

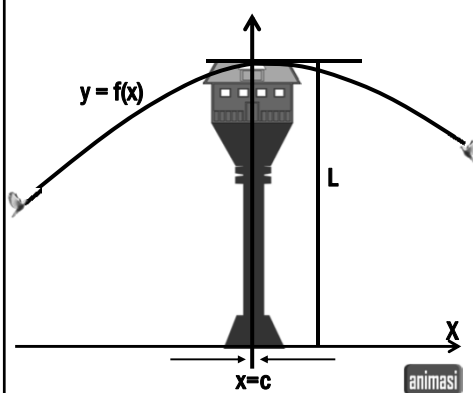
# *limit*

Disarikan dari Malatuni 2007

**Topik Bahasan**  
**Penggunaan Konsep Limit Fungsi**

# MATERI

- A. Pengertian Limit
- B. Definisi Limit
- C. Limit Terhingga
- D. Limit Tak Terhingga
- E. Menentukan Limit Fungsi Aljabar
- F. Teorema Limit



Ditulis:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

## A. Pengertian Limit

Amati arah terbang dua ekor burung menuju sangkar dari arah yang berbeda.

Jika kita aplikasikan dalam bentuk matematis (kalkulus) maka:

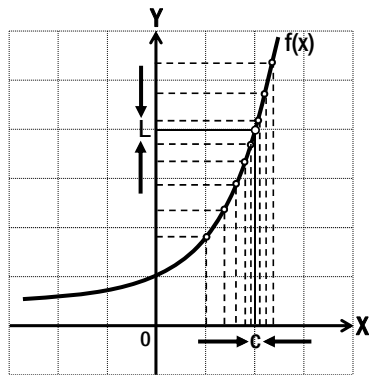
Tiang sangkar sebagai garis  $x = c$ ;

Jejak terbang burung identik dengan grafik fungsi  $y = f(x)$ ;

Jarak kedua ekor burung semakin dekat ke sangkar atau **mendekati c**;

Ketinggian burung pada saat tiba dalam sangkar misalkan L;





animasi

Jika  $x$  mendekati  $c$  baik dari kiri maupun dari kanan maka  $f(x)$  akan semakin mendekati  $L$ .  
Jadi, kita peroleh:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

## B. Definisi Limit (secara intuitif)

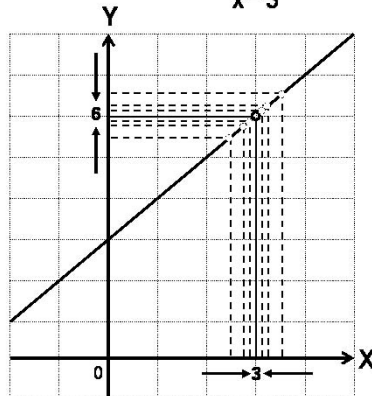
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Definisi tersebut mempunyai arti, bilamana  $x$  dekat tetapi berlainan dengan  $c$  maka  $f(x)$  dekat ke  $L$ .

Seberapa dekat?

Untuk memperjelas permasalahan ini perhatikan grafik fungsi  $f(x)$  di kolom sebelah kiri.

Grafik fungsi  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$



animasi

Dengan cara aljabar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6 \end{aligned}$$

## C. Limit Terhingga

Contoh 1:

Tentukan nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

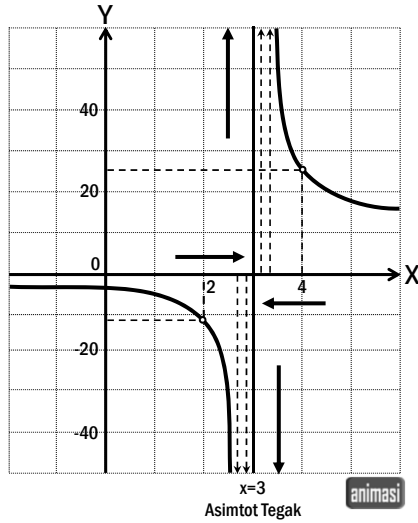
Penyelesaian:

Fungsi  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  tidak terdefinisi pada  $x = 3$ , karena diperoleh bentuk  $\frac{0}{0}$  (tak tentu).

Ambil beberapa nilai  $x$  yang mendekati 3 dari kiri maupun dari kanan.

	x mendekati 3 dari kiri	↓	x mendekati 3 dari kanan	
x	2,5   2,99   2,999   ...	3	...   3,001   3,01   3,5	
f(x)	5,5   5,99   5,999   ...	6	...   6,001   6,01   6,5	
	f(x) mendekati 6	↑	f(x) mendekati 6	

Grafik fungsi  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x - 3}$



### D. Limit Tak Terhingga

**Contoh 2:**

Tentukan nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9}{x - 3}$

**Penyelesaian:**

Fungsi  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x - 3}$  tidak terdefinisi pada  $x = 3$ , karena diperoleh bentuk  $\frac{0}{0}$  (tak tentu).

Lakukan pendekatan seperti pada contoh 1.

x mendekati 3 dari kiri				↓	x mendekati 3 dari kanan			
x	2	2,99	2,999 ...	3	...	3,001	3,01	4
f(x)	-13	-1794,01	-17994 ...	?	...	18006	1806,01	25
f(x) mendekati bilangan negatif yang sangat kecil					↑	f(x) mendekati bilangan positif yang sangat besar		

Dari gambar grafik nampak bahwa jika  $x$  mendekati 3 dari kiri maka  $f(x)$  akan mendekati bilangan negatif tak hingga.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 9}{x - 3} = -\infty$$

Sebaliknya jika  $x$  mendekati 3 dari kanan maka  $f(x)$  akan mendekati bilangan positif tak hingga.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 9}{x - 3} = +\infty$$

Karena

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 9}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 9}{x - 3}$$

maka nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9}{x - 3} \text{ tidak ada}$$

MATERI EVALUASI REFERENSI HELP | ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷

**Contoh 3:**  
 Bagaimana dengan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$  ?

**Penyelesaian:**  
 Dengan pendekatan nilai x positif tanpa batas ( $+\infty$ ) dan negatif tanpa batas ( $-\infty$ ). Lihat tabel dan grafik.

Kita peroleh nilai:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

x mendekati bilangan negatif yang sangat besar						x mendekati bilangan positif yang sangat besar								
x	$-\infty$	...	-1.000.000	-100.000	-10.000	-1.000	-100	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	...	$+\infty$
f(x)	0	...	-0,000001	-0,00001	-0,0001	-0,001	-0,01	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	...	0
f(x) semakin mendekati nol (0)							f(x) semakin mendekati nol (0)							

animasi

MATERI EVALUASI REFERENSI HELP | ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷

**Flowchart untuk menghitung nilai:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$**

```

      graph TD
      Start([Start]) --> Rational{Rasional?}
      Rational -- Ya --> Divide[Bagi dengan pangkat tertinggi]
      Rational -- Tidak --> Rationalize[Rasionalkan/kalikan akar sekawan kemudian bagi pangkat tertinggi]
      Divide --> Hasil[/Hasil/]
      Rationalize --> Hasil
      Hasil --> Stop([Stop])
    
```

**E. Menentukan Limit Fungsi Aljabar**

**Flowchart untuk menghitung nilai:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$**

```

      graph TD
      Start([Start]) --> Substitute[Substitusi x = c]
      Substitute --> Check{Bentuk tak tentu?}
      Check -- Ya --> Factor[Lakukan pemfaktoran atau rasionalkan bentuk akar]
      Check -- Tidak --> Continue[Lanjutkan Hitung]
      Factor --> Hasil[/Hasil/]
      Continue --> Hasil
      Hasil --> Stop([Stop])
    
```

animasi

**Contoh 4:**

Tentukan nilai dari:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x + 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x})$

**Penyelesaian:**

Untuk soal (a) dan (b) jika dilakukan substitusi akan diperoleh bentuk tak tentu  $\frac{0}{0}$

Sehingga,

a) Lakukan pemfaktoran

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 \\ &= 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

b) Rasionalkan bentuk akar

Kalikan akar sekawan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}} \times \frac{2 + \sqrt{4 - x}}{2 + \sqrt{4 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4 - x})}{4 + 2\sqrt{4 - x} - 2\sqrt{4 - x} - (4 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4 - x})}{4 - 4 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{4 - x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 + \sqrt{4 - x} = 2 + \sqrt{4 - 0} = 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}} &= 4 \end{aligned}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x + 3}$  adalah fungsi rasional. Mengapa?

Karena fungsi rasional maka langsung bagi pangkat tertinggi ( $x^2$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \\ &= \frac{3 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x + 3} = \frac{3}{2}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x})$  bukan fungsi rasional. Mengapa?

Rasionalkan dengan cara kalikan akar sekawan, selanjutnya bagi pangkat tertinggi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) &= \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4x)}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} \\ &= \frac{-4}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) = -2$$

## F. Teorema Limit

Andaikan  $n$  bilangan bulat positif,  $k$  konstanta,  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang mempunyai limit di  $c$ , maka:

- 1  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- 2  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- 3  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 4  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 5  $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- 6  $\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$$

dimana:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ ; utk  $n$  genap

Kita lihat contoh penerapannya!

### Contoh 5:

Tentukan nilai dari:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7x - 4)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} \right)$

Penyelesaian:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7x - 4) = \lim_{x \rightarrow 1} 7x - \lim_{x \rightarrow 1} 4$

$$= 7 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 4$$

$$= 7(1) - 4$$

$$= 3$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

Teorema 3

Teorema 5



b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x^2 + 1}}$

Teorema 3  $\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

Teorema 3  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

Teorema 3  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1}}$$

$$= \frac{2^2 + 3(2) - 2}{\sqrt{2(2)^2 + 1}}$$

$$= \frac{4 + 6 - 2}{\sqrt{8 + 1}}$$

$$= \frac{8}{3}$$




## EVALUASI

Limit Terhingga 

Limit Tak Terhingga 

Penggunaan Teorema Limit 

Penerapan Limit pada Bidang Lain 

“Klik pada tombol untuk memilih soal”



1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \dots$

- a -2 ☺ Benar  
 b -1 ☹ Belum Benar  
 c 0 ☹ Belum Benar  
 d 2 ☹ Belum Benar  
 e  $\infty$  ☹ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: a

Cocokan Jawaban? 

### Pembahasan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\ &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \dots$

- a 2 ☹ Belum Benar  
 b 3 ☹ Belum Benar  
 c 4 ☹ Belum Benar  
 d 5 ☺ Benar  
 e 6 ☹ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: d

Cocokan Jawaban? 

### Pembahasan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 4} = \dots$

- a -4 ☹️ Belum Benar
- b -3 ☹️ Belum Benar
- c 0 😊 Benar
- d 3 ☹️ Belum Benar
- e 4 ☹️ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: **C**

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} \quad \text{Pasionalkan bertukar akar} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)\sqrt{x} + 4}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)(x - 4)\sqrt{x} + 4}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4)\sqrt{x} - 4 \\ &= (4 + 4)\sqrt{4} - 4 \\ &= 8 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 4} = 0$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \dots$

- a -3 ☹️ Belum Benar
- b -2 ☹️ Belum Benar
- c -1 ☹️ Belum Benar
- d 0 ☹️ Belum Benar
- e 1 😊 Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: **e**

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \dots \quad \text{Kalikan akar sekawan} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

5.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \dots$

- a  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  😊 Benar  
 b  $\frac{1}{3}\sqrt{x}$  😞 Belum Benar  
 c  $\frac{2}{3}\sqrt{x}$  😞 Belum Benar  
 d  $2\sqrt{x}$  😞 Belum Benar  
 e  $\sqrt{2x}$  😞 Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban:  a

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \dots && \text{Kalikan akar sekawan} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \dots$

- a  $\frac{2}{3}$  😞 Belum Benar  
 b  $\frac{3}{2}$  😊 Benar  
 c  $\frac{4}{3}$  😞 Belum Benar  
 d  $\frac{7}{3}$  😞 Belum Benar  
 e  $\frac{7}{4}$  😞 Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban:  b

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \dots && \text{Kalikan akar sekawan} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{x}{x}} + x} && \text{Bagi pangkat tertinggi} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + 1} + 1} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{1+0+1} + 1} = \frac{3}{2} \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

**Pembahasan**

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}) = \dots$

- a -6 ☹️ Belum Benar
- b -4 ☹️ Belum Benar
- c -3 😊 Benar
- d -2 ☹️ Belum Benar
- e -1 ☹️ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: **C**

Cocokan Jawaban?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}) &= \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}) \times \frac{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \quad \text{Kalikan akar sekawan} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 4x) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x \left( \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x^2} + \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}}} \right)} \quad \text{Bagi pangkat tertinggi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{-6}{2} = -3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}) &= -3 \end{aligned}$$

**Pembahasan**

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \dots$

- a 0 ☹️ Belum Benar
- b  $\frac{1}{4}$  ☹️ Belum Benar
- c  $\frac{1}{3}$  ☹️ Belum Benar
- d  $\frac{1}{2}$  😊 Benar
- e 2 ☹️ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: **d**

Cocokan Jawaban?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \quad \text{Kalikan akar sekawan} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2} + \frac{x}{x}}} \quad \text{Bagi pangkat tertinggi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right) = \dots$

- a 1 ☺ Benar
- b 2 ☹ Belum Benar
- c 3 ☹ Belum Benar
- d 9 ☹ Belum Benar
- e ∞ ☹ Belum Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: a

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right) = \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x(x+1) - 2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x - 2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Bagi pangkat tertinggi

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right) = 1$$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 6}{x^3 + x^2 - x + 2} = \dots$

- a -3 ☹ Belum Benar
- b -2 ☹ Belum Benar
- c -1 ☹ Belum Benar
- d 0 ☹ Belum Benar
- e ∞ ☺ Benar

Klik pada pilihan (a - e) untuk memilih jawaban

Kunci Jawaban: e

Cocokan Jawaban?

### Pembahasan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 6}{x^3 + x^2 - x + 2} = \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} + \frac{6}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}$$

Bagi pangkat tertinggi

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}$$

$$= \frac{3-0+0}{0+0-0+0}$$

$$= \frac{3}{0} = \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 6}{x^3 + x^2 - x + 2} \text{ (tidak ada)}$$



1. Dengan menggunakan teorema limit hitunglah nilai dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5)$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$  buktikan dengan teorema limit bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)[f(x)+3]} = -6$

### Pembahasan

1a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right) = \dots$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} \right) - \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x+3}{x} \right)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2}{\lim_{x \rightarrow 2} 3x+1} - \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x+3}{\lim_{x \rightarrow 2} x}$$

$$= \frac{2}{3(2)+1} - \frac{2(2)+3}{2}$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{7}{2} = -\frac{45}{14}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right) = -\frac{45}{14}$

1. Dengan menggunakan teorema limit hitunglah nilai dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5)$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$  buktikan dengan teorema limit bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)[f(x)+3]} = -6$

### Pembahasan

1b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5) = \dots$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x+4) \cdot \lim_{x \rightarrow 5} (2x-5)$$

$$= (\lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 4) \cdot (\lim_{x \rightarrow 5} 2x - \lim_{x \rightarrow 5} 5)$$

$$= (5+4) \cdot (2 \cdot 5 - 5)$$

$$= 9 \cdot 5$$

$$= 45$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5) = 45$

1. Dengan menggunakan teorema limit hitunglah nilai dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5)$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$  buktikan dengan teorema limit bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)[f(x)+3]} = -6$

### Pembahasan

Bukti:

2a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \dots$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow c} g^2(x)}$$

$$= \sqrt{[\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^2 + [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + [-1]^2}$$

$$= \sqrt{9+1}$$

$$= \sqrt{10} \quad (\text{terbukti})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$$

1. Dengan menggunakan teorema limit hitunglah nilai dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5)$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$  buktikan dengan teorema limit bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)[f(x)+3]} = -6$

### Pembahasan

Bukti:

2b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = \dots$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} (x-c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$= 3 + (c-c) \cdot (-1)$$

$$= 3 + 0 \cdot (-1)$$

$$= 3 \quad (\text{terbukti})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$$

1. Dengan menggunakan teorema limit hitunglah nilai dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{3x+1} - \frac{2x+3}{x} \right)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x+4)(2x-5)$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$  buktikan dengan teorema limit bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{10}$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x-c)g(x)] = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3] = -6$

### Pembahasan

Bukti:

2c.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3] = \dots$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow c} [f(x)+3]$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} 3 \right]$$

$$= \sqrt[3]{-1} \cdot [3+3]$$

$$= -1 \cdot [6]$$

$$= -6 \quad (\text{terbukti})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3] = -6$$

Gunakan rumus:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

- Sebuah benda bergerak selama  $t$  detik menempuh jarak  $s$  meter, ditentukan dengan rumus  $s(t) = t^2 + 2$ . Tentukan kecepatan sesaat pada  $t = 4$ .
- Sebuah perusahaan semen dalam waktu  $t$  tahun memperoleh keuntungan total sebesar  $L(t) = 1500t^2$  dollar. Berapa laju keuntungan sesaat (keuntungan marjinal) saat  $t = 5$ ?
- Berat (dalam gram) dari suatu benda uji pada saat  $t$  adalah  $w(t) = 0,1t^2 - 0,05t$ ;  $t$  diukur dalam minggu. Berapa laju pertambahan berat benda uji jika  $t = 10$  minggu?

### Pembahasan

1. Jarak:  $s(t) = t^2 + 2$ . Maka kecepatan sesaat pada  $t = 4$  adalah:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(4+h)^2 + 2] - [4^2 + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[16 + 8h + h^2 + 2] - [16 + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 8h + 18 - 18}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 8)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 8) = 8$$

Jadi, kecepatan sesaat benda adalah: 8 m/detik



Gunakan rumus:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

1. Sebuah benda bergerak selama  $t$  detik menempuh jarak  $s$  meter, ditentukan dengan rumus  $s(t) = t^2 + 2$ . Tentukan kecepatan sesaat pada  $t = 4$ .
2. Sebuah perusahaan semen dalam waktu  $t$  tahun memperoleh keuntungan total sebesar  $L(t) = 1500t^2$  dollar. Berapa laju keuntungan sesaat (keuntungan marjinal) saat  $t = 5$ ?
3. Berat (dalam gram) dari suatu benda uji pada saat  $t$  adalah  $w(t) = 0,1t^2 - 0,05t$ ;  $t$  diukur dalam minggu. Berapa laju pertambahan berat benda uji jika  $t = 10$  minggu?

## Pembahasan

2. Total untung:  $L(t) = 1500t^2$ . Maka keuntungan marjinal untuk  $t = 5$  adalah:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1500(5+h)^2] - [1500(5)^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1500(25 + 10h + h^2)] - [1500(25)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[37500 + 15000h + 1500h^2] - [37500]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1500h^2 + 15000h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1500h + 15000)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1500h + 15000) = 15000 \end{aligned}$$

Jadi, keuntungan marjinal perusahaan semen: 15000 dollar/tahun.

Gunakan rumus:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

1. Sebuah benda bergerak selama  $t$  detik menempuh jarak  $s$  meter, ditentukan dengan rumus  $s(t) = t^2 + 2$ . Tentukan kecepatan sesaat pada  $t = 4$ .
2. Sebuah perusahaan semen dalam waktu  $t$  tahun memperoleh keuntungan total sebesar  $L(t) = 1500t^2$  dollar. Berapa laju keuntungan sesaat (keuntungan marjinal) saat  $t = 5$ ?
3. Berat (dalam gram) dari suatu benda uji pada saat  $t$  adalah  $w(t) = 0,1t^2 - 0,05t$ ;  $t$  diukur dalam minggu. Berapa laju pertambahan berat benda uji jika  $t = 10$  minggu?

## Pembahasan

3. Berat benda uji:  $w(t) = 0,1t^2 - 0,05t$ . Maka laju pertambahan untuk  $t = 10$  adalah:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[0,1(10+h)^2 - 0,05(10+h)] - [0,1(10)^2 - 0,05(10)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[0,1(100 + 20h + h^2) - 0,5 - 0,05h] - [0,1(100) - 0,5]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 + 2h + 0,1h^2 - 0,5 - 0,05h - 10 + 0,5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,1h^2 + 1,95h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(0,1h + 1,95)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (0,1h + 1,95) = 0,1(0) + 1,95 = 1,95 \end{aligned}$$

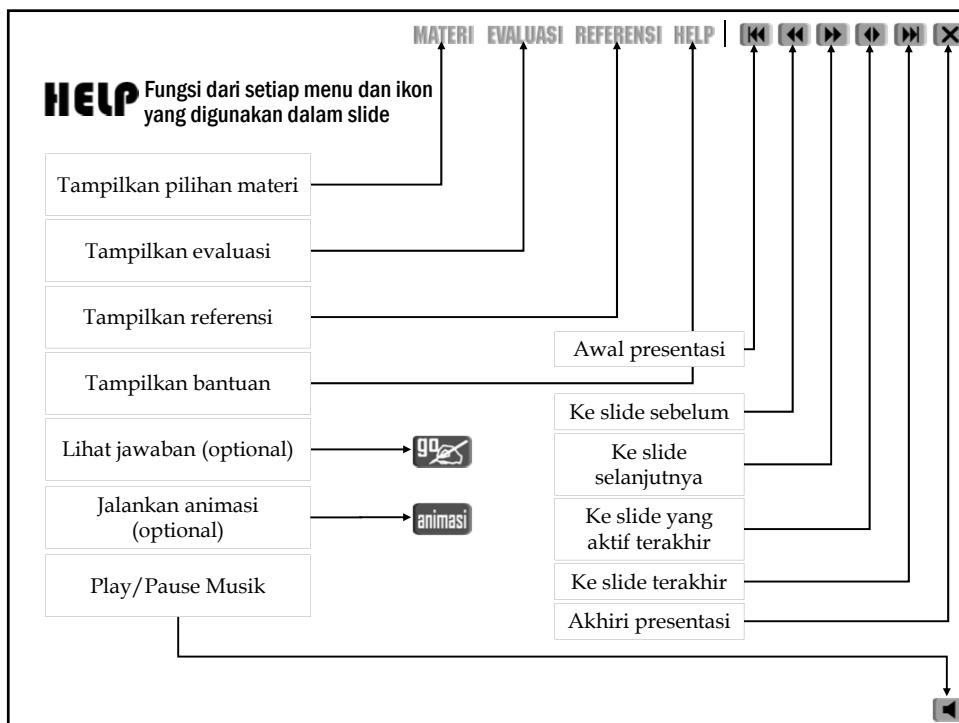
Jadi, laju pertambahan berat benda uji tersebut adalah:

1,95 gram/minggu.

MATERI EVALUASI REFERENSI HELP | ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸

## REFERENSI

- Andi Hakim Nasution dkk, *Matematika 2*, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta, 1994.
- Bernard V. Zandy dan Jonathan J. White, *CliffsQuickReview™ Calculus*, Pakar Raya, Bandung, 2004.
- B.K. Noormandiri, *Buku Pelajaran Matematika SMA*, Jilid 2A, Erlangga, Jakarta, 2004.
- Edwin J. Purcell dan Dale Varberg, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1, Erlangga, Jakarta, 1990.
- <http://www.answer.com/topik/limit-of-a-function>.
- <http://www.garizhdizain.com>.



**Anda yakin ingin keluar?**

Ya

Tidak

**Terima kasih!**

