VEKTOR

I. KOMPETENSI YANG DICAPAI

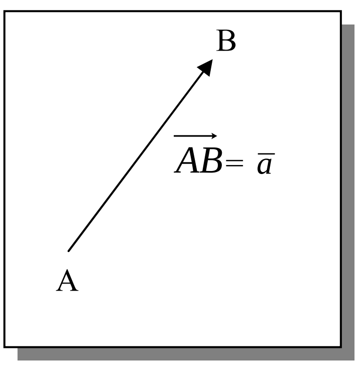
Mahasiswa dapat :

1. Menggambar vektor dengan sistem vektor satuan.
2. Menghitung perkalian vektor.
3. Menghitung penambahan vektor dengan aturan segitiga, aturan jajaran genjang, dan aturan poligon.
4. Menghitung pengurangan vektor.
5. Menghitung panjang vektor dalam ruang.

II. MATERI

A. PENGERTIAN

Vektor adalah suatu kuantita/besaran yang mempunyai besar dan arah. Secara grafis suatu vektor ditunjukkan sebagai potongan garis yang mempunyai arah. Besar atau kecilnya vektor ditentukan oleh panjang atau pendeknya potongan garis. Sedangkan arah vektor ditunjukkan dengan tanda anak panah.

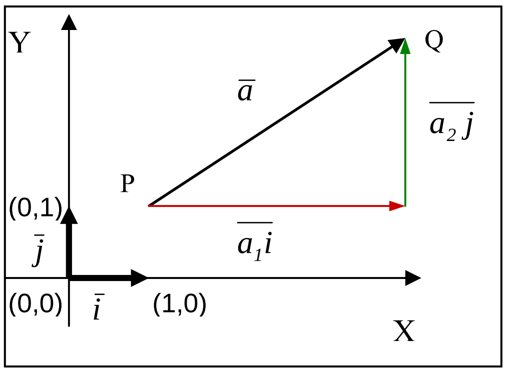


Dalam gambar vektor di samping, titik A disebut titik awal (*initial* point) dan titik P disebut titik terminal (*terminal point*). Pada gambar tersebut vektor dapat ditulis dengan berbagai cara seperti, $\overline{AB}$ $\vec{a}$, $\bar{a}$ atau a. Panjang vektor juga dapat ditulis dengan berbagai cara seperti $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$, $|\bar{a}|$, atau $|a|$.

Disini kita akan memakai simbul $\overrightarrow{AB}$ atau $\bar{a}$ untuk menyatakan vektor dan $|\overrightarrow{AB}|$ atau $|\bar{a}|$ untuk menyatakan besaran (modulus) dari vektor tersebut. Contoh vektor misalnya lintasan, kecepatan, percepatan, dan gaya.

Skalar adalah suatu kuantita yang mempunyai besaran tetapi tidak mempunyai arah. Suatu skalar adalah bilangan nyata dan secara simbolik dapat ditulis dengan huruf kecil. Operasi skalar mengikuti aturan yang sama dengan aturan operasi aljabar elementer.

B. VEKTOR SATUAN



Untuk menggambarkan suatu vektor pada sistem koordinat kartesean diperlukan vektor satuan. Vektor dari titik (0,0) sampai titik (1,0) adalah vektor satuan $\bar{i}$. Vektor dari titik (0,0) sampai titik (0,1) adalah vektor satuan $\bar{j}$.

Arah vektor $\bar{i}$ positif sesuai dengan arah sumbu X positif. Arah vektor $\bar{j}$ positif sesuai dengan arah sumbu Y positif. Pada gambar disebelah ini vektor $\bar{a}$ dengan titik awal P dan titik akhir Q diuraikan menjadi dua vektor yaitu vektor $\overline{a_1 i}$ dan $\overline{a_2 j}$. Vektor $\overline{a_1}$ dan $\overline{a_2}$ disebut komponen vektor $\bar{a}$. Besaran $\overline{a_1}$ dan $\overline{a_2}$ disebut komponen skalar $\bar{a}$. Secara simbolis vektor $\bar{a}$ dan komponennya ditulis $\bar{a}$ = $\overline{a_1 i} + \overline{a_2 j}$

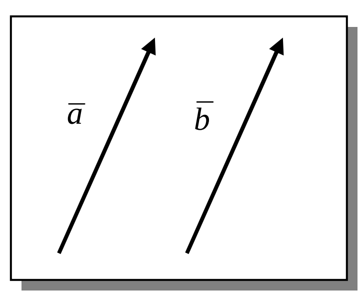
C. ALJABAR VEKTOR

Aljabar vektor adalah operasi pada dua atau lebih dari vektor yang meliputi penambahan, pengurangan dan perkalian. Operasi vektor dapat dilakukan melalui komponen-komponen skalarnya.

1. Kesamaan Dua vektor

Dua vektor dikatakan sama apabila panjang serta arahnya sama.

$\bar{a} = \bar{b} \rightarrow$ jika $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ dan arah $\bar{a}$ = arah $\bar{b}$

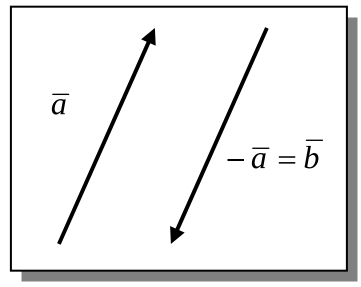


2. Vektor Negatif

Vektor $-\overline{a}$ mempunyai ukuran sama dengan vektor $\overline{a}$ tetapi arahnya berlawanan.

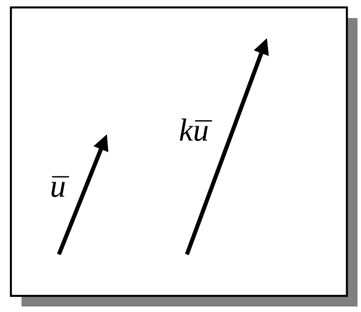
Jika vektor $\overline{a} = -\ \overline{b}$ maka $|\,\overline{a}\,| = |-\overline{b}\,|$.

Vektor negatif sering disebut sebagai *vektor invers*.



3. Perkalian Vektor dengan Skalar

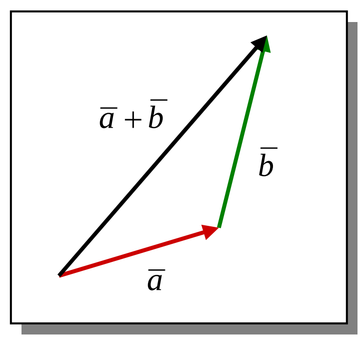
Jika k bilangan real yang positif, maka $k\overline{u}$ adalah vektor yang panjangnya $k\ |\overline{u}\,|$ dan mempunyai arah yang sama dengan $\overline{u}$. Sedangkan $-k\overline{u}$ adalah vektor yang panjangnya $k\,|\,\overline{u}\,|$ tetapi arah berlawanan dengan $\overline{u}$.



4. Penjumlahan Vektor

a) Aturan Segitiga

Perhatikan gambar di samping. Jika $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ mewakili $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ maka $\overrightarrow{AC}$ dikatakan penjumlahan vektor $\overline{a} + \overline{b}$.



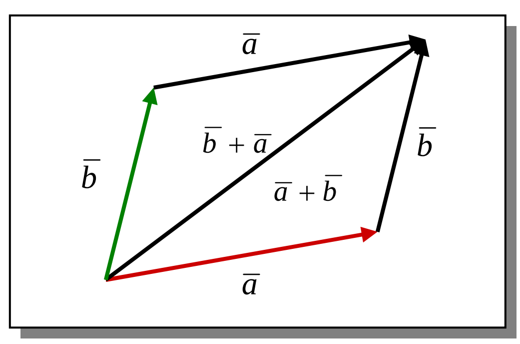
b) Aturan Jajaran Genjang

$\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{DC}$ mewakili vektor $\overline{a}$

$\overrightarrow{BC}$ dan $\overrightarrow{AD}$ mewakili vektor $\overline{b}$,

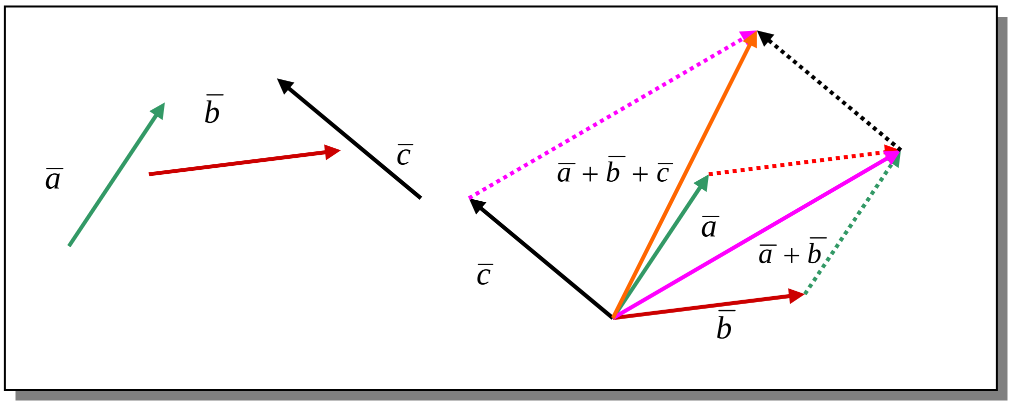
maka $\overrightarrow{AC} = \overline{a} + \overline{b}$

atau $\overrightarrow{AC} = \overline{b} + \overline{a}$.



c) Aturan Polygon

Penjumlahan tiga vektor atau lebih dapat dilakukan dengan menggunakan *aturan poligon*.

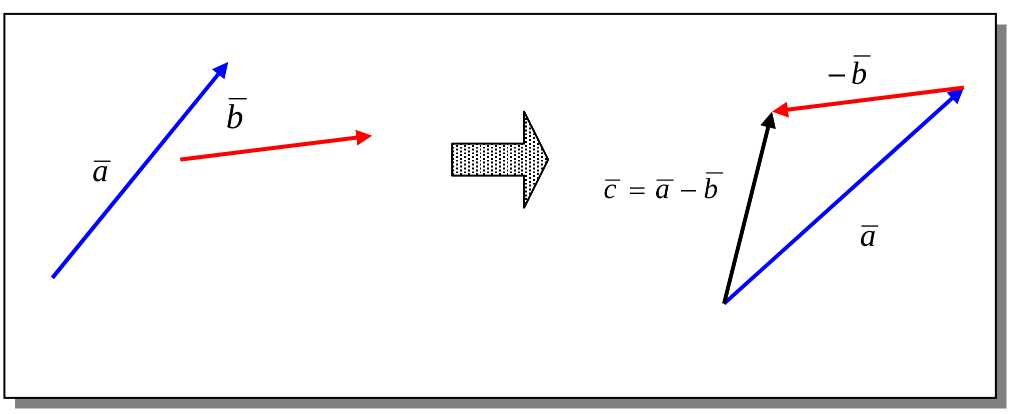


5. Selisih Dua Vektor

Selisih dua arah vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$, dinyatakan sebagai $\overline{a} - \overline{b}$, dapat dipandang sebagai penjumlahan vektor $\overline{a}$ dengan invers vektor $\overline{b}$ yaitu vektor $-\overline{b}$ **.**

Misalkan $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$ maka $\overline{c} = \overline{a}$ **+(**$-\overline{b}$ **)**

Secara diagram selisih dua vektor tersebut seperti gambar berikut.



6. Vektor Nol

Jika vektor **a** = **b** maka **a** – **b** = **0**. **0** disebut vektor nol. Vektor nol tidak mempunyai besar dan arahnya tak tentu.

Dalam aljabar vektor, misalkan vektor $\bar{a} = \overline{a_1 i} + \overline{a_2 j}$ dan vektor $\bar{b} = \overline{b_1 i} + \overline{b_2 j}$ maka berlaku aturan :

a). $\bar{a} = \bar{b}$ jika dan hanya jika $\overline{a_1 i} = \overline{b_1 i}$ dan $\overline{a_2 j} = \overline{b_2 j}$

b). m. $\bar{a}$ = m. $\overline{a_1 i}$ + m. $\overline{a_2 j}$ untuk m suatu skalar

c). $\bar{a} + \bar{b} = (\overline{a_1} + \overline{b_1})\, i + (\overline{a_2} + \overline{b_2})\, j$

d). $\bar{a} - \bar{b} = (\overline{a_1} - \overline{b_1})\, i + (\overline{a_2} - \overline{b_2})\, j$

e). $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ jika $\bar{a} = 0$ atau $\bar{b} = 0$ atau $\bar{a}$ tegak lurus dengan $\bar{b}$

f). i . i = j . j = 1 dan i . j = 0

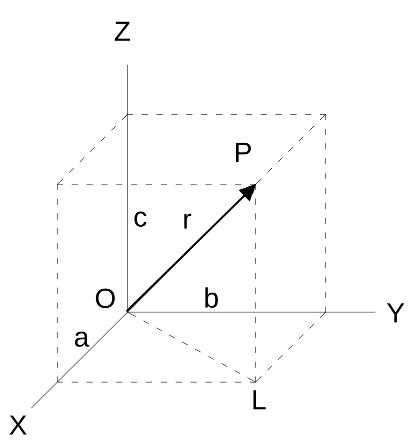
g). $\bar{a} \cdot \bar{b} = (\overline{a_1 i} + \overline{a_2 j}) \cdot (\overline{b_1 i} + \overline{b_2 j}) = \boxed{\overline{a_1} \cdot \overline{b_1} + \overline{a_2} \cdot \overline{b_2}}$

h). $|\bar{a}| = \sqrt{\overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2}$

i). $\propto = \text{arc tan}\,(a_2 / a_1)$

j). $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\gamma$

D. VEKTOR DALAM RUANG TIGA DIMENSI



Vektor $\overrightarrow{OP}$ disefinisikan oleh komponen-komponenya :

$\bar{a}$ sepanjang OX

$\bar{b}$ sepanjang OY

$\bar{c}$ sepanjang OZ

Misalkan $\bar{i}$ = vektor satuan dalam arah OX
$\bar{j}$ = vektor satuan dalam arah OY
$\bar{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ

maka :

$\overrightarrow{OP} = \overline{ai} + \overline{bj} + \overline{ck}$

$OL^2 = a^2 + b^2$ dan $OP^2 = OL^2 + c^2$

$OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$ jadi $\bar{r} = \overline{ai} + \overline{bj} + \overline{ck}$

Contoh penyelesaian soal :

1. Diketahui vektor $\bar{a}$ = 3i + 4j dan vektor $\bar{b}$ = 2i + j. Hitunglah harga-harga : $\bar{a}$ + $\bar{b}$; $\bar{b} + \bar{a}$; $\bar{a} - \bar{b}$; $\bar{b} - \bar{a}$; $\bar{a} \cdot \bar{b}$; sudut $\bar{a}$; sudut $\bar{b}$; $\bar{a} . \bar{b}$ dan $\bar{b} . \bar{a}$.

   Jawab :

   Dari vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ tersebut dapat diketahui bahwa $\overline{a_1} = 3$; $\overline{a_2} = 4$; $\overline{b_1} = 2$ dan $\overline{b_2} = 1$, sehingga diperoleh :

   a). $\bar{a} + \bar{b} = (\overline{a_1} + \overline{b_1})\, i + (\overline{a_2} + \overline{b_2})\, j$ = (3 + 2) i + (4 + 1) j = 5i + 5j

   b). $\bar{b} + \bar{a} = (\overline{b_1} + \overline{a_1})\, i + (\overline{b_2} + \overline{a_2})\, j$ = (2 + 3) i + (1 + 4) j = 5i + 5j

   c). $\bar{a} - \bar{b} = (\overline{a_1} - \overline{b_1})\, i + (\overline{a_2} - \overline{b_2})\, j$ = (3 – 2) i + (4 – 1) j = i + 3 j

   d). $\bar{b} - \bar{a} = (\overline{b_1} - \overline{a_1})\, i + (\overline{b_2} - \overline{a_2})\, j$ = (2 – 3) i + (1 – 4) j = -i – 3j

   e). $|\,\bar{a}\,| = \sqrt{\overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2} = \sqrt{3^2 + 4^{\,2}} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

   f). $|\,\bar{b}\,| = \sqrt{\overline{b_1}^2 + \overline{b_2}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 = \sqrt{4} + 1} = \sqrt{5}$

   g). Sudut $\bar{a}$ adalah ∝ = arc tan ($\overline{a_2} / \overline{a_1}$) = arc tan (4/3) = 53,1301° atau ∝ = 53° 7' 48.36”

   h). Sudut $\bar{b}$ adalah ß = arc tan ($\overline{b_2} / \overline{b_1}$) = arc tan (½) = 26,565051° atau ß = 26° 33' 54,18'

   i). $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a_1} \cdot \overline{b_1} + \overline{a_2} \cdot \overline{b_2}$ = 3 . 2 + 4 . 1 = 6 + 4 = 10

   j). $\bar{b} \cdot \bar{a} = b_1 \cdot \overline{a_1} + \overline{b_2} \cdot \overline{a_2}$ = 2 . 3 + 1 . 4 = 6 + 4 = 10

   Jawaban i). dan j). dapat juga menggunakan aturan

   $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cos \gamma$.

   dalam hal ini γ adalah sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$.

   Dengan aturan tersebut diperoleh :

   $\bar{a} . \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cos \gamma = 5\sqrt{5} \cos (\propto - ß) = 5.\sqrt{5} \cos (53,13 - 26,56)$

   $= 5.\sqrt{5} \cos 26,57 = 5.\sqrt{5} . 0,894427191 = 10$

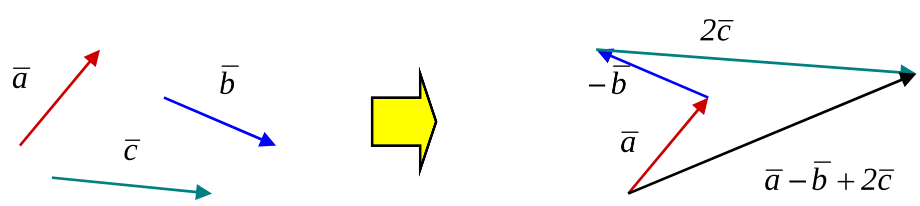
$$\overline{b}\,.\,\overline{a} = \overline{b}\,.\,\overline{a}\cos\gamma = \sqrt{5}\,.\,5\cos(\beta - \alpha)\ \sqrt{5}\,.\,5\cos(-26{,}57) = 10$$

2. Diketahui vektor-vektor $\overline{a}$, $\overline{b}$ dan $\overline{c}$ seperti di bawah ini .

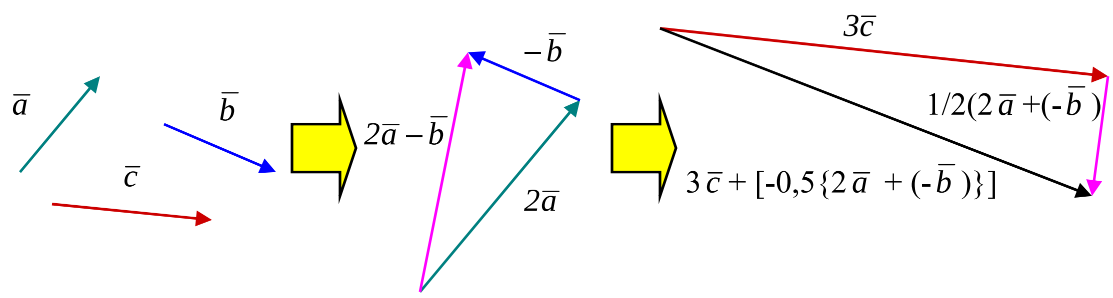
   Lukislah secara grafis operasi vektor : $\overline{a} - \overline{b} + 2.\overline{c}$ dan $3\overline{c} - 0{,}5(2\overline{a} - \overline{b})$.

   Jawab :

   $\overline{a} - \overline{b} + 2.\overline{c} = \overline{a} + (-\overline{b}) + 2\,.\,\overline{c}$



$3\overline{c} - 0{,}5(2\overline{a} - \overline{b}) = 3\overline{c} + [-0{,}5\{2\overline{a} + (-\overline{b})\}]$



Soal-soal vektor :

1. Gambarlah vektor-vektor dibawah ini pada koordinat kartesean.

   a). $\bar{a}$ = 4i+5j b). $\bar{b}$ = -4i+5j c). $\bar{c}$ = -4i–5j d). $\bar{d}$ = 4i – 5j

2. Gambarlah dan tuliskan dalam bentuk vektor $\overline{ai}+\overline{bj}$ yang memiliki ketentuan sebagai berikut :

   a. Dari titik sumbu (0 , 0) ke titik (2 ; -3)
   b. Dari titik (2 ; 3) ke titik (4 ; 2)
   c. Mempunyai besar 6 dengan arah 150°

3. Diketahui vektor $\bar{a}$ = 1,5 i + $\sqrt{3}j$ dan vektor $\bar{b}$ = $\sqrt{2}$ - 5j

   Hitunglah : a. $\bar{a}$ + $\bar{b}$ b. $\bar{a}$ – $\bar{b}$ c. $\bar{a}$. $\bar{b}$

4. Vektor $\bar{a}$ = 3i + 4j ; vektor $\bar{b}$ = 2i + 5j dan vektor $\bar{c}$ = -5i + 3j.

   Hitunglah : a. $\bar{a}$ + $\bar{b}$ b. $\bar{a}$ + $\bar{b}$ + $\bar{c}$ c. $\bar{a}$. $\bar{b}$. $\bar{c}$

5. Hitunglah kerja yang dilakukan vektor 6i + 8j pada vektor 2i + 3j.
6. tentukan besarnya sudut pada vektor-vektor i + j ; 2i – 3j dan 5j.
7. Vektor $\bar{a}$ = 1i + 5j, vektor $\bar{b}$ = -5i – 7j dan vektor $\bar{c}$ = 3i – 7j.

   Gambarlah : a. 2 . $\bar{a}$ – $\bar{b}$ + $\bar{c}$ b. $\bar{b}$ – 0.25 ($\bar{a}$ –2.$\bar{c}$) c. $\bar{a}+\bar{b}+3\bar{c}$