PERSAMAAN LINIER

1). Persamaan Linier Satu Variabel

Bentuk umum : $ax + b = 0$, dimana $a \neq 0$ dan b = konstanta

Penyelesaian : $x = -\dfrac{b}{a}$

Contoh : 1). $5x + 10 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{10}{5} \rightarrow x = -2$

2). $x + 8 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{8}{1} \rightarrow x = -8$

2). Persamaan Linier 2 Variabel

Bentuk umum : $ax + by = c$ dimana : a, b, c adalah konstanta

3). Persamaan Linier Tiga Variabel

Bentuk umum : $ax + by + cz = d$ dimana : a, b, c, d adalah konstanta. Penyelesaian persamaan linier dua Variabel dan tiga variable (**persamaan linier simultan)** dilakukan dengan : (1) Eliminasi, (2) Substitusi, (3) Interasi dan (4) Determinan.

1. Cara Eliminasi

Eliminasi berarti meniadakan atau menghilangkan harga – harga *unknown.*

Contoh :

Tentukan harga – harga x, y dan z dalam persamaan linier simultan :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ -3x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Jawab :

Misal

$$\begin{aligned} (p1) &\rightarrow 2x + 3y + z = 2 \\ (p2) &\rightarrow x - 2y - 3z = 1 \\ (p3) &\rightarrow -3x - 5y + z = 0 \end{aligned}$$

Eliminasi *x*

$(p1).1 \rightarrow 2x + 3y + \quad z = 2$; Tanda . adalah operasi kali

$$\begin{array}{ll} (p2). \rightarrow & \underline{2x - 4y - 6z = 2}_{-} \\ & \quad +7y + 7z = 0 \qquad \cdots\cdots(P4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (p2).3 \rightarrow & 3x - 6y - 9z = 3 \\ (p3).1 \rightarrow & \underline{-3x - 5y + z = 0}_{+} \\ & \quad -11y - 8z = 3 \qquad \cdots\cdots(P5) \end{array}$$

Eliminasi y :

$$\begin{array}{ll} (p4).\frac{11}{7} & \rightarrow 11y + 11z = 0 \\ (p5).1 & \rightarrow \underline{-11y - 8z = 3}_{+} \\ & \qquad 3z = 3 \\ & \qquad z = 1 \end{array}$$

Menentukan harga *unknown* Y:

Untuk harga z = 1 maka persamaan (P4) adalah :

$7y + 7.1 = 0$

$7y = -7$ atau $y = -1$

Jika digunakan p5 untuk z = 1 persamaannya adalah :

$-11y - 8.1 = 3$

$-11y = 11$ atau $y = -1$

Menentukan harga *unknown x* :

Harga x dapat ditentukan dari persamaan (p1), atau (p2), atau (p3), untuk harga z = 1 dan y = -1 dengan persamaan (p1) menghasilkan :

$$\begin{aligned} (p1) \rightarrow 2x + 3.(-1) + 1 &= 2 \\ 2x - 3 + 1 &= 2 \\ 2x - 2 &= 2 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2. **Cara Substitusi**

Substitusi berarti mengganti salah satu *unknown* yang mewakili *unknown – unknown* lain. Pada suatu persamaan linier tiga variabel terdapat 3 buah *unknown* x, y, z maka substitusi dapat dilakukan dengan 6 macam yaitu :

x, y; x,z; y, x; y, z; z, x; dan z, y.

contoh:

Selesaikan persamaan linier simultan dengan cara substitusi :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2 \\ x - 2y - 3z &= 1 \\ -3x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Jawab

Misalkan : (p1) $\rightarrow 2x + 3y + z = 2$

(p2) $\rightarrow x - 2y - 3z = 1$

(p3) $\rightarrow -3x - 5y + z = 0$

Substitusi x

Dari persamaan linier (p1) diperoleh harga x dalam bentuk term y dan z sebagai berikut :

$$2x + 3y + z = 2$$

$$\begin{aligned} 2x &= 2 - 3y - z \\ x &= 1 - 1{,}5y - 0{,}5z \quad \cdots\cdots \quad (p4) \end{aligned}$$

Substitusi harga x tersebut kedalam persamaan (p2) dan (p3) diperoleh :

P4$\longrightarrow$ P2 $(1 - 1{,}5y - 0{,}5z) - 2y - 3z = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 1 - 1{,}5y - 0{,}5z - 2y - 3z = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -3{,}5y - 3{,}5z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -3{,}5y = 3{,}5z \\ &\Leftrightarrow \quad y = -z \qquad \cdots\cdots (p5) \end{aligned}$$

P4$\longrightarrow$ P3 $-3.(1 - 1{,}5y - 0.5z) - 2y - 3z = 1$

$$\Leftrightarrow \quad -3 + 4{,}5y + 1{,}5z - 5y + z = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -0{,}5y + 2{,}5z = 3 \qquad \cdots\cdots(p6)$$

Substitusi y:

Dari persamaan p5 dapat diketahui harga y dalam term z. substitusi harga y dalam persamaan p6 diperoleh :

P5→ p6 $-0{,}5(-z) + 2{,}5z = 3$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5z + 2{,}5z = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad 3z = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad z = 1 \qquad \cdots\cdots(p7)$$

Jadi harga z = 1

Substitusi kembali :

Substitusi kembali z dalam p7 pada p5 diperoleh :

P7→ P5 $y = -z$

$$\Leftrightarrow \quad y = -1 \qquad \cdots\cdots(p8)$$

Substitusi kembali y pada p8 dan z pada p7 ke dalam p4 diperoleh :

P8→ P7→ P4 $x = 1 - 1{,}5y - 0{,}5z$

$$\Leftrightarrow x = 1 - 1{,}5.(-1) - 0{,}5.1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 + 1{,}5 - 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \qquad \cdots\cdots(p9)$$

Dari hasil substitusi di atas dapat ditentukan harga – harga penyelesaian persamaan linier simultan adalah :

$$x = 2$$
$$y = -1$$
$$z = 1$$

3. **Cara Interasi**

Cara interasi adalah cara coba – coba memasukkan harga tertentu ke dalam *unknown – unknown* sampai ditemukan harga x, y dan z

4. Penyelesaian dengan cara determinan

Sebelumnya disusun koefisien – koefisien dan konstanta – konstanta pada persamaan linier simultan yang membentuk formasi baris dan kolom. Setiap bilangan yang menempati suatu baris dan kolom disebut elemen.

Contoh :

$$
\begin{aligned}
a1x + b1y + c1 &= 0 \qquad \cdots (i) \\
a2x + b2y + c2 &= 0 \qquad \cdots (ii)
\end{aligned}
$$

Maka persamaan linier simultan tersebut disusun dalam bentuk kolm dan baris sebagai berikut :

$$
\begin{array}{cccl}
a1 & b1 & c1 & \rightarrow \text{baris 1} \\
a2 & b2 & c2 & \rightarrow \text{baris 2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \quad \text{elemen} \\
\text{Kolom a} & \text{kolom b} & \text{kolom c} &
\end{array}
$$

Dengan cara determinan, harga – harga (*unknown*) dicari dengan menentukan determinanya terlebih dahulu. Cara menyusun determinan x misalkan cukup mengganti bilangan – bilangan pada kolom x dengan kolom konstanta.

a. cara Cramer

rumus untuk mencari harga – harga dalam determinan linier simultan adalah membagi determinannya dengan determinan. Misalkan mencari harga x adalah dengan membagi determinan x dengan determinan. Demikian juga untuk mencari harga y maka determinan y dibagi dengan determinan.

1). Untuk persamaan linier simultan dengan dua cara persamaan linier

$$
\begin{aligned}
a1x + b1y + c1 &= 0 \\
a2x + b2y + c2 &= 0
\end{aligned}
$$

Kolom x kolom y kolom c

(Kx)	(Ky)	(Kc)
$a1$	$b1$	$c1$
$a2$	$b2$	$c2$

- Determinan ∇ dibentuk dari elemen-elemen pada kolom x dan y :

$$\text{Determinan } \nabla = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kx} & \text{Ky} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} \end{array} = c1.b2 - a2.b1$$

- Determinan x yaitu ∇x dibentuk dengan mengganti kolom x dengan kolom c sebagai berikut :

$$\nabla x = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kc} & \text{Ky} \end{array} \\ \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} \end{array} = c1.b2 - c2.b1$$

$$\text{Harga } \; x = \frac{\nabla x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\nabla} = \frac{c1.b2 - c2.b1}{a1.b2 - a2.b1}$$

- Determinan y yaitu ∇y dibentuk dengan mengganti kolom y dengan kolom c sebagai berikut :

$$\nabla y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kx} & \text{Kc} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} \end{array} = a1.c2 - a2.c1$$

$$\text{Harga y} = \frac{\nabla y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\nabla} = \frac{a1.c2 - a2.c1}{a1.b2 - a2.b1}$$

2). Untuk persamaan linier simultan dengan tiga persamaan linier.

$$a1x + b1y + c1z + d1 \;\; = 0$$
$$a2x + b2y + c2z + d2 = 0$$
$$a3x + b3y + c3z + d3 = 0$$

Disusun sebagai berikut :

Kx	Ky	Kz	Kd
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

Determinan ∇ dibentuk dari elemen – elemen pada kolom x, y dan z dengan menempatkan elemen – elemen dari baris yang atas dan masing – masing dikalikan dengan minornya

Contoh

Minor dari *a1* adalah $\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix}$ yang didapat dari gambar berikut :

$$\begin{matrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{matrix}$$

Determinan ∇ adalah sebagaio berikut :

$$\begin{array}{ccc} \text{Kd} & \text{Ky} & \text{Kz} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} = a1.\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} - b1\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} + c1.\begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

Menentukan harga determinan dengan cara ini disebut *ekspansi determinan.* Selanjutnya harga – harga x, y dan z dirumuskan dengan cara determinan sebagai berikut :

$$x = \frac{\nabla x}{\nabla} = \frac{\begin{array}{ccc} Kd & Ky & Kz \\ \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla}$$

$$y = \frac{\nabla y}{\nabla} = \frac{\begin{array}{ccc} Kx & Kd & Kz \\ \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla} \qquad z = \frac{\nabla z}{\nabla} = \frac{\begin{array}{ccc} Kx & Ky & Kd \\ \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla}$$

b. Cara Sarrus

Cara Sarrus ini terlebih dahulu disusun elemen-elemen determinan, kemudian ditulis kembali dua kolom yang pertama. Cara Sarrus ini disusun **hanya untuk susunan bilangan yang mempunyai tiga baris dan tiga kolom saja.** Harga determinan dengan cara ini dihasilkan melalui operasi perkalian diantara elemen-elemen diagonal. Perkalian elemen diagonal dari atas ke bawah tandanya positif (+). Sedangkan perkalian elemen diagonal dari bawah ke atas tandanya negatif (-).

Contoh

$$\begin{array}{cccccc} & Kx & Ky & Kz & Kx & Ky \\ \nabla = & \left| \begin{array}{ccc} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{cc} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$= +(a1.b2.c3 + b1.c2.a3 + c1.a2.b3) - (a3.b2.c1 + b3.c2.a1 + c3.a2.b1)$$

Untuk mencari harga x maka determinan ∇x dibagi dengan determinan ∇. Demikian juga harga y dan harga z. Hanya operasinya menggunakan cara Sarrus.

Contoh soal-Penyelesaian

1. Tentukan harga x dan y dalam persamaan linier simultan sebagai berikut dengan cara determinan yang menggunakan aturan Cramer.

$$6x - 9y = -15$$
$$6x + 4y = 24$$

Jawab:

Susunan kolom x, kolom y dan kolom c adalah :

Kx	Ky	Kc
6	-9	-15
6	4	24

$$x\frac{\nabla x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} -15 & -9 \\ 24 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-15)(4)-(24)(-9)}{(6)(4)-(6)(-9)} = \frac{-60+216}{24+54} = \frac{156}{78} = 2$$

$$y = \frac{\nabla y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}}{78} = \frac{(6)(24)-(6)(-15)}{78} = \frac{144+90}{78} = \frac{234}{78} = 3$$

Jadi harga yang memenuhi persamaan linier simultan tersebut adalah x = 2 dan y = 3.

2. selsesaikan persamaan linier simultan seperti dibawah ini dengan cara determinan yang menggunakan aturan cramer.

$$2x + 3y + z = 2$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$-3x - 5y + z = 0$$

Jawab

Determinan ∇ =

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.\{(-2.1) - (-5)(-3)\ \} - 3.\{(1)(1) - (-3)(-3)\} + 1.\{(1)(-5) - (-3)(-2)\} \\
&= 2.(-2-15) - 3.(1-9) + 1.(-5-6) \\
&= 2.-17 - 3.-8 + 1.-11 \\
&= -34 + 24 - 11 \\
&= -21
\end{aligned}$$

Determinan ∇ x = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

= 2.{(-2)(1) - (-5)(-3)} – 3.{(1)(1) – (0)(-3)} + 1.{(1)(-5)-(0)(-2)}

= 2.(-2-15) - 3(1-0) + 1(-5-0)

= 2.-17 – 3.1 + 1.-5 = -34 - 3 – 5

= -42

Determinan $\nabla y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + .\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$

= 2. {(1).(1) – (0)(-3)} – 2.{(!)(1) – (-3)(-3)} + 1.{(1)(0) – (-3)(1)}

= 2.(1-0) – 2.(1-9) + 1(0+3)

= 2.1 + 2.8 + 1.3 = 2 + 16 + 3

= 21

Determinan $\nabla z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$

$= 2.\{(9-2)(0) – (-5)(1)\} – 3\{(1)(0) – (-3)(1)\} + 2\{(1)(-5) – (-3)(-2)\}$

$= 2(0+5) – 3(0+3) + 2(-5-6)$

$= 10 – 9 – 22 = -21$