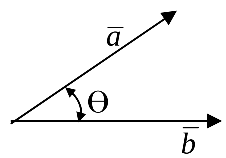
PERKALIAN SKALAR ANTARA DUA VEKTOR 2D

- Jika $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah dua buah vektor, maka perkalian skalar antara $\bar{a}$ dengan $\bar{b}$ didefinisikan sebagai $|\bar{a}| . |\bar{b}| \cos \Theta$

  Dimana $|\bar{a}|$ = besar vektor $\bar{a}$

  $|\bar{b}|$ = besar vektor $\bar{b}$

  Θ = sudut yang diapit oleh vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$



- Perkalian skalar dinyatakan dengan $\bar{a} \cdot \bar{b}$ sehingga juga disebut sebagai perkalian titik

  Jadi $\bar{a} . \bar{b} = |\bar{a}| . |\bar{b}| . \cos \Theta$

  $= |\bar{a}|$. proyeksi $\bar{b}$ pada $\bar{a}$

  atau $= |\bar{b}|$. proyeksi $\bar{a}$ pada $\bar{b}$

- Hasil dari perkalian skalar antara dua vektor berupa ***besaran skalar***

PERKALIAN SKALAR ANTARA DUA VEKTOR 3D

Jika $\bar{a} = \overline{a_1 i} + \overline{a_2 j} + \overline{a_3 k}$

$\bar{b} = \overline{b_1 i} + \overline{b_2 j} + \overline{b_3 k}$

maka

$$\bar{a} . \bar{b} = (\overline{a_1 i} + \overline{a_2 j} + \overline{a_3 k}) (\overline{b_1 i} + \overline{b_2 j} + \overline{b_3 k})$$

$$\boxed{\bar{a} . \bar{b} = \bar{a}_1 . \bar{b}_1 + \bar{a}_2 . \bar{b}_2 + \bar{a}_3 . \bar{b}_3}$$

Rumus tersebut berasal dari perhitungan sebagaiberikut :

$$\bar{a} . \bar{b} = (\overline{a_1 i} + \overline{a_2 j} + \overline{a_3 k}) (\overline{b_1 i} + \overline{b_2 j} + \overline{b_3 k})$$

$$\begin{aligned} &= (a_1 . b_1 .i.i) + (a_1 . b_2 \ .i.j) + a_1 . b_3 . i.k) \\ &\quad + (a_2 . b_1 . j.i) + (a_2 . b_2 . j.j) + (a_2 . b_3 . j. k) \\ &\quad + (a_3 . b_1 \ k.i) + (a_3 . b_2 . k.j) + (a_3 . b_3 \ k.k) \end{aligned}$$

ingat : $i . i = j . j = k . k = 1 . 1. \cos 0° = 1$ $i . j = j . k = k . i = 1 . 1. \cos 90° = 0$

Sehingga

$$\boxed{\overline{a} \,.\, \overline{b} = \overline{a}_1 \,.\, \overline{b}_1 + \overline{a}_2 \,.\, \overline{b}_2 + \overline{a}_3 \,.\, \overline{b}_3}$$

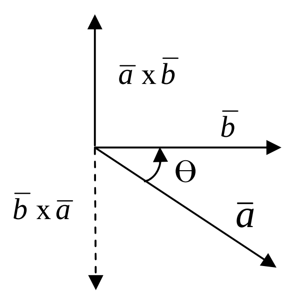
<u>Contoh soal.</u>

Jika $\overline{a}$ = 2i +3j +5k dan $\overline{b}$ = 4i +j +6k

Maka $\overline{a} \,.\, \overline{b}$ = 2.4 + 3.1 + 5.6
= 8 + 3 + 30
= 41

<u>PERKALIAN VEKTOR ANTARA DUA VEKTOR</u>

- Perkalian vektor antara $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ ditulis $\overline{a}$ **x** $\overline{b}$ sehingga juga disebut sebagai perkalian silang.
- $\overline{a}$ x $\overline{b}$ didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai besar $|\overline{a}| \,.\, |\overline{b}| \sin \Theta$
  Θ = sudut antara vektor $\overline{a}$ dengan $\overline{b}$
- Arah vektor hasil kali $\overline{a}$ x $\overline{b}$ tegak lurus dengan vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$



Catatan :
Dalam perkalian vektor (silang) membentuk sistem kanan sehingga jika $\overline{b}$ x $\overline{a}$ hasilnya tegak lurus ke bawah.

- Jika Θ = 0 maka $\overline{a}$ x $\overline{b}$ = $\overline{a}$ x $\overline{b}$ sin 0 = 0
  Jika Θ = 90 maka $\overline{a}$ x $\overline{b}$ = $\overline{a}$ x $\overline{b}$ sin 90 = $\overline{a}$ x $\overline{b}$

  Sehingga :

  i x i = j x j = k x k = 1 . 1 sin 0° = 0
  i x j = 1 . 1 sin 90 = 1

Dalam arah OZ maka i x j = k

Jadi $\boxed{\begin{array}{l} i \times j = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{array}}$ tetapi $\boxed{\begin{array}{l} j \times i = -k \\ k \times j = -i \\ i \times k = -j \end{array}}$

jika : $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$\bar{b} = a_1 i + b_2 j + b_3 k$

maka :

$$\begin{aligned}
\bar{a} \times \bar{b} &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\
&= a_1 . b_1\, i \times i + a_1 . b_2\, i \times j + a_1 . b_3\, i \times k \\
&\quad + a_2 . b_1\, j \times i + a_2 . b_2\, j \times j + a_2 . b_3\, j \times k \\
&\quad + a_3 . b_1\, k \times i + a_3 . b_2\, k \times j + a_3 . b_3\, k \times k
\end{aligned}$$

ingat rumus perkalian vektor satuan di depan, sehingga

$$\begin{aligned}
&= 0 + a_1 . b_1\, k + a_1 . b_3\, (-j) \\
&\quad + a_2 . b_1\, (-k) + 0 + a_2 . b_3\, i \\
&\quad + a_3 . b_1\, j + a_3 . b_2\, (-i) + 0 \\
&= (a_2 . b_3 - a_3 . b_2)\, i + (a_3 . b_1 - a_1 . b_3)\, j + (a_1 . b_2 - a_2 . b_1)\, k
\end{aligned}$$

Jika susunannya dibalik menjadi

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - b_2 a_3)\, i - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\, j + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\, k}$$

- Rumus diatas jika disusun dalam bentuk determinan sebegai berikut

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Bahan Diskusi:

Mengapa perkalian vektor antara dua vektor hanya ada dalam vektor 3 dimensi?

Contoh 1 :

Diketahui $\overline{p} = 2i + 4j + 3k$
$\overline{q} = i + 5j - 2k$

Hitung $\overline{p} \times \overline{q}$

Jawab :

$$\overline{p} \times \overline{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= i (- 8 - 15) - j (-4 - 3) + k (10 - 4)$$

$$= -23i + 7j + 6k$$

Contoh 2 :

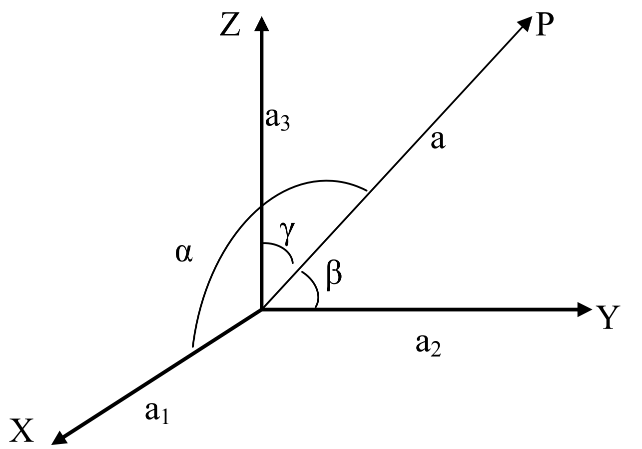
Jika $\overline{m} = 3i - 4j + 2k$

$\overline{n} = 2i + 5j - k$

Hitunglah $\overline{m} \times \overline{n}$

SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

(Dengan cosinus arah)



Misal $\overrightarrow{OP} = \bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ maka $a = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$

Maka : $\dfrac{a_1}{a} = \cos \propto = l$

$\dfrac{a_2}{a} = \cos \beta = m$

$\dfrac{a_3}{a} = \cos \gamma = n$

[l ,m, n] disebut cosinus arah vektor $\overrightarrow{OP}$

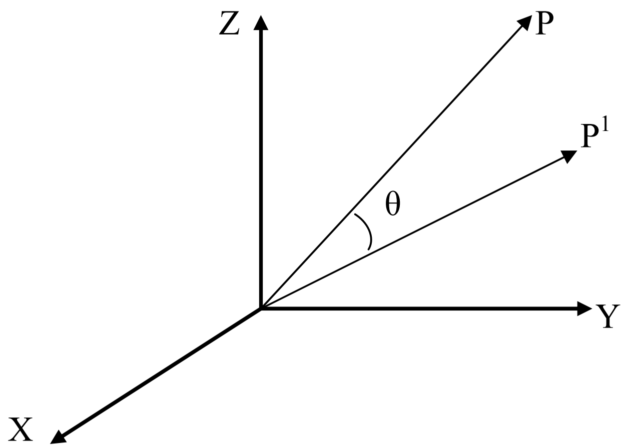
Contoh 1 :

Tentukan cosinus arah vektor $\bar{a} = 3i - 2j + 6k$

Jawab : $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 6$

$a = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

$l = \dfrac{a_1}{a} = 3/7$; $m = \dfrac{a_2}{a} = -2/7$; $n = \dfrac{a_3}{a} = 6/7$



Jika :
Cosinus arah $\bar{p}$ adalah [l,m,n]
Cosinus arah p^1 adalah [1′,m′,n′]

Maka :
Cos $\Theta = l.l^1 + m.m^1 + n.n^1$

Contoh 2 :

Jika cosinus arah vektor $\bar{a}$ adalah [l, m, n] = [½ , 0,3, -0,4]

Cosinus arah vektor $\bar{b}$ adalah [l1,m1,n1] = [0,25, 0,6, 0,2]

Maka sudut antara vektor $\bar{a}$ dengan $\bar{b}$ adalah

Cos $\Theta = l.l^1 + m.m^1 + n.n^1$
= (1/2)(0,25) + (0,3)(0,6) +(-0,4)(0,2)
=0,125 + 0,18 – 0,08
= 0,225

Sehingga
Θ = arc cos 0,225
Θ = 77°

Soal :

Diketahui vektor $a = 5i + 4j + 2k$

$b = 4i - 5j + 3k$

$c = 2i - j - 2k$

Hitunglah :

a) sudut antara vektor a dengan vektor b
b) sudut antara vektor b dengan vektor c
c) sudut antara vektor a dengan vektor c