**SEMIGRUP BENTUK BILINEAR TERURUT PARSIAL REGULER LENGKAP DALAM BATASAN QUASI-IDEAL FUZZY**

Karyati1, Dhoriva Urwatul Wutsqa2

1,2Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

*E-mail* : [1jengkaruny@gmail.com](mailto:1jengkaruny@gmail.com), [1karyati@uny.ac.id](mailto:1karyati@uny.ac.id), [2dhoriva@yahoo.com](mailto:2dhoriva@yahoo.com)

|  |
| --- |
| ABSTRAK. Semigrup bentuk bilinear terurut parsial disebut reguler kiri (kanan) jika untuk setiap terdapat sehingga berlaku () atau berlaku (i) () dan (ii) (A) untuk setiap . Semigrup bentuk bilinear terurut parsial disebut reguler lengkap jika dan hanya jika inji bersifat reguler, reguler kiri maupun reguler kanan. Jika adalah semigrup bentuk bilinear terurut parsial dan adalah subhimpunan tak kosong dasi , maka himpunan merupakan quasi-ideal yang dibangun oleh . Jika semigrup bentuk bilinear terurut parsial dan quasi ideal fuzzy dari , maka membentuk quasi ideal fuzzy semiprima jika untuk setiap .  Dalam tulisan ini diselidiki sifat-sifat dari semigrup bentuk bilinear terurut parsial. Dalam hal ini telah diperoleh beberapa sifat tersebut: (i) Semigrup bentuk bilinear terurut parsial merupakan reguler lengkap jika dan hanya jika untuk setiap quasi ideal fuzzy dari berlaku untuk setiap . (ii) Semigrup bentuk bilinear terurut parsial merupakan reguler lengkap jika dan hanya jika untuk setiap quasi-ideal fuzzy dari adalah semiprima.  ***Kata Kunci:*** *semigrup bentuk bilinear, urutan parsial, quasi ideal fuzzy, reguler lengkap, reguler kiri, reguler kanan, semiprima* |

1. PENDAHULUAN

Istilah subhimpunan *fuzzy* dari suatu himpunan pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Rosenfeld adalah peneliti yang pertama kali memperkenalkan konsep struktur *fuzzy*. Banyak peneliti lain yang mengembangkan hasil penelitian dari Rosenfeld ini, termasukKuroki yang mendefinisikan tentang subsemigrup *fuzzy*. Beberapa penelitian terhadap struktur subsemigrup *fuzzy* telah dilakukan oleh Karyati, dkk. Di antara penelitiannya adalah tentang ideal kiri *fuzzy*, ideal kanan *fuzzy* dan ideal *fuzzy* pada semigrup beserta sifat-sifat yang melekat padanya.

Semigrup bentuk bilinear adalah semigrup yang elemen-elemennya adalah pasangan adjoin relatif terhadap pemetaan . Karyati, dkk telah menyelidiki sifat dari semigrup bentuk bilinear ini baik terkait dengan relasi biasa sampai dengan relasi *fuzzy* yang didefinisikan kepadanya.

Semigrup yang di dalamnya dilengkapi urutan parsial (*partial order*) , sedemikian sehingga () membentuk poset dan untuk setiap dengan berlaku dan , maka disebut semigrup terurut parsial. Beberapa penelitian terkait dengan semigrup terurut parsial ini telah banyak dikembangkan oleh banyak peneliti. Pendefinisian urutan parsial ini sangat berpengaruh pada definisi-definisi ideal (kiri/kanan), quasi ideal (kiri/kanan), relasi, ideal (kiri/kanan) *fuzzy*, quasi ideal (kiri/kanan) *fuzzy* yang selanjutnya akan memunculkan sifat-sifat dan teori-teori yang baru.

Semigrup bentuk bilinear terurut parsial disebut reguler kiri (kanan) jika untuk setiap terdapat sehingga berlaku () atau berlaku (i) () dan (ii) (A) untuk setiap . Semigrup bentuk bilinear terurut parsial disebut reguler lengkap jika dan hanya jika inji bersifat reguler lengkap, reguler kiri maupun reguler kanan. Jika adalah semigrup bentuk bilinear terurut parsial dan adalah subhimpunan tak kosong dasi , maka himpunan merupakan quasi-ideal yang dibangun oleh . Jika semigrup bentuk bilinear terurut parsial dan quasi ideal fuzzy dari , maka membentuk quasi ideal fuzzy semiprima jika untuk setiap .

Dalam penelitian sebelumnya telah diselidiki tentang karakteristik semigrup bentuk bilinear terurut parsial dalam batasan subhimpunan *fuzzy* yang membentuk ideal kiri *fuzzy* maupun pada ideal kanan *fuzzy,* quasi ideal *fuzzy*. Berdasarkan hasil tersebut, maka dalam tulisan ini akan diselidiki sifat dari semigrup bentuk bilinear terurut parsial reguler lengkap dalam batasan quasi-idealnya.

1. TINJAUAN PUSTAKA/RUMUSAN MASALAH

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat yang mendasari dalam pembahasan makalah ini.

* 1. **Semigrup Terurut Parsial (*po\_semigrup*)**

Semigrup merupakan struktur aljabar yang melibatkan satu operasi biner dan bersifat asosiatif. Definisi semigrup secara eksplisit diberikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1.** ([9], [10]) *Misalkan suatu himpunan tak kosong. Himpunan bersama operasi biner disebut semigrup jika:*

Misalkan adalah semigrup dan . Elemen disebut elemen regular jika terdapat sedemikian sehingga . Semigrup disebut semigrup regular jika setiap elemen merupakan elemen regular. Elemen disebut regular lengkap jika terdapat elemen sedemikian sehingga dan . Semigrup disebut semigrup regular lengkap jika setiap elemen adalah regular lengkap.

Sebelum diberikan definisi tentang semigrup terurut parsial, maka diberikan definisi suatu himpunan terurut parsial sebagai berikut:

**Definisi 2.2.** ([9], [10])*Himpunan tak kosong disebut himpunan terurut parsial jika memenuhi:*

1. *Refleksif :*
2. *Antisimetri : dan*
3. *Transitif :*  dan

Himpunan terurut parsial biasa disebut juga sebagai poset, yaitu singkatan dari *Partial Ordered Set.*. Berikut diberikan definisi selengkapnya.

**Definisi 2.3** .([12], [13]) *Misalkan suatu himpunan tak kosong. Himpunan bersama operasi biner dan disebut semigrup terurut parsial jika:*

1. *membentuk semigrup*
2. *membentuk himpunan terurut parsial (poset)*
3. *dan*

Berdasarkan definisi semigrup terurut parsial tersebut, maka definisi ideal dalam semigrup terurut parsial juga bertambah aksioma. Definisi selengkapnya adalah:

**Definisi 2.4.** ([12], [13]) *Misalkan semigrup terurut parsial, maka subhimpunan tak kosong disebut ideal dari semigrup jika:*

* 1. **Semigrup Bentuk Bilinear**

Semigrup bentuk bilinear merupakan semigrup yang mempunyai elemen-elemen khusus. Secara lengkap, pembentukan semigrup bentuk bilinear ini dijelaskan sebagai berikut:

Himpunan dan adalah himpunan semua operator linear dan . Jika , maka diperoleh subruang vektor :

dan

Elemen dikatakan pasangan adjoin dari relatif terhadap bentuk bilinear dan sebaliknya jika untuk semua dan . Selanjutnya dinotasikan himpunan sebagai berikut:

Karyati, dkk ([4], [5]) mebuktikan bahwa himpunan tersebut membentuk semigrup terhadap operasi biner berikut: . Semigrup ini selanjutnya disebut semigrup bentuk bilinear.

Berbagai sifat terkait dengan semigrup bentuk bilinear ini telah diselidiki oleh rajendran dkk ([17]), yang dilanjutkan oleh Karyati dkk ([4], [5], [6], [7], [8]). Penelitian dilanjutkan dalam versi *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear juga telah banyak dilakukan oleh Karyati, dkk.([6], [7], [8]) Penelitian tersebut meliputi sifat keregularan *fuzzy* dari semigrup bentuk bilinear maupun pendefinisian relasi Green *fuzzy* pada semigrup bentuk bilinear ini.

* 1. **Semigrup *Fuzzy***

Merujuk pada tulisan Asaad ([1]), Kandasamy ([3]), Mordeson & Malik ([16]), Shabir ([18]) dan Zimmerman ([19]), maka yang dimaksud subhimpunan *fuzzy* pada himpunan adalah suatu pemetaan dari ke , yaitu . Berikut diberikan definisi subsemigrup *fuzzy.*

**Definisi 2.5.** ([6], [7]) *Misalkan adalah semigrup. Pemetaan disebut subsemigrup fuzzy jika berlaku untuk setiap* .

**Definisi** **2.6**. ([6], [7]) *Misal adalah subsemigrup fuzzy pada semigrup , maka:*

1. *disebut ideal kiri fuzzy jika*
2. *disebut ideal kanan fuzzy jika*

*(iii) disebut ideal fuzzy jika merupakan ideal kiri fuzzy sekaligus ideal kanan fuzzy, yaitu:*

Apabila merupakan semigrup terurut parsial, maka definisi ideal kiri *fuzzy*, ideal kanan *fuzzy* dan ideal (dua sisi) *fuzzy* dari didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.7. (**[12], [13])*Misalkan semigrup* ***terurut parsial****. Subhimpunan fuzzy dari disebut* ***ideal kiri fuzzy*** *jika :*

**Definisi 2.8. (**[12], [13])*Misalkan semigrup* ***terurut parsial****. Subhimpunan fuzzy dari disebut* ***ideal kanan fuzzy*** *jika :*

* 1. **Fuzzy Quasi-Ideals**

Proposisi berikut merupaka salah satu sifat dari semigrup terurut parsial:

**Proposisi 2.1.** Jika semigrup terurut parsial dan , maka:

1. jika dan hanya jika

**Lemma 2.1.** Misalkan semigrup terurut parsial. Maka untuk setiap quasi-ideal membentuk subsemigrup dari .

**Lemma 2.2**. Semigrup terurut parsial disebut reguler jika dan hanya jika untuk setiap ideal kanan l dan setiap ideal kiri dari semigrup berlaku .

**Definisi 2. 9.** Misalkan semigrup terurut parsial. Subhimpunan fuzzy dari semigrup disebut quasi-ideal fuzzy dari jika:

**Definisi 2. 10.** Misalkan semigrup terurut parsial.. A fuzzy subset of semigroup disebut quasi-ideal fuzzy dari jika:



**Lemma 2.3**. Misalkan semigrup terurut parsial dan , maka membentuk ideal kiri (kanan) dari jika dan hanya jika fungsi karakteristik membentuk ideal kiri (kanan) fuzzy dari .

**Lemma 2.4**. Misalkan semigrup terurut parsial dan maka membentuk bi- ideal dari jika dan hanya jika fungsi karakteristik membentuk bi-ideal fuzzy dari .

**Lemma 2.5**. Let be an ordered semigroup and . Then is a quasi-ideal of if and only if the characteristics function of is a fuzzy quasi-ideal of .

1. HASIL DAN PEMBAHASAN

Semigrup terurut parsial disebut simple kiri (kanan) jika untuk setiap ideal kiri (kanan) , maka . Semigrup terurut parsial disebut simple kiri (kanan) jika dan hanya jika (*(aS]=S*) untuk setiap . Semigrup terurut parsial disebut reguler, simple kiri (kanan) jika hanya jika setiap quasi-ideal fuzzy-nya berupa fungsi konstan. Semigrup terurut parsial disebut reguler lengkap jika dan hanya jika untuk setiap atau ekuivalen dengan untuk setiap . Jika dan , maka himpunan adalah quasi-ideal yang dibangun oleh . Quasi-ideal fuzzy disebut semiprima fuzzy jika , untuk setiap .

**Theorema 3.1.** *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial merupakan semigrup reguler lengkap jika dan hanya jika untuk setiap quasi-ideal dari berlaku untuk setiap .*

**Bukti.** Misalkan semigrup bentuk bilinear terurut parsial yang reguler lengkap, suatu quasi-ideal dari semigrup dan . Diketahui membentuk reguler lengkap, maka semigrup bentuk bilinear merupakan reguler kiri sekaligus reguler kanan. Hal ini berarti dan , dan akibatnya terdapat sedemikian sehingga dan . Hal ini sama halnya menyatakan bahwa . Dengan demikian , sehingga diperoleh:

.

Jadi diperoleh .

Sebaliknya, misalkan . Quasi-ideal dari , dibangun oleh . Dengan demikian himpunan . Berdasarkan sifat fungsi karakteristik, maka merupakan quasi-ideal dari . Berdasarkan hipotesis, diperoleh:

Karena , maka dan akhirnya dipunyai . Maka atau dan untuk suatu . Jika maka . Dengan demikian ]. Jika dan , maka . Karena , maka . Jadi ]

▄

**Teorema 3.2.** *Semigrup bentuk bilinear terurut parsial reguler lengkap jika dan hanya jikasetiap quasi-ideal dari adalah semiprima.*

**Bukti.** Misalkan semigrup bentuk bilinear terurut parsial reguler lengkap dan suatu quasi-ideal dari . Selanjutnya ambil sebarang , maka . Dalam kenyataannya, karena merupakan semigrup reguler kiri sekaligus kanan, , terdapat sedemikian sehingga dan , maka . Dengan demikian , sehingga diperoleh:

.

Sebaliknya, misalkan quasi-ideal fuzzy dari sedemikian sehingga untuk setiap . Misalkan quasi-ideal dari yang dibangun oleh . Dengan demikian himpunan . Akibatnya fungsi karakteristik membentuk quasi-ideal fuzzy dari . Berdasarkan yang diketahui, maka dipenuhi:

Karena , maka dan akhirnya dipunyai . Maka atau dan untuk suatu . Jika maka . Dengan demikian ]. Jika dan , maka . Karena , maka . Jadi ]

▄

1. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bagian hasil tersebut, maka dapat disimpulakan bahwa Semigrup bentuk bilinear terurut parsial merupakan semigrup reguler lengkap jika dan hanya jika untuk setiap quasi-ideal dari berlaku untuk setiap . Hal lain yang terjadi adalah semigrup bentuk bilinear terurut parsial reguler lengkap jika dan hanya jikasetiap quasi-ideal dari adalah semiprima.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asaad,M. Group and *Fuzzy* Subgroup. *Fuzzy Sets and systems 39 , pp: 323 - 328*. 1999.

[2] Howie, J.M, *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London

[3] Kandasamy, W.B.V. (2003). *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA. 1976

[4] Karyati. *Semigrup yang Dikonstruksikan dari Bentuk Bilinear.* Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mad. Yogyakarta.2002.

[5] Karyati, Wahyuni, S. The Properties of Non-degenerate Bilinear Form. *Proceeding of SEAMS-GMU: International Conference on Mathematics and Its Applications.* 2003.

[6] Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji, Beberapa Sifat Ideal *Fuzzy* Semigrup yang Dibangun oleh Subhimpunan *Fuzzy*, *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Negeri Jember.* 2009.

[7] Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. Subsemigrup S(B) *Fuzzy*. *Prosiding Seminar Nasional PIPM, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, UNY.* 2009.

[8] Karyati, Wahyuni, S, Surodjo, B, Setiadji. The *Fuzzy* Regularity of Bilinear Form Semigroups, *Proceedings of ”The 6th SEAMS-UGM Conference 2011”.* 2012.

[9] Semigrup Bentuk Bilinear Terurut Parsial dalam Batasan Subhimpunan Fuzzy, “*Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Statistika FMIPA UNS”*. 2013

[10] Karyati, Dhoriva UW, Partial Ordered Bilinear Form Semigroups in Term of Their Fuzzy Right and Fuzzy Left Ideals , *Proceedings of “The South East Asean Conference of Mathemathics and Statistics”.*2013*.*

[11] Karyati, Dhoriva UW, The Properties of Ordered Bilinear Form Semigroup in Term of Fuzzy Quasi-Ideals, *The Proceeding of ‘International Conferences on Research, Implementation and Education on Mathematics and Sciences”*. 2014.

[12] Kehayopulu, N. Ideals and Green Relations in Ordered Semigroups, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 26, pp: 1-8.* 2005.

[13] Kehayopulu, N. Left Regular Ordered Semigroups in which the *Fuzzy* Left Ideals are Two-Sided, *International Journal of Algebra, Vol 6, no.10, pp:493-499*. 2012.

[14] Klir, G.J, Clair, U.S, Yuan, B. *Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications*. Prentice-Hall, Inc. USA. 1997.

[15] Mohanraj, G, Krishnaswamy, D dan Hema, R, On Generalized Redefined Fuzzy Prime Ideals of Ordered Semigroups}, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume X, No 10, pp: 1- 9. 2011.

[16] Mordeson, J.N, Malik, D.S, *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. 1998.

[17] Rajendran, D, Nambooripad, K.S.S, Bilinear Form and a Semigroup of Linear Transformations. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics 24, p: 609-616.* 2000.

[18] Shabir, M, Khan, A, Characterizations of Ordered Semigroups by the Properties of Their *Fuzzy* Ideals, *Computers and Mathematics with Applications, Volume 59,*pp: *539 – 549.* 2010.

[19] Zimmermann, H.J, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. USA. 1991.