

Kuliah PD

Pertemuan ke-3:

Pokok Bahasan: PD tak Eksak

PD $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ dikatakan tak eksak jika $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$.

PD tak eksak dapat dibawa ke PD eksak dengan mengalikan kedua ruas pada PD tersebut dengan suatu fungsi sehingga PD yang baru menjadi PD eksak.

Fungsi pengali ini disebut **faktor integral**.

Misalkan PD $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tidak eksak dan u adalah faktor integral, maka PD

$uM(x, y)dx + uN(x, y)dy = 0$ menjadi eksak sehingga $\frac{\partial uM}{\partial y} = \frac{\partial uN}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}u = \frac{\partial u}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}u \quad \dots\dots\dots(1)$$

1. Faktor integral u adalah fungsi x saja.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$0M + u \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{du}{dx} + u \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N \frac{du}{dx} = u \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

Variabel dipisahkan menjadi

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx$$

$$\ln|u| = \int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx$$

$u = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx}$ adalah faktor integral fungsi dari x saja.

2. Faktor integral u adalah fungsi dari y saja.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \dots\dots\dots(3)$$

Dari (1) dan (3) diperoleh

$$M \frac{du}{dy} + u \frac{\partial M}{\partial y} = 0 + u \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M \frac{du}{dy} = u \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Variabel dipisahkan menjadi

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy$$

$$\ln|u| = \int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy} \text{ adalah faktor integral fungsi dari y saja.}$$

Contoh. Selesaikan PD berikut:

1. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y. \text{ Jadi PD tersebut PD tak eksak.}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 4y = 2(x + 2y) \text{ dan } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{2(x + 2y)}{x(x + 2y)} = \frac{2}{x} \text{ fungsi dari x saja.}$$

Faktor integralnya adalah $u = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx}$

$$u = e^{\int \frac{2}{x} dx} = u = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Kalikan PD semula dengan $u = x^2$, maka diperoleh

$$x^2(4xy + 3y^2 - x)dx + x^3(x + 2y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + (x^4 + 2x^3y)dy = 0$$

Dengan $M(x, y) = 4x^3y + 3x^2y^2 - x^3$ dan $N(x, y) = x^4 + 2x^3y$

selanjutnya $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 + 6x^2y = \frac{\partial N}{\partial x}$. Jadi PD terakhir PD eksak.

Misalkan $F(x,y) = c$ adalah PU dari PD eksak $(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + (x^4 + 2x^3y)dy = 0$

$$\begin{aligned} \text{Maka } F(x,y) &= \int (x^4 + 2x^3y)dy + g(x) \\ &= x^4y + x^3y^2 + g(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \text{ maka } 4x^3y + 3x^2y^2 + g'(x) = 4x^3y + 3x^2y^2 - x^3 \text{ sehingga } g = \int -x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4.$$

Jadi PUnya adalah $x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 = c$.

$$2. y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x+2y+1 \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+3y+2. \text{ Jadi PD tersebut PD tak eksak.}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -(x+y+1) \text{ dan } \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{-(x+y+1)}{y(x+y+1)} = \frac{-1}{y} \text{ fungsi dari } y \text{ saja.}$$

Faktor integralnya adalah $u = e^{-\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy}$

$$\text{Maka } u = e^{\int \frac{1}{y} dy} = u = e^{\ln y} = y.$$

Kalikan PD tersebut dengan y , maka diperoleh

$$y^2(x+y+1)dx + xy(x+3y+2)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$$

Dengan $M(x,y) = xy^2 + y^3 + y^2$ dan $N(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$.

Dapat ditunjukkan bahwa PD terakhir ini PD eksak. Misalkan PUnya adalah $F(x,y) = c$,

$$\begin{aligned} \text{maka } F(x,y) &= \int (xy^2 + y^3 + y^2)dx + g(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + g'(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y), \text{ maka } x^2y + 3xy^2 + 2xy + g'(y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy \text{ sehingga}$$

$g'(y) = 0$, maka $g(y) = c_1$ sehingga PUnya adalah

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + g'(y) = c$$

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + c_1 = c$$

$$x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2 = 2(c - c_1)$$

$$x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2 = C$$

Bentuk	Faktor integral $u(x,y)$
$ydx - xdy = 0$	$-\frac{1}{x^2}$
$ydx - xdy = 0$	$\frac{1}{y^2}$
$ydx - xdy = 0$	$-\frac{1}{xy}$
$ydx - xdy = 0$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$
$ydx + xdy = 0$	$\frac{1}{xy}$
$ydx + xdy = 0$	$\frac{1}{(xy)^n}, n > 1$
$ydx + xdy = 0$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$
$ydx + xdy = 0$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}, n > 1$
$aydx + bxdy = 0$ a, b konstan	$x^{a-1}y^{b-1}$

Latihan:

Carilah faktor integral PD tak eksak berikut ini dan selesaikan.

1. $(y+1)dx - xdy = 0$
2. $(3x^2y - x^2)dx + dy = 0$
3. $dx - 2xydy = 0$
4. $y(x+y)dx + (x+2y-1)dy = 0$
5. $(x^2 + y^2 - 1)dx + x(x-2y)dy = 0$
6. $(xy+1)dx + x(x+4y-2)dy = 0$
7. $2(2y^2 + 5xy - 2y + 4)dx + x(2x + 2y - 1)dy = 0$
8. $(x^2 + y + y^2)dx - xdy = 0$
9. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0; y(0) = 2$
10. $y' = e^{2x} + y - 1; y(0) = -3$
11. $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0; y(0) = \pi$

PR.

1. Tunjukkan bahwa jika $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) / (xM - yN) = R$ dengan R fungsi dari xy saja, maka

$M + Ny' = 0$ mempunyai faktor integral dalam bentuk $u(xy)$. Kemudian cari bentuk umum dari faktor integral tersebut.

2. Berdasarkan jawaban nomor 1, cari faktor integral dari PD berikut dan cari PUnya

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$