensiasi Pembagian konstanta dengan fungsi

$\boxed{y = \frac{k}{v}}$ $; v = g(x), maka$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-k.\frac{dv}{dx}}{v^2}}$

contoh : $y = \frac{7}{x^4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-7(4x^3)}{(x^4)^2} = \frac{-28x^3}{x^8}$

5. Diferensiasi Penjumlahan/Pengurangan fungsi

$\boxed{y = U + V}$; U = g(x), V = h(x), maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$

contoh : $y = 8x^5 + 4x^3 \rightarrow U = 8x^5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 40x^4$

$V = 4x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 12x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2$$

6. Diferensiasi Perkalian Fungsi

$\boxed{y = U \,.\, V}$; U = g(x), V = h(x), maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = U.\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx}}$

contoh : $y = (6x^2)\,(5x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2)(15x^2) + (5x^3)(12x)$$

$$= 90x^4 + 60x^4 = 150x^4$$

7. Diferensiasi Pembagian Fungsi

$\boxed{y = \frac{U}{V}}$ dimana $U = g(x); V = h(x)$ maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{V.\frac{du}{dx} - U.\frac{dv}{dx}}{V^2}}$

contoh : $y = \frac{5x^5}{3x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(25x^4) - 5x^5(6x)}{(3x^2)^2} = \frac{75x^6 - 30x^6}{9x^4}$$

$$= \frac{45}{9}x^2 = 5x^2$$

8. Diferensiasi Fungsi Berpangkat

$\boxed{y = U^n}$; u = g(x), n = konstanta maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = nU^{n-1}\frac{du}{dx}}$

contoh :

$y = (x^2 + 3x)^2$

dari soal diketahui $U = (x^2+3x)$ maka $\rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 3$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + 3x)(2x + 3) = 2(2x^3 + 6x^2 + 3x^2 + 9x)$$

$$= 4x^3 + 18x^2 + 18x$$

9. Diferensiasi Fungsi Logaritmik

$\boxed{y = {}^a\log x}$ maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}}$ atau boleh juga $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\log e}{x}}$

Catatan: e = 2,71828

contoh :

$y = {}^5\log 7 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{7\ln 5}$ *atau* $\frac{dy}{dx} = \frac{{}^5\log e}{7}$

10. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik

$\boxed{y = {}^a\log U}$; U = g(x) maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\log e}{U}.\frac{du}{dx}}$

contoh :

$y = \log\frac{(x+5)}{(x+7)}$

maka dalam soal ini $U = \frac{(x+5)}{(x+7)}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x+7)(1) - (x+5)(1)}{(x+7)^2} = \frac{2}{(x+7)^2}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{(x+5)/(x+7)}.\frac{2}{(x+7)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\log e}{(x+5)(x+7)}$$

11. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik Berpangkat

$\boxed{y = ({}^a\log U)^n}$ dimana U=g(x)

n = konstanta

maka $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = n({}^a\log U)^{n-1} \cdot \dfrac{{}^a\log e}{U} \cdot \dfrac{du}{dx}}$

contoh :

y = (log $6x^2$)^3 $\rightarrow$ U = $6x^2$; jadi $\dfrac{du}{dx} = 12x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log 6x^2)^2 \cdot \frac{\log e}{6x^2}(12x)$$

$$= \frac{36x(\log 6x^2)^2 \log e}{6x^2} = \frac{6(\log 6x^2)^2 \log e}{x}$$

12. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik Napier

Log. Napier $\rightarrow$ logaritma yang bilangan pkoknya e

e = 2,71828

$\rightarrow$ Biasa ditulis dengan ${}^e\log a = \ln a$

$\boxed{\text{y = ln U}}$; U = g(x) maka $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{U} \cdot \dfrac{du}{dx}}$

contoh : y = ln ($5x^2$ + 7) $\rightarrow$ U = $5x^2$ + 7

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(5x^2+7)} \cdot 10x = \frac{10x}{(5x^2+7)}$$

13. Diferensiasi Fungsi Komposit logaritmik Napier Berpangkat

$\boxed{\text{Y = (ln U)}^n}$; U = g(x) ; n = konstanta

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = n(\ln U)^{n-1} \cdot \frac{1}{U} \cdot \frac{du}{dx}}$$

contoh :

$$y = (\ln 3x^2)^4 \quad \rightarrow \quad U = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(Ln\,3x^2)^3 \frac{1}{3x^2}.6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{x}(Ln\,3x^2)^3$$

14. Diferensiasi Fungsi Komposit Eksponensial

$\boxed{Y = a^u}$; U = g(x) dan a=konstanta ; maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}}$

Contoh :

$y = 5^{(x^2-2)}$ maka U =x^2 – 2 sehingga $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{(x^2-2)} \ln 5\,.\,2x$$

15. Diferensiasi Fungsi Kompleks

$\boxed{Y = U^V}$; U = g(x) dan V = h(x) ;

maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = V.U^{v-1}\frac{du}{dx} + U^v \ln U \frac{dv}{dx}}$

contoh

$y = 7x^{x^5} \quad \rightarrow U = 7x \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 7$

$V = x^5 \quad \frac{dv}{dx} = 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = x^5.7x^{x^5-1}.7 + 7x^{x^5} \ln 7x.5x^4$$

$= 49x^{x^5+4} + 35x^{x^5+4}\ln.7x$

$= 35x^{x^5+4}(\,7/5 + \ln 7x\,)$

16. Diferensiasi Fungsi Balikan

Jika y = f(x)dan x = g(y) adalah fungsi-fungsi yang berbalikan, maka

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}}$$

contoh :

x = 10y + 3y^4

maka $\frac{dx}{dy} = 10 + 12y^3$

sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10 + 12y^3}$