PERSAMAAN DIFERENSIAL (PD)

A. PENGERTIAN

Persamaan yang mengandung variabel dan beberapa fungsi turunan terhadap variabel tersebut.

CONTOH :

$\frac{dy}{dx} + 5x - 5 = 0 \longrightarrow$ disebut PD orde I

$\frac{d^2y}{dx^2} + 6x + 7 = 0 \longrightarrow$ disebut PD orde II

B. PEMBENTUKAN PERSAMAAN DEFERENSIAL

Contoh (1) : Y = A.Sin x + B cos x $\longrightarrow$ Bentuklah PD nya.

A dan B konstanta sembarang.

Jawab : $\frac{dy}{dx}$ = A. cos x - B sin x

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = - A Sin x - B cos x

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = - (A Sin x + B cos x)

Jadi $\frac{d^2y}{dx^2}$ = - y atau

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Contoh 2 :

Bentuklah persamaan Deferensial dari fungsi : $y = x + \dfrac{A}{x}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

jika $\quad y = x + \dfrac{A}{x}$ maka A = x (y-x)

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x.(y-x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{(y-x)}{x} = \frac{x-(y-x)}{x} = \frac{2x-y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x} \quad \text{atau} \quad x.\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

KESIMPULAN :

- Jika suatu persamaan terdiri dari atas 1 Konsatanta sembarang menghasilkan PD Orde I
- Jika suatu persamaan terdiri dari atas 2 konstanta sembarang menghasilkan PD Orde II

Contoh 3 : Persamaan $y = Ax^2 + Bx$ bentuk PD-nya

Jawab : $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$ ....(1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A \qquad A = 1/2\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

$A = 1/2\ \frac{d^2y}{dx^2}$ dimasukkan ke pers (1)

$$\frac{dy}{dx} = 2x.\left(1/2.\frac{d^2y}{dx^2}\right) + B$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx} + B$$

$$B = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}x$$

Harga A dan B dimasukkan ke soal

$$Y = Ax^2 + Bx$$

$$= 1/2\frac{d^2y}{dx^2}x^2 + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\ .\ x\right)x$$

$$= 1/2\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\ .\ x^2$$

$$Y = x\frac{dy}{dx} - \tfrac{1}{2}x^2\ .\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

Kesimpulan :

Persamaan diferensial Ored ke N diturunkan dari fungsi yang mempunyai N buah konstanta sembarang.

C. PEMECAHAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Prinsipnya : Menghilangkan Koefisien Deferensialnya sehingga tinggal hubungan antara y dan x nya.

Pemecahan PD dapat dilakukan dengan cara :

- Integrasi Langsung (paling mudah)
- Pemisahan Variabel
- Substitusi Y=V.X
- Persamaan Linier (Penggunaan FI)

1. PEMECAHAN DENGAN INTEGRASI LANGSUNG → dy/dx = f(x)

Contoh 1

Pecahkanlah persamaan $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$

Jawab: $Y = \int (3x^2 - 6x + 5)dx$

$Y = x^3 - 3x^2 + 5x + c$

Jawaban ini disebut dengan jawaban umum karena masih memuat unsur c (constanta). Jika sudah tidak memuat unsur c disebut dengan jawaban khusus.

Contoh 2 Pecahkanlah permaan $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$, dengan $y = 8, x = 1$

Jawab $Y = \int (2x + 4) dx$

$Y = x^2 + 4x + c$

$8 = 1 + 4 + c$

$c = 3$

Jadi $Y = x^2 + 4x + 3$ *(Jawaban Khusus)*

2. DENGAN PEMISAHAN VARIABEL→ dy/dx = f(x,y)

Contoh $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(y+1)}$,

Prinsipnya F(y), dipindah ke Ruas Kiri (ke Ruas $\frac{dy}{dx}$)

Jawab : $(y+1)\frac{dy}{dx} = 2x$

Kedua ruas di integrasikan terhadap x

$$\int (y+1)\frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int 2x.dx$$

$$\int (y+1) dy = \int 2x \,.\, dx$$

$$\left(\frac{y2}{2} + y\right) = x^2 + c$$

Bentuk Umum

$$\int f(y).dy = \int f(x).dx$$

3. PERSAMAAN HOMOGEN DENGAN SUBSTITUSI Y = v . x

Contoh : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{2x}$ → soal ini susah memisahkan Y-nya.

Jawab :

Y = v . x , *disubstitusikan ke persamaan :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3(v.x)}{2x} = \frac{x+3vx}{2x} = \frac{1+3v}{2}$$

Jadi : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+3v}{2}$ …………… persamaan (1)

Kita lihat Rumus :

Y = v . x, maka turunannya :

$\dfrac{dy}{dx} = v\,.\,1 + x\,.\,\dfrac{dv}{dx}$ ……. persamaan (2)

Catatan : Ingat rumus Y=U.V maka Y'=U.V'+V.U'

Jika persamaan (1) dimasukkan ke persamaan (2)

$$\frac{1+3v}{2} = v + x\,.\,\frac{dv}{dx}$$

$$x\,.\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} - v$$

$$x\,.\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} - \frac{2v}{2}$$

$$x\,.\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{2}$$

$\dfrac{2}{(1+v)}\cdot\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{x}$ → *Sudah dinyatakan dalam bentuk V dan X*

Kemudian masing-masing ruas diintegrasikan ke x

$$\int \left(\frac{2}{1+v} \right) \frac{dv}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int \frac{1}{x} \, . \, dx$$

$$2 \;\; \ell n(1+v) = \ell n \;\; x + c$$

Jika Constanta C diganti bentuk lain yaitu : C = ℓn A

$$2 \;\; \ell n(1+v) = \ell n \;\; x + \ell n \;\; A$$

$$\ell n\,(1+v)^2 = \ell n\,(A \, . \, x)$$

$$(1+v)^2 = A \, . \, x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

Jika

Y = v . x → V = $\frac{y}{x}$ maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^2 = A\,x$$ → apabila semua ruas dikalikan x^2 maka

$$1 + 2yx + y^2 = Ax^3$$

$$(x+y)^2 = Ax^3$$

Catatan :

Persamaan dalam soal di atas yaitu $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x}$ disebut sebagai "PERSAMAAN DEFERENSIAL HOMOGEN". Artinya X dan Y mempunyai pangkat yang derajatnya sama , yaitu 1.

4. PERSAMAAN LINIER (Penggunaan Faktor Integral)

Metode penggunaan FI ini dipakai apabila metode nomor 1-3 sulit untuk diterapkan.

Bentuk umum dari Persamaan Linier Orde Pertama adalah $\boxed{\frac{dy}{dx} + py = Q}$

Contoh1 : $x\frac{dy}{dx} + y = x^3$

Jawab :

Soal diatas dibuat menjadi berbentuk persamaan linier orde pertama

$x\frac{dy}{dx} + y = x^3$, *semua dibagi dengan x*

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ atau

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y = x^2$, persamaan ini sama dengan $\frac{dy}{dx} + p\ y = Q$

P, Q = Konstanta fungsi x

dari persamaan tsb.

Harga P = $\frac{1}{x}$

Harga Q = x^2

Rumus Faktor Integral (IF)

$$\boxed{IF = e^{\int P.dx}}$$

Karena $P = \frac{1}{x}$ maka $IF = e^{\int \frac{1}{x}.dx}$

Sehingga $IF = e^{\ell n\, x}$

Karena $e^{\ell n\, x} = x$

Maka $IF = x$

Kembali ke soal diatas

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y = x^2 \rightarrow$ semua ruas dikalikan dengan IF

$\boxed{x\ .\frac{dy}{dx} + 1\,.y = x^3}$ .... persamaan (1)

bentuk persamaan (1) tersebut sama saja dengan y = u . v

$\frac{dy}{dx} = u\,.\frac{du}{dx} + v\,.\frac{dv}{dx}$ atau $y^1 = u\,.\,v^1 + v\,.\,u^1$

Jadi harga

$$\begin{array}{cccccc} x & . & \frac{dy}{dx} & + & 1\ . & y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ u & & v^1 & + & u^1 & v \end{array}$$

dapat ditulis dengan $\frac{d(u\,.\,v)}{dx}$ atau $\boxed{\frac{d(y.x)}{dx}}$

Atau $\boxed{x.\dfrac{dy}{dx}+1.y=\dfrac{d(y.x)}{dx}}$ ………………..persamaan (2)

Jika persamaan (1) = persamaan (2)

$$\frac{d(yx)}{dx}=x^3$$

Maka $yx=\int x^3$

masing-masing ruas kemudian diintegrasikan ke x maka,

$$\int\frac{d(yx)}{dx}dx=\int x^3 dx$$

$$\int d(yx)=\int x^3 dx$$

Ingat jika $\int d(x)=x$ maka $\int d(yx)=yx$, sehingga

$$\boxed{yx=\frac{1}{4}x^4+c}$$

Jika soal diatas dikerjakan dengan menggunakan rumus FI maka akan lebih singkat :

$$\boxed{y \,.\, FI = \int Q \,.\, FI \,.\, dx}$$

Dari penyelesaian diatas diketahui $FI=x$ dan $Q=x^2$ sehingga

$$yx = \int x^2.x.dx$$ yang menghasilkan

$$\boxed{yx = \frac{1}{4}x^4 + c}$$

contoh 2 :

Pecahkanlah $x\frac{dy}{dx} - 5y = x^7$

Jawab

$x\frac{dy}{dx} - 5y = x^7$ → masing-masing dibagi x

$\frac{dy}{dx} - \frac{5y}{x} = x^6$ sudah berbentuk persamaan linier ordopertama $\frac{dy}{dx} + py = Q$

dengan $P = -\frac{5}{x}$

$Q = x^6$

Faktor Integral (FI) = $e^{\int p\,dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx}$

Dimana $\int -\frac{5}{x}dx = -\int \frac{5}{x}dx$ = -5 ln x = ln x^{-5}

Jadi (FI) = $e^{\ln(x^{-5})}$ = x^{-5} = $\frac{1}{x^5}$

Rumus Faktor integral $\boxed{y\,.\,FI = \int Q\,.\,FI\,.\,dx}$

$$y\,.\,FI = \int Q\,.\,FI\,.\,dx$$

$$y.\frac{1}{x^5} = \int x^6.\frac{1}{x^5}.dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^5} = \int x.dx$$

$$\frac{y}{x^5} = \frac{1}{2}x^2 + c$$ → jika semua ruas dikalikan x^5

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^7 + c.x^5}$$