

BAB I. MASALAH TRANSPORTASI KHUSUS

Pada perkuliahan pemrograman linear telah dipelajari masalah transportasi secara umum, yaitu suatu masalah pemindahan barang dari beberapa tempat asal (sumber/origin) secara langsung ke beberapa tempat tujuan (tujuan/destinasi) dengan banyaknya penawaran dan banyaknya permintaan telah ditentukan. Masalah transportasi tersebut merupakan bentuk khusus dari masalah pemrograman linear.

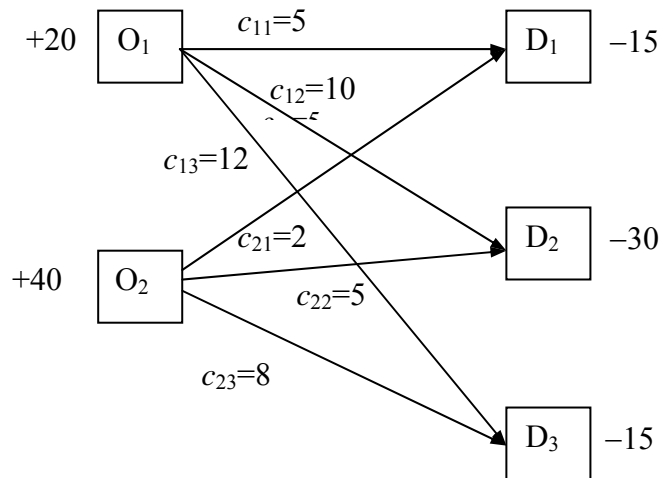
Pada masalah transportasi secara umum, dipelajari masalah meminimumkan dengan banyaknya permintaan sama dengan banyaknya penawaran, atau disebut dengan masalah transportasi meminimumkan seimbang. Dipelajari juga masalah transportasi meminimumkan dengan banyaknya permintaan lebih besar daripada banyaknya penawaran atau sebaliknya banyaknya penawaran yang lebih besar daripada banyaknya permintaan, atau disebut masalah transportasi meminimumkan tak seimbang. Demikian juga untuk masalah transportasi memaksimumkan baik seimbang maupun tidak seimbang.

Pada perkuliahan penelitian operasional ini dipelajari bentuk khusus masalah transportasi, yaitu masalah transshipment, masalah penugasan serta masalah travelling salesman problem. Masalah-masalah tersebut dikategorikan sebagai bentuk khusus dari masalah transportasi, karena pemodelan matematika untuk masalah-masalah tersebut seperti pemodelan pada masalah transportasi meminimumkan seimbang, hanya ada kekhususan di dalam permasalahan yang dicakupnya. Berikut ini akan diuraikan satu per satu masalah-masalah tersebut.

Masalah transshipment merupakan masalah transportasi atau pemindahan barang dari tempat asal ke tempat tujuan yang bertujuan meminimumkan biaya angkut totalnya. Namun pengiriman ini tidak dilakukan tidak secara langsung dari tempat asal ke tempat tujuan, melainkan melalui beberapa tempat persinggahan, baik hanya sekedar singgah untuk bongkar muat barang, maupun singgah untuk berlakunya suatu transaksi bisnis atas barang tersebut.

Perhatikan suatu masalah transportasi meminimumkan yang dapat digambarkan sebagai suatu jaringan sebagai berikut:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



Masalah transportasi tersebut merupakan masalah seimbang, karena banyaknya penawaran ($20 + 40$) sama dengan banyaknya permintaan ($15 + 30 + 15$) yaitu 60. Dengan menggunakan metode Sudut Barat Laut untuk penentuan variabel basis awal dan metode MOD1 untuk uji optimalnya, diperoleh solusi masalah transportasi tersebut, seperti dijabarkan dalam tabel optimal berikut ini :

	D ₁	D ₂	D ₃	b_i
O ₁	5	10	12	20
O ₂	2	5	8	40
a_j	15	30	15	60

Tabel telah optimal dengan solusi optimalnya adalah $(x_{11}, x_{13}, x_{22}, x_{23}) = (15, 5, 30, 10)$ dan nilai ongkos angkut total transportasinya adalah $f_{\min} = 15(5) + 5(12) + 30(5) + 10(8) = 365$.

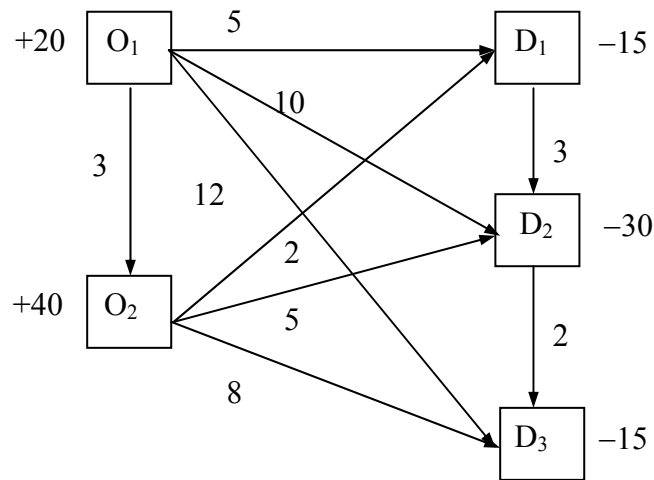
A. MASALAH TRANSSHIPMENT

Sekarang bila ternyata ada jalur-jalur pengiriman barang $O_1 \rightarrow O_2$ (antar origin), $D_1 \rightarrow D_2$, dan $D_2 \rightarrow D_3$ (antar demand), dengan ongkos-ongkos satuan yang diketahui, maka jaringan akan menjadi lain dan mungkin bisa ditemukan pola

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

angkutan yang lebih menghemat, karena mungkin saja mengangkut alokasi $D_2 \rightarrow D_3$ lebih hemat melalui (lewat/transit) di D_1 daripada langsung dari origin ke D_3 .

Masalah tersebut disebut sebagai masalah transshipment dan dapat dikembalikan ke masalah transportasi, asalkan setiap *origin* bisa berperan sebagai *destination* dan sebaliknya setiap *destination* berperan sebagai *origin*, yang digambarkan dalam skema dan tabel sebagai berikut:



Pada diagram (skema) terlihat O_1 dapat mengirimkan sejumlah barang ke O_2 , namun tidak sebaliknya, demikian juga dengan D_1 dan D_2 secara berturut-turut dapat mengirimkan barang ke D_2 dan D_3 . Sehingga dikatakan O_2 dapat menjadi origin sekaligus destinasi, sedangkan D_1 dan D_2 dapat menjadi destinasi sekaligus sebagai origin, namun bagi O_1 karena tidak dapat menerima kiriman barang, maka O_1 hanya bertindak sebagai origin saja, demikian juga dengan D_3 yang hanya bertindak sebagai destinasi saja karena hanya bisa menerima kiriman barang saja. Untuk mempermudah pemahaman masalah, diasumsikan O_1 dan D_3 secara berturut-turut juga bertindak sebagai origin sekaligus destinasi dan destinasi sekaligus sebagai origin. Sehingga masalah transshipment tersebut dapat disajikan dalam tabel masalah transshipment sebagai berikut

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

	O_1	O_2	D_1	D_2	D_3	b_i
O_1	0	3	5	10	12	
O_2	3	0	2	5	8	
D_1	5	2	0	3	M	
D_2	10	5	3	0	2	
D_3	12	8	M	2	0	
a_j						

Pada skema terlihat jalur (D_3, D_1) dan (D_1, D_3) tidak ada, sehingga $c_{ij} = M$, dengan M adalah bilangan positif yang nilainya sangat besar, mengapa?

Asumsi-asumsi Pada Masalah Transshipment

Masalah Transshipment dapat dipandang sebagai masalah transportasi standar dengan ketentuan-ketentuan sebagai berikut:

1. Semua *origin* (O_i) dan *destination* (D_j) berfungsi sebagai sumber sekaligus tujuan. $O_i \leftrightarrow O_j$, $D_i \leftrightarrow D_j$, $O_i \leftrightarrow D_j$.
2. Unit *cost* (ongkos angkut satuan) dari O_i ke O_j dan dari O_j ke O_i , dianggap sama, yaitu $c_{ij} = c_{ji}$, untuk $i \neq j$.
3. Unit *cost* dari O_i ke O_i atau D_j ke D_j dianggap nol, sebab tidak ada pemindahan barang.
4. Unit *cost* dari D_i ke D_j sama dengan unit *cost* dari D_j ke D_i , $i \neq j$.
5. Unit *cost* dari O_i ke D_j sama dengan unit *cost* dari D_j ke O_i .
6. Pada baris O_i *supply*nya sebesar

$$b_i^* = b_i + B, i = 1, 2, \dots, m,$$

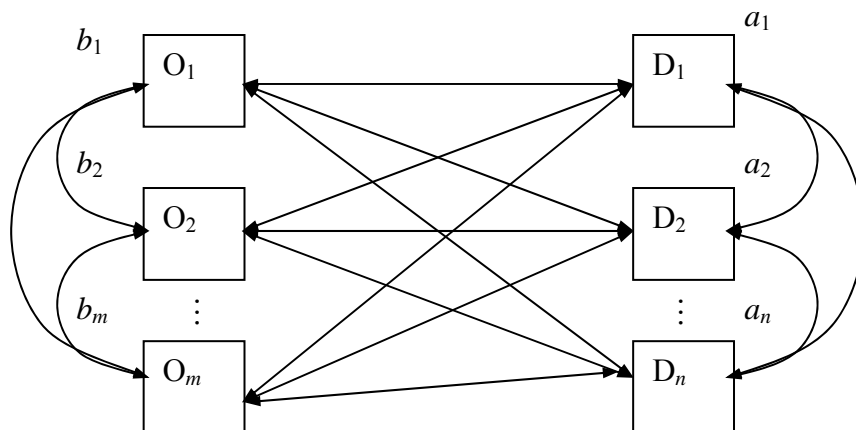
dimana

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$B = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^m b_i, & \text{untuk keadaan setimbang} \\ \text{maks} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j, \sum_{i=1}^m b_i \right\}, & \text{untuk keadaan tak setimbang.} \end{cases}$$

7. Pada baris D_j *supply*nya sebesar
 $b_j^* = B, j=1,2,\dots,n.$
8. Pada kolom O_i *demand*nya sebesar
 $a_i^* = B, i=1,2,\dots,m.$
9. Pada kolom D_j *demand*nya sebesar
 $a_j^* = a_j + B, j=1,2,\dots,n.$
10. Bila tidak ada jalur angkutan dari O_i ke D_j , maka $c_{ij} = M$, yaitu bilangan positif dengan nilai yang sangat besar.

Skema lengkap dan tabel penyajian datanya sebagai berikut:



Pemodelan matematika untuk masalah transshipment sedikit berbeda dengan pemodelan matematika masalah transportasi umum, sebab penentuan indeks untuk variabel x dan konstan c tergantung pada urutan O_i dan D_j pada soal. Seperti pada skema, urutannya adalah $O_1, O_2, \dots, O_m, D_1, D_2, \dots, D_n$, sehingga x_{11} adalah alokasi barang yang dikirimkan dari O_1 ke O_1 , sedangkan alokasi barang

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

dari O_1 ke D_1 misalnya dinotasikan dengan $x_{1(m+1)}$. Demikian pula dengan konstan c yang penulisan indeksnya mengikuti penulisan indeks pada alokasi atau variabel yang bersesuaian. Pemodelan matematika untuk masalah transshipment pada skema adalah :

Meminimumkan fungsi tujuan

$$f(x_{11}, \dots, x_{mn}) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

dengan kendala

node 1 : merupakan banyaknya alokasi yang masuk ke O_1 ditambah supply pada O_1 yang sama dengan banyaknya alokasi yang keluar O_1 .

Atau secara matematis dinyatakan dengan

$$x_{21} + x_{31} + \dots + x_{m1} + x_{(m+1)1} + \dots + x_{(m+n)1} + b_1 =$$

$$x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1m} + x_{1(m+1)} + \dots + x_{1(m+n)}.$$

Node 2 : merupakan banyaknya alokasi yang masuk ke O_2 ditambah supply pada O_2 yang sama dengan banyaknya alokasi yang keluar O_2 .

Atau secara matematis dinyatakan dengan

$$x_{12} + x_{32} + \dots + x_{m2} + x_{(m+1)2} + \dots + x_{(m+n)2} + b_2 =$$

$$x_{21} + x_{23} + \dots + x_{2m} + x_{2(m+1)} + \dots + x_{2(m+n)}.$$

Dan seterusnya, hingga node terakhir yaitu

Node $m + n$: merupakan banyaknya alokasi yang masuk ke $O_{(m+n)}$ ditambah supply pada $O_{(m+n)}$ yang sama dengan banyaknya alokasi yang keluar $O_{(m+n)}$.

Atau secara matematis dinyatakan dengan

$$x_{1(m+n)} + x_{2(m+n)} + \dots + x_{m(m+n)} + x_{(m+1)(m+n)} + \dots + x_{(m+n-1)(m+n)} + b_{(m+n)} =$$

$$x_{(m+n)1} + x_{(m+n)2} + \dots + x_{(m+n)m} + x_{(m+n)(m+1)} + \dots + x_{(m+n)(m+n-1)}.$$

Dan memenuhi $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn} \geq 0$.

Masalah transshipment tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel transshipment sebagai berikut :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Tabel Masalah Transshipment

	O ₁	O ₂	...	O ₃	D ₁	D ₂	...	D ₃	b _i
O ₁	0			b ₁ +B
O ₂		0		b ₂ +B
...		
O ₃			...	0			...		b _m +B
D ₁			...		0		...		B
D ₂			...			0	...		B
...	
D ₃			0	B
a _j	B	B		B	a ₁ +B	a ₂ +B		a _n +B	

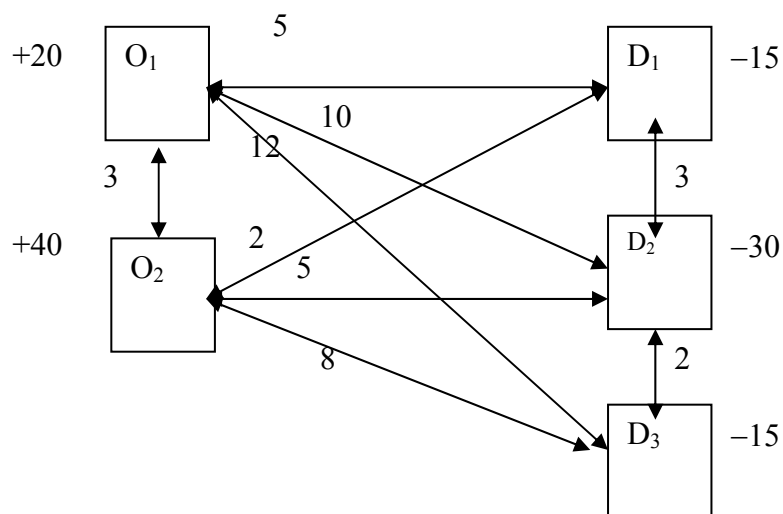
$$\sum_{i=1}^m b_i + (m+n)B = \sum_{i=1}^m a_i + (m+n)B \quad (\text{setimbang})$$

Untuk menyelesaikan masalah transshipment, karena merupakan bentuk khusus masalah transportasi, dapat menggunakan algoritma penyelesaian masalah transportasi umum, yaitu menentukan variabel basis awalnya dengan menggunakan metode Sudut Barat Laut, metode Vogel, atau metode c_{ij} Terkecil. Kemudian dilakukan uji optimum dengan menggunakan metode Stepping Stone atau metode MOD1.

Untuk memperjelas pemahaman mengenai masalah transshipment, berikut ini diberikan contoh sederhana.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 1.1.



Perhatikan skema di atas:

Skema tersebut merupakan skema masalah transshipment dengan 2 sumber dan 3 destinasi, dengan jalur-jalur penghubung dan jarak diantara sumber dan destinasi disajikan pada skema. Pada skema tersebut terlihat semua sumber juga bertindak sebagai destinasi, dan semua destinasi juga bertindak sebagai sumber. Diantara destinasi 1 dan destinasi 3 tidak ada jalur penghubung, sehingga nilai c_{ij} untuk jalur tersebut adalah suatu nilai yang sangat besar.

Dari skema diperoleh :

$b_1 = 20$, $b_2 = 40$, $a_1 = 15$, $a_2 = 30$, $a_3 = 15$, dan $B = b_1 + b_2 = 60 = a_1 + a_2 + a_3$ (masalah transshipment setimbang).

Masalah transshipment tersebut dinyatakan dalam bentuk tabel transshipment sebagai berikut :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Tabel Transshipment:

	O ₁	O ₂	D ₁	D ₂	D ₃	<i>b_i</i>
O ₁	0	3	5	10	12	80
O ₂	3	0	2	5	8	100
D ₁	5	2	0	3	M	60
D ₂	10	5	3	0	2	60
D ₃	12	8	M	2	0	60
<i>a_j</i>	60	60	75	90	75	360 / 360

Perhatikan karena merupakan masalah transshipment yang seimbang, maka:

$$b_1^* = b_1 + B = 80 \quad b_2^* = b_2 + B = 100$$

$$b_3^* = B = 60 \quad b_4^* = B = 60$$

$$b_5^* = B = 60 \quad a_1^* = B = 60$$

$$a_2^* = B = 60 \quad a_3^* = a_3 + B = 75$$

$$a_4^* = a_4 + B = 90 \quad a_5^* = a_5 + B = 75$$

Variabel basis awal diperoleh dari metode SBL sebagai berikut :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

	O ₁	O ₂	D ₁	D ₂	D ₃	b _i
O ₁	60	20				80
O ₂		40	60			100
D ₁			15	45		60
D ₂				45	15	60
D ₃					60	60
a _j	60	60	75	90	75	360

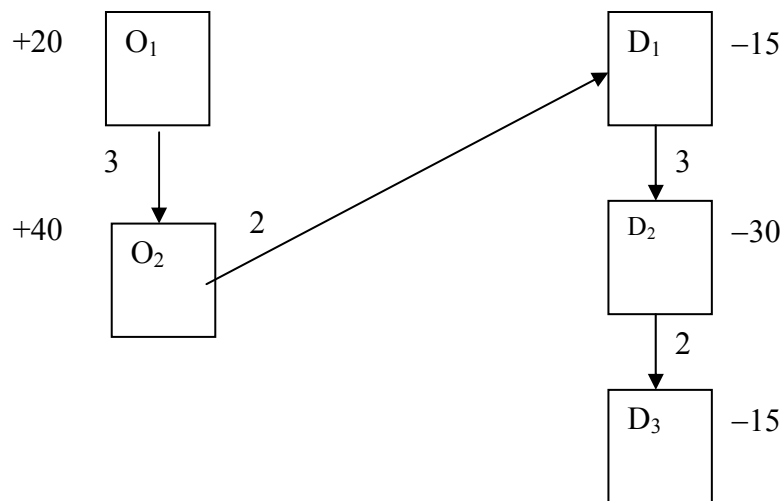
Dengan nilai $f_{\text{awal}} = 0.60 + 3.20 + 0.40 + 2.60 + 0.15 + 3.45 + 0.45 + 2.15 + 0.60$
 $= 0 + 60 + 0 + 120 + 0 + 135 + 0 + 30 + 0$
 $= 345.$

Dan uji optimum MOD1, menghasilkan :

	O ₁	O ₂	D ₁	D ₂	D ₃	b _i	u _i
O ₁	60	20				80	0
O ₂		40	60			100	-3
D ₁			15	45		60	-5
D ₂				45	15	60	-8
D ₃					60	60	-10
a _j	60	60	75	90	75	360	360
v _j	0	3	5	8	10		

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Karena $c_{ij}' \leq 0, \forall i, j$, maka tabel optimal. Dengan nilai $f_{\text{opt}} = 345$, sedikit lebih hemat ($365 - 345$) dibandingkan solusi sebelum ada jalur transshipment, dan skema transshipment optimalnya menjadi :



Sebagai bentuk khusus dari masalah transportasi, maka kejadian-kejadian khusus pada masalah transportasi juga berlaku pada masalah transshipment, kejadian-kejadian khusus tersebut adalah :

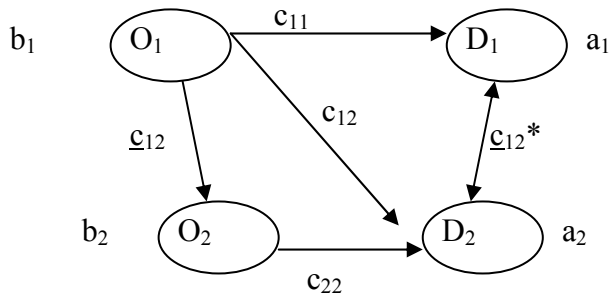
1. Masalah transshipment meminimumkan tak seimbang.
2. Masalah transshipment memaksimumkan seimbang.
3. Masalah transshipment memaksimumkan tak seimbang.

Penyelesaian untuk kejadian-kejadian khusus tersebut sama seperti penyelesaian kejadian khusus masalah transportasi.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

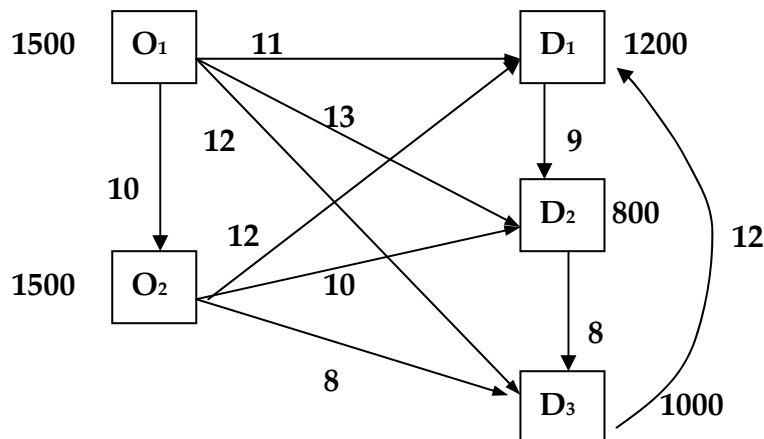
Soal-soal Latihan 1.1:

1. Diberikan diagram transportasi berikut ini:



- a. Rumuskan tabel transportasinya.
- b. Rumuskan masalah transportasinya sebagai masalah memaksimalkan.

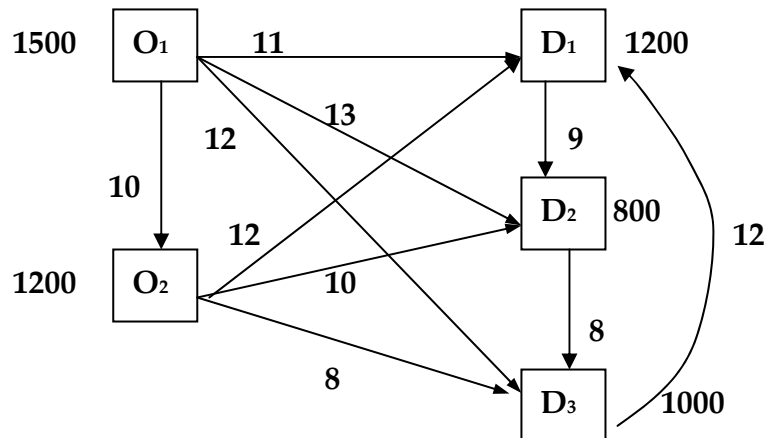
2. Diberikan diagram transportasi berikut ini :



- a. Tentukan pemodelan masalah tersebut, sebagai masalah minimum.
- b. Apa masalah yang ada pada diagram tersebut? Mengapa?
- c. Tentukan solusi optimalnya sebagai masalah minimum.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

3. Diberikan diagram transportasi berikut ini :



- Tentukan pemodelan masalah tersebut, sebagai masalah maksimum.
- Apa masalah yang ada pada diagram tersebut? Mengapa?
- Tentukan solusi optimalnya sebagai masalah maksimum.

B. MASALAH PENUGASAN (ASSIGNMENT PROBLEM)

Pada pertemuan sebelumnya telah dipelajari masalah transshipment yang merupakan bentuk khusus masalah transportasi. Berikut ini akan dipelajari bentuk khusus masalah transportasi yang lain, yaitu masalah penugasan (Assignment Problem). Masalah yang identik dengan masalah penugasan antara lain pada persoalan mencari pekerjaan, dimana masing-masing lowongan hanya menerima satu orang pelamar. Dapat digambarkan dalam skema penugasan sebagai berikut :

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	b _i
O ₁					1
O ₂					1
O ₃					1
O ₄					1
a _j	1	1	1	1	

O_i : pelamar kerja ke-*i*

P_j : lowongan kerja ke-*j*

c_{ij} : gaji O_i bila diterima di P_j.

Masalah : O_i ditugaskan dimana agar gaji total, yaitu $\sum \sum c_{ij}x_{ij}$ minimal?

Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah transportasi sebagai berikut:

Tabel ongkos ($n \times n$) : c_{ij}; b_i = 1 $\forall i$; a_j = 1 $\forall j$.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Mencari $x_{ij} \geq 0$ yang meminimalkan $f = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i = 1, \forall i \text{ dan } \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_j = 1, \forall j$$

dan x_{ij} bernilai 0 atau 1.

Karena $x_{ij} = 0$ atau 1, $b_i = 1$, $a_j = 1$, maka untuk n agak besar, solusi awalnya selalu *degenerate*, yaitu $< n + n - 1$. Oleh karenanya ada algoritma khusus untuk menyelesaikannya.

Sebenarnya secara teoritis, dapat diselesaikan dengan menambah alokasi semu secukupnya, secara terus menerus pada setiap *step* (iterasi) untuk mengatasi masalah “degenerasi”. Tetapi cara ini sangat sulit dilaksanakan, terutama untuk n cukup besar.

Oleh karena itu akan dibahas algoritma khusus masalah penugasan:

Cara Titik demi Titik

Untuk n kecil, cara ini dapat dilakukan dengan pengamatan langsung, misalnya $n = 3$, maka hanya ada $3! = 6$ macam solusi. Kemudian dipilih yang paling minimum. Tetapi untuk format yang besar cara ini sulit dilaksanakan.

Algoritma Penugasan

Mengingat

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk kotak kosong} \\ 1, & \text{untuk kotak isi,} \end{cases}$$

maka tabel alokasi dan tabel ongkos dipisahkan.

Tabel ongkos diproses dulu, kemudian tabel alokasi mengikutinya.

Tabel ongkos “dapat diubah” dengan mengurangi / menambah suatu kolom / baris dengan suatu bilangan yang sama. Dapat diubah dalam arti tidak mengubah penyelesaian optimal (p.o), sebab:

untuk p_1 konstan:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ &= \sum_j c_{1j} x_{1j} + \sum_j c_{2j} x_{2j} + \dots + \sum_j c_{nj} x_{nj} . \\ \bar{f} &= \sum_j (c_{1j} - p_1) x_{1j} + \sum_j c_{2j} x_{2j} + \dots + \sum_j c_{nj} x_{nj} \\ &= \sum_j c_{1j} x_{1j} + \sum_j c_{2j} x_{2j} + \dots + \sum_j c_{nj} x_{nj} - p_1 \underbrace{\sum_j x_{1j}}_1 \\ &= f - p_1 . \end{aligned}$$

\therefore meminimalkan $f \Leftrightarrow$ meminimalkan \bar{f} .

Secara umum, jika baris ke i_0 dikurangi p_{i_0} , maka:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_j \sum_i (c_{ij} - p_{i_0}) x_{ij} \\ &= \sum_j c_{1j} x_{1j} + \dots + \sum_j (c_{i_0j} - p_{i_0}) x_{i_0j} + \dots + \sum_j c_{nj} x_{nj} \\ &= \sum_j \sum_i c_{ij} x_{ij} - p_{i_0} \underbrace{\sum_j x_{i_0j}}_1 \\ &= f - p_{i_0} . \end{aligned}$$

Langkah-langkah Algoritma: (*Hungarian Algorithm*)

Diusahkan supaya dalam setiap baris dan kolom ada ongkos nolnya.; dengan cara mengurangi setiap baris / kolom dengan $\min\{c_{ij}\}$ dalam setiap baris / kolom.

Diuji apakah ada n kotak dengan ongkos nulnya yang mewakili tiap-tiap baris dan kolom? Jika ada, berarti tabel sudah optimal (karena kombinasi nul yang paling murah) dan itulah penyelesaian optimal soal asli. Bila belum ada, diadakan lagi pengurangan ongkos (langkah I).

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 1.2. Selesaikanlah masalah penugasan berikut :

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
O ₁	4	3	2	1
O ₂	1	5	6	2
O ₃	2	4	3	3
O ₄	5	7	9	8

Penyelesaian :

Tabel 1

I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
O ₁	4	3	2	1	-1
O ₂	1	5	6	2	-1
O ₃	2	4	3	3	-2
O ₄	5	7	9	8	-5

Tabel 2

II	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
O ₁	3	2	1	0

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

O ₂	0	4	5	1
O ₃	0	2	1	1
O ₄	0	2	4	3

-2 -1

Tabel 3

III	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
O ₁	3	0	0	0√
O ₂	0√	2	4	1
O ₃	0	0	0√	1
O ₄	0	0√	3	3

Banyaknya garis penutup nilai nol sudah sama banyaknya dengan banyaknya baris atau banyaknya kolom, sehingga tabel sudah optimal. Pemilihan nol yang mewakili tabel optimal sebagai berikut :

1. Pilih nol pada baris pertama kolom keempat terlebih dahulu, karena nol pada kolom keempat hanya ada pada baris pertama saja. Akibatnya nol pada baris pertama kolom kedua dan ketiga tidak mungkin terpilih juga. Nol pada kolom ketiga baris ketiga menjadi satu-satunya nol.
2. Pilih nol pada baris ketiga kolom ketiga. Akibatnya nol pada baris ketiga kolom pertama dan kedua tidak mungkin terpilih juga.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

3. Pilih nol pada baris kedua kolom pertama, sebab ia merupakan satu-satunya nol pada baris kedua. Akibatnya nol pada kolom pertama baris keempat tidak mungkin terpilih. Nol pada baris keempat kolom kedua menjadi satu-satunya nol.
4. Pilih nol terakhir, yaitu nol pada baris keempat kolom kedua.

Tabel IV

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
O ₁	4	3	2	1 1
O ₂	1 1	5	6	2
O ₃	2	4	3 1	3
O ₄	5	7 1	9	8

Diperoleh nilai $f_{\min} = 1.1 + 1.1 + 1.3 + 1.7 = 12$.

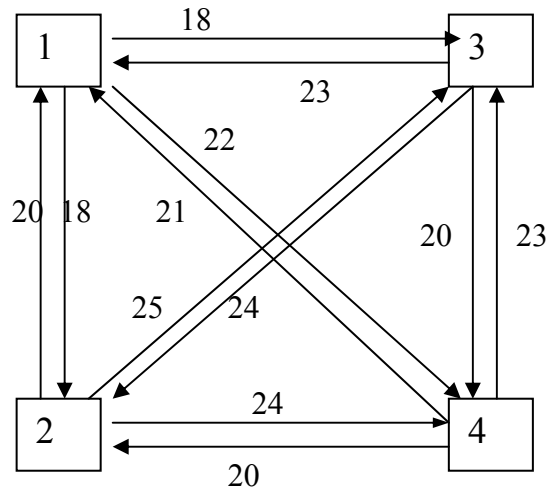
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Soal-soal Latihan 1.2. :

1. Diberikan tabel biaya masalah penugasan sebagai berikut, selesaikan masalah penugasan tersebut:

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
O ₁	9	4	7	7	2	3
O ₂	4	5	1	3	6	7
O ₃	5	3	10	5	11	7
O ₄	6	5	6	8	3	7
O ₅	6	7	5	2	1	3
O ₆	6	4	5	5	7	2

2. Diberikan skema masalah penugasan sebagai berikut. Selesaikanlah masalah penugasan tersebut.



3. Sebuah firma hukum sedang melakukan training untuk 4 calon pengacara baru (O₁ – O₄). Akan ditentukan siapa yang paling sesuai terhadap 5 kasus

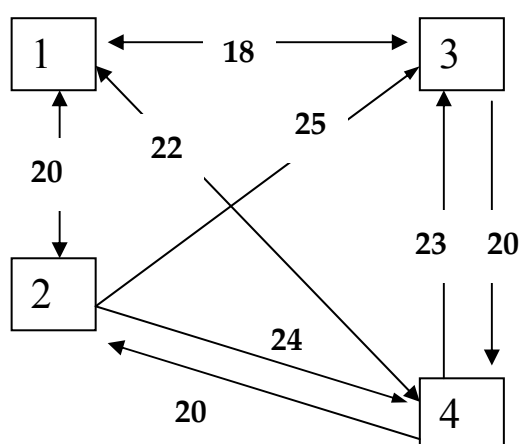
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

yang ada ($D_1 - D_5$). Diberikan tabel biaya masalah penugasan sebagai lama waktu masing-masing calon mempelajari setiap masalah (dalam hari) berikut ini:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	b_i
O_1	4	5	3	5	3	1
O_2	3	7	4	6	2	1
O_3	4	5	4	4	3	1
O_4	7	7	6	7	4	1
a_j	1	1	1	1	1	

Selesaikanlah masalah firma hukum tersebut!

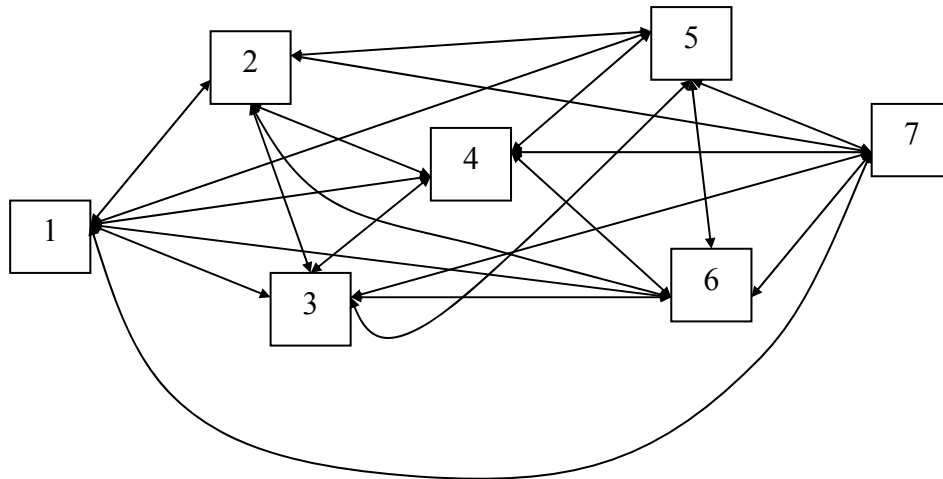
4. a. Sebutkan persamaan dan perbedaan antara masalah Penugasan dan masalah TSP.
 - b. Apa yang terjadi apabila penyelesaian TSP tidak berbentuk circuit? Bagaimana menyelesaikannya.
 - c. Apa yang dimaksud dengan Masalah Transshipment? Mengapa Transshipment perlu dilakukan?
 - d. Buatlah masalah PL bentuk kanonik untuk suatu masalah transportasi meminimalkan dengan 3 kendala sumber kendala tujuan.
5. Diberikan diagram berikut ini :



- a. Tentukan pemodelan masalah TSP tersebut.
- b. Tentukan solusi optimalnya.

C. TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Masalah travelling salesman problem (TSP) merupakan bentuk khusus masalah transportasi. Masalah ini dapat digambarkan dalam skema berikut ini:



Asumsi-asumsi pada masalah TSP :

1. Terdapat sejumlah n lokasi / tempat
2. Tersedia jalur dari satu lokasi ke $n - 1$ lokasi lainnya
3. Tersedia ongkos c_{ij} dari lokasi ke- i ke lokasi ke- j pada jalur $i \rightarrow j$
4. Pada umumnya $c_{ij} = c_{ji}$, tetapi bisa berbeda
5. Seseorang harus berangkat dari suatu lokasi dan mengunjungi $n - 1$ lokasi lainnya (masing-masing sekali) dan akhirnya kembali ke lokasi semula. dalam “*Travelling Salesman Problem*” (TSP), rute-rute yang dilalui orang tersebut dinamakan “*circuit*”.
6. Tujuan: Tujuan TSP adalah menjadwalkan perjalanan yang meminimalkan ongkos total, yaitu mencari circuit yang meminimalkan ongkos total.

Masalah travelling salesman dapat dipandang sebagai masalah penugasan (*assignment*) dengan catatan sebagai berikut:

1. Tempat / lokasi yang dikunjungi diberi label 1, 2, 3, ..., n .

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

2. Pandang TSP sebagai masalah penugasan dengan n pekerja, n pekerjaan, tetapi n pekerja tersebut nantinya diisi 1 orang.

Dengan demikian penyajian tabelnya sebagai berikut:

	1	2	...	n
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}

Dengan cara pandang ini, jelas bahwa:

1. Setiap solusi yang mungkin untuk masalah *travelling salesman* juga merupakan solusi masalah penugasan yang bersangkutan. Namun demikian masalah penugasan yang bersangkutan mungkin mempunyai solusi yang tidak membentuk “*circuit*”, yaitu yang tidak *fisibel* untuk solusi TSP. Oleh karenanya TSP diselesaikan dengan cara sebagai berikut:
2. Ubahlah TSP menjadi masalah penugasan seperti pada tabel di atas, dengan $c_{ii} =$ bilangan besar.
3. Selesaikan masalah penugasan tersebut.
4. Jika solusi masalah penugasan tersebut membentuk *circuit*, maka solusi ini merupakan solusi optimal masalah “*travelling salesman*”.

Jika solusi masalah penugasan tersebut belum membentuk *circuit*, misalnya *circuit*

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \quad \text{atau} \quad 1 \leftrightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \quad \quad \quad 2 \leftrightarrow 4 \end{array}$$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$2 \rightarrow 4$$

$$4 \rightarrow 2$$

maka dilakukan sebagai berikut:

- c_{31} diganti dengan bilangan cukup besar, kemudian diselesaikan lagi dengan metode *Hungarian*.
 - c_{13} diganti dengan bilangan cukup besar kemudian diselesaikan dengan metode *Hungarian*.
- cara seperti pada item a dan b disebut “*branch and bound method*”.

Contoh 1.3.

Selesaikan masalah “travelling salesman” berikut:

	1	2	3	4
1	10^6	3	2	1
2	3	10^6	6	2
3	2	6	10^6	3
4	1	2	3	10^6

Penyelesaian:

(Metode Hungarian)

I	1	2	3	4
1	10^6	3	2	1

-1

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

2	3	10^6	6	2	
3	2	6	10^6	3	-2
4	1	2	3	10^6	-1

II	1	2	3	4	
1	10^6	2	1	0	
2	1	10^6	4	0	
3	0	4	10^6	1	
4	0	1	2	10^6	

-1 -1

III	1	2	3	4	
1	10^6	1	$0 \otimes$	0	
2	1	10^6	3	$0 \otimes$	
3	$0 \otimes$	3	10^6	1	
4	0	$0 \otimes$	1	10^6	

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Solusi optimal masalah penugasan

	1	2	3	4
1	10^6	3	2 1	1
2	3	10^6	6	2 1
3	2 1	6	10^6	3
4	1	2 1	3	10^6

Nilai penyelesaian optimal $f_{\min} = 1(2) + 1(2) + 1(2) + 1(2) = 8$.

Tetapi solusi optimal: $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ tidak membentuk circuit, oleh karena itu ia bukan penyelesaian travelling salesman problem. Untuk mencari solusi TSP dikerjakan sebagai berikut:

Cara I. c_{31} diganti dengan 10^6 (bilangan besar) dan tabel menjadi:

	1	2	3	4	
1	10^6	3	2	1	-1
2	3	10^6	6	2	-2
3	10^6	6	10^6	3	-3
4	1	2	3	10^6	-1

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

	1	2	3	4
1	10^6-1	2	1	0
2	1	10^6-2	4	0
3	10^6-3	3	10^6-3	0
4	0	1	2	10^6-1

-1 -1

	1	2	3	4
1	10^6-1	1	0	0
2	-1	-10^6-3	3	0
3	-10^6-3	-2	10^6-4	0
4	0	0	1	10^6-1

-2

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

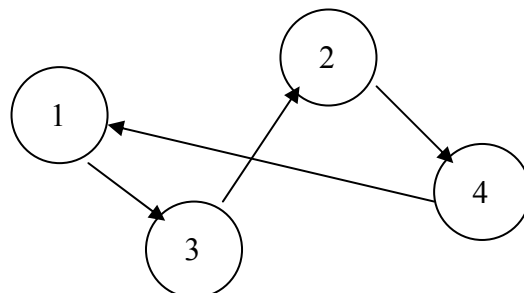
	1	2	3	4
1	10^6-1	1	$0 \otimes$	0
2	1	10^6-3	3	$0 \otimes$
3	10^6-5	$0 \otimes$	10^6-4	0
4	$0 \otimes$	0	1	10^6-1

Penyelesaian optimal

	1	2	3	4
1	10^6	3	2 1	1
2	3	10^6	6	2 1
3	2	6 1	10^6	3
4	1 1	2	3	10^6

dengan P.O = $1(1) + 1(6) + 1(2) + 1(2) = 11$, dan circuit

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.



Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Cara II. c_{13} diganti dengan 10^6 :

	1	2	3	4	
1	10^6	3	10^6	1	-1
2	3	10^6	6	2	-2
3	2	6	10^6	3	-2
4	1	2	3	10^6	-1

	1	2	3	4
1	10^6-1	2	10^6-1	0
2	1	10^6-2	4	0
3	0	4	10^6-2	1
4	0	1	2	10^6-1

-1 -2

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

	1	2	3	4
1	10^6-1	1	10^6-3	$0 \otimes$
2	1	10^6-3	2	0
3	0	3	10^6-4	1
4	0	$0 \otimes$	0	10^6-1

-2

	1	2	3	4
1	10^6-1	1	10^6-3	$0 \otimes$
2	1	10^6-3	$0 \otimes$	0
3	$0 \otimes$	3	10^6-6	1
4	0	$0 \otimes$	0	10^6-1

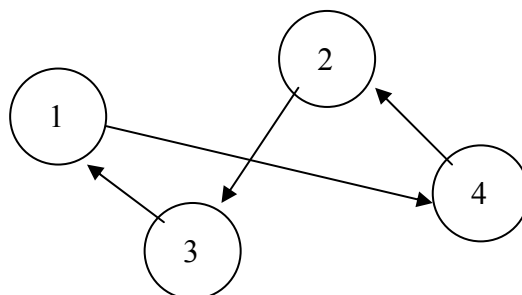
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Solusi optimal:

	1	2	3	4
1	10^6	3	2	1
2	3	10^6	6	2
3	2	6	10^6	3
4	1	2	3	10^6

dengan P.O = $1(2) + 1(2) + 1(6) + 1(1) = 11$, dengan circuit

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.



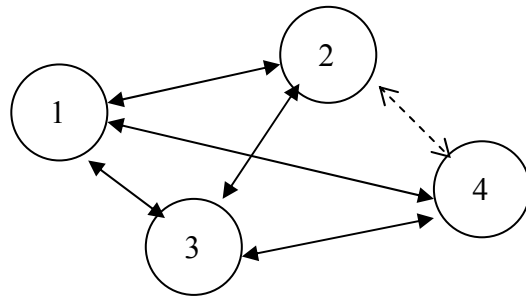
Soal-soal Latihan 1.3. :

Selesaikan masalah “Traveling Salesman” berikut:

	1	2	3	4
1	...	65	53	37
2	65	...	95	...
3	53	95	...	81
4	37	...	81	...

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

... = tidak ada jalur



Dalam soal ini jalur $2 \leftrightarrow 4$ tidak ada.

Solusi: Dengan cara analog seperti pada contoh, diperoleh solusi optimal = 278

dengan circuit: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

BAB II. NETWORK

Jaringan kerja (*Network*) adalah suatu susunan garis edar (*path*) yang menghubungkan berbagai titik, di mana satu barang atau lebih bergerak dari satu titik ke titik lain. Sebagai contoh berbagai jaringan kerja adalah sistem jalan tol, jaringan telepon, jaringan rel kereta api, dan jaringan televisi.

Pemodelan jaringan kerja dapat diterapkan ke dalam berbagai permasalahan pengambilan keputusan yang dapat dimodelkan sebagai model optimasi jaringan kerja dengan cara penyelesaian masalah yang efisien dan efektif.

Jaringan kerja diilustrasikan sebagai diagram yang terdiri dari dua komponen penting yaitu simpul (*nodes*) dan busur (cabang, *branches*). Simpul melambangkan kota atau tempat, cabang menghubungkan antar simpul dan mencerminkan arus dari satu titik ke titik lain dalam jaringan kerja tersebut. Simpul-simpul dalam diagram jaringan kerja dilambangkan dengan lingkaran dan cabang dilambangkan dengan garis yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.

Simpul yang melambangkan kota pertama disebut titik awal (*origin*) dan simpul sisanya dapat merupakan tujuan, tergantung apa yang ingin ditentukan dari jaringan kerja tersebut. Nilai-nilai yang tertera pada tiap cabang dapat menunjukkan tentang informasi jarak, lamanya waktu, atau biaya yang diberikan pada masing-masing cabang.

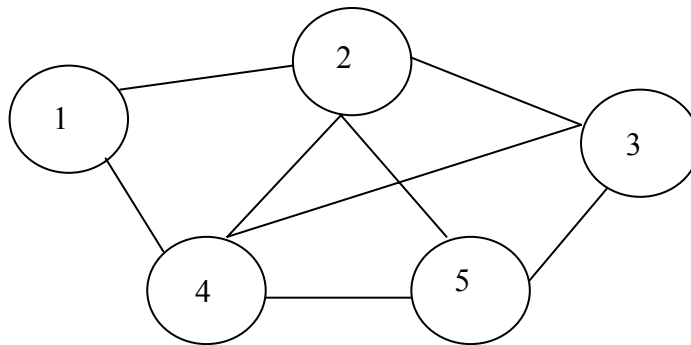
Pada prinsipnya, tujuan dari pemodelan jaringan kerja adalah untuk memperoleh solusi jarak terpendek, waktu tersingkat dan biaya terendah di antara titik-titik dalam jaringan.

Notasi yang digunakan pada masalah jaringan kerja adalah $G = (N,A)$ yang menotasikan suatu jaringan kerja G dengan N adalah himpunan simpul dan A adalah himpunan busur.

Untuk lebih jelas, perhatikan contoh suatu jaringan kerja berikut ini.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 2.1.



Pada diagram tersebut terdapat 5 simpul, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, yang menotasikan kota 1, kota 2, kota 3, kota 4, dan kota 5. Serta terdapat 8 busur yang menghubungkan kota-kota yang ada, $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$, dengan $(1, 2)$ adalah busur yang menghubungkan kota 1 dengan kota 2, $(1, 3)$ adalah busur yang menghubungkan kota 1 dengan kota 3, dan seterusnya.

Catatan: Pada teori graf simpul dinotasikan dengan v_i , dan busur dinotasikan dengan e_i .

Istilah-istilah dalam Graf Jaringan kerja

Kapasitas adalah kemampuan maksimal suatu busur menampung arus yang melaluinya.

Busur berarah adalah suatu busur yang ditandai oleh suatu panah, busur akan bernilai positif jika arah panahnya sama (searah) dan busur akan bernilai nol jika arah panahnya berlawanan arah.

Jaringan kerja berarah adalah jaringan kerja dengan semua busurnya berarah.

Lintasan antara dua simpul adalah serangkaian busur yang berbeda yang menghubungkan simpul-simpul pada jaringan kerja.

Loop adalah lintasan yang menghubungkan suatu simpul ke dirinya.

Loop berarah adalah *loop* dengan semua busurnya berarah.

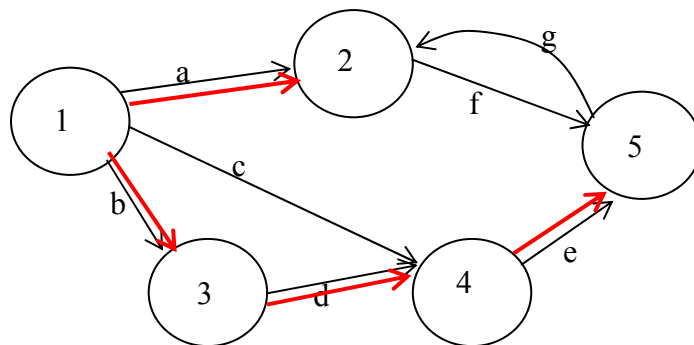
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Jaringan kerja terhubung adalah jaringan kerja dengan setiap pasang simpul terhubung.

Tree adalah jaringan kerja terhubung yang hanya meliputi sebagian busur saja.

Spanning tree adalah jaringan kerja terhubung yang meliputi semua simpul tanpa ada loop.

Contoh 2.2. Perhatikan diagram jaringan kerja berikut ini



Pada diagram jaringan kerja tersebut, dapat dilihat bahwa diagram merupakan jaringan kerja berarah dan terhubung. Simpul-simpul pada diagram dinotasikan dengan 1, 2, 3, 4, dan 5. Busur-busur penyusun diagram yaitu (1, 2), (1, 3), (1, 4),... adalah busur-busur berarah. Nilai-nilai pada busur-busur yang ada pada jaringan kerja yaitu a menunjukkan kapasitas busur (1, 2), b menunjukkan kapasitas busur (1, 3), c menunjukkan kapasitas busur (1, 4), dan seterusnya untuk simpul d, e, f, dan g.

Lintasan dari simpul 1 ke simpul 5 pada diagram dapat melalui busur (1, 4) dilanjutkan ke busur (4, 5), dinotasikan dengan (1, 4) \rightarrow (4, 5) atau melalui busur (1, 3) dilanjutkan ke busur (3, 4) dilanjutkan lagi ke busur (4, 5), dinotasikan dengan (1, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 5) atau melalui busur (1, 2) dilanjutkan ke busur (2, 5), dinotasikan dengan (1, 2) \rightarrow (2, 5). Sehingga dapat disimpulkan bahwa lintasan antara dua simpul tidak tunggal.

Lintasan yang dibentuk oleh busur (2, 5) dilanjutkan dengan busur (5, 2), dinotasikan dengan (2, 5) \rightarrow (5, 2), membentuk suatu loop berarah.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Sedangkan lintasan yang disusun oleh busur (1, 3) dilanjutkan busur (3, 4) dilanjutkan lagi dengan busur (4, 5), dinotasikan dengan $(1, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 5)$, membentuk suatu *tree*. Yang terakhir, rangkaian busur (1, 2), (1, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 5) membentuk suatu *spanning tree*.

Cakupan masalah di dalam jaringan kerja

1. Masalah jarak terpendek (*shortest path problem*)
2. Masalah arus maksimal (*maximum flow problem*)
3. Masalah pohon perentang minimal (*minimum spanning tree*)
4. Masalah arus berkapasitas biaya minimal (*minimum cost flow capacity problem*)
5. Penjadwalan proyek (*Project Scedulling*)

A. MASALAH POHON PERENTANG MINIMAL

Masalah pohon perentang minimal merupakan variasi dari persoalan rute terpendek yang perbedaannya terletak pada lintasan yang dicari. Pada rute terpendek, yang dicari adalah lintasan atau rute dari sumber ke tujuan yang memberikan total jarak minimum, sedangkan pada masalah pohon perentang yang dipersoalkan adalah menentukan busur-busur yang menghubungkan semua simpul yang ada pada jaringan kerja namun tidak membentuk suatu *loop*, sehingga diperoleh total panjang busur minimum. Jadi tujuan dari minimum spanning tree adalah menentukan nilai minimal didalam jaringan kerja yang membentuk suatu *spanning tree*.

Cukup banyak contoh praktis atau penerapan dari masalah pohon perentang minimal ini, diantaranya ialah :

1. *Penentuan letak tiang listrik atau telepon.*

Pada penentuan letak tiang listrik atau telepon sebagai masalah pohon perentang minimal agar dapat meminimalkan kabel listrik atau telepon yang dibutuhkan tetapi tetap menjangkau semua konsumen atau pengguna listrik atau telepon pada wilayah tersebut.

2. *Penentuan rute atau jalur bis.*

Pada penentuan rute atau jalur bis sebagai masalah pohon perentang minimal agar dapat meminimalkan jarak tempuh suatu trayek angkutan namun menjangkau titik-titik penumpang dapat dilalui.

3. *Perencanaan jaringan distribusi barang atau komoditas.*

4. *Perencanaan jaringan transportasi.*

Dalam hal ini simpul-simpulnya bisa berupa terminal, sedangkan busur-busurnya dapat berupa jalan raya. Persoalannya ialah menentukan pola transportasi yang dapat melayani seluruh terminal dengan jarak minimum.

5. *Perencanaan jaringan komunikasi berskala besar.*

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Masalah *minimum spanning tree* ini dapat diselesaikan dengan cara yang sederhana yaitu sebagai berikut :

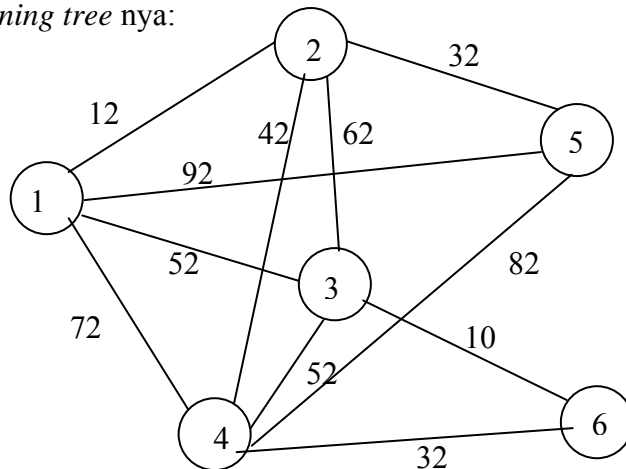
1. Buat dua buah himpunan simpul. Himpunan pertama adalah himpunan simpul yang sudah membentuk rangkaian *minimum spanning tree*, sedangkan himpunan kedua adalah himpunan simpul yang ada pada jaringan kerja.
2. Pilihlah secara sembarang salah satu simpul pada jaringan kerja, tentukan sebagai simpul awal, masukkan pada himpunan pertama, kemudian simpul lain yang ada pada jaringan kerja masuk dalam himpunan kedua.
3. Hubungkan simpul pada himpunan pertama dengan suatu simpul pada himpunan kedua, dengan simpul terpilih akan memberikan jarak terpendek terhadap simpul pada himpunan pertama dan tidak membentuk *loop*. Selanjutnya simpul terpilih tersebut menjadi anggota himpunan pertama, sisa simpul pada jaringan kerja menjadi anggota himpunan kedua.
4. Ulangi langkah 3 hingga seluruh simpul pada jaringan kerja menjadi anggota himpunan pertama dan himpunan kedua menjadi himpunan kosong.

Untuk lebih jelasnya, ikuti algoritmanya *minimum spanning tree* berikut ini:

1. Pada jaringan kerja tentukan simpul awalnya.
2. Tentukan dua himpunan, C dan C' , dengan C adalah himpunan yang akan memuat simpul-simpul pembentuk *tree* dan C' adalah himpunan yang memuat simpul-simpul pada jaringan kerja yang belum terhubung.
3. Tentukan simpul di C' dengan kapasitas minimal yang terhubung dengan C , kemudian masukkan dalam C .
4. Iterasi diteruskan sampai $C' = \{ \}$ atau ϕ
5. *Minimum spanning tree* dinotasikan dengan $\sum d_i$, $\forall i \in C$, dengan d_i menotasikan adalah jarak terpendek antara 2 simpul.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 2.3. Perhatikan diagram jaringan kerja berikut ini, tentukan *minimum spanning tree* nya:



Iterasi 1

$$C = \{1\}, C' = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Iterasi 2

$$d \min = \min \{1, 9, 5, 7\} = 1$$

$$C = \{1, 2\}, C' = \{3, 4, 5, 6\}$$

Iterasi 3

$$d \min = \min \{3, 4, 5, 6, 7, 9\} = 3$$

$$C = \{1, 2, 5\}, C' = \{3, 4, 6\}$$

Iterasi 4

$$d \min = \min \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = 4$$

$$C = \{1, 2, 4, 5\}, C' = \{3, 6\}$$

Iterasi 5

$$d \min = \min \{3, 5, 5, 6\} = 3$$

$$C = \{1, 2, 4, 5, 6\}, C' = \{3\}$$

Iterasi 6

$$d \min = \min \{5, 5, 6, 10\} = 5$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, C' = \emptyset$$

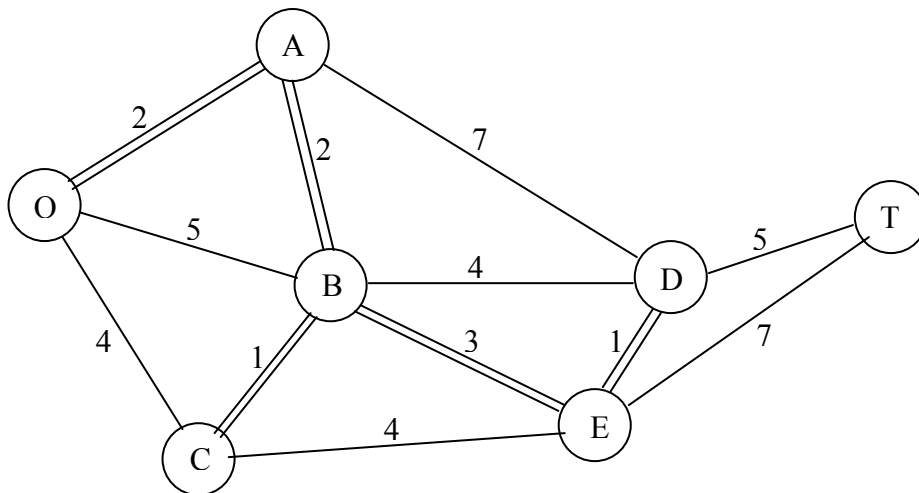
Jadi *Minimum Spanning Tree*-nya adalah $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 2.4.

Jika dikawasan “Alam Hijau” akan dipasang telepon yang dapat menghubungkan stasiun-stasiun yang ada, maka kebel teleponnya harus dipasang pada jalan-jalan sebagai berikut :

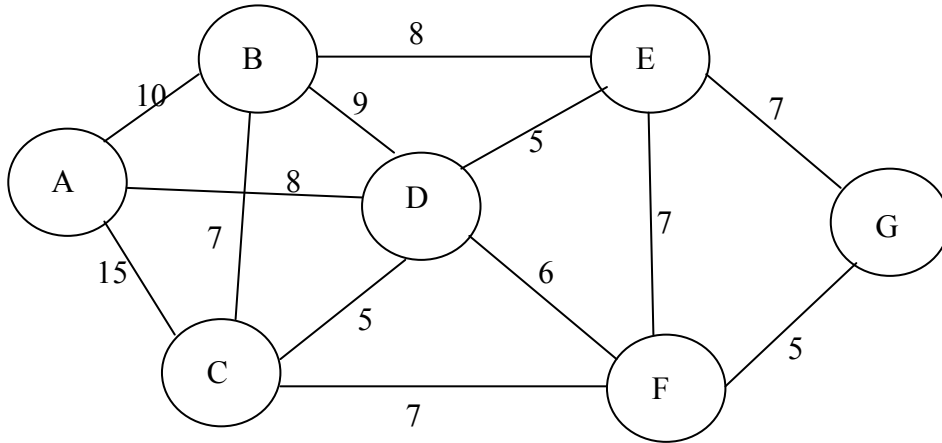
1. Mulai dari stasiun O. Stasiun terdekat dengan O adalah stasiun A dengan jarak 2. Hubungkan O dengan A.
2. Stasiun terdekat dari O atau A adalah B. Karena B lebih dekat pada A, maka hubungkan B dengan A.
3. Stasiun terdekat dari O, A atau B adalah C. Karena C lebih dekat pada B, hubungkan C dengan B.
4. Stasiun terdekat dari O, A, B atau C adalah E. Karena E lebih dekat pada B, hubungkan E dengan B.
5. Stasiun terdekat dari O, A, B, C atau E adalah D. Karena D lebih dekat pada E, hubungkan D dengan E.
6. Satu-satunya stasiun yang belum dihubungkan adalah T karena jaraknya lebih dekat ke D, maka hubungkan T dengan D.



Dengan demikian, kabel-kabel telepon itu harus dipasang pada jalan-jalan yang menghubungkan stasiun-stasiun O dengan A, A dengan B, B dengan C, B dengan E, E dengan D dan D dengan T, dengan kabel sepanjang total 14 satuan panjang.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Contoh 2.5. Perhatikan diagram jaringan kerja berikut ini, tentukan minimum spanning tree nya:

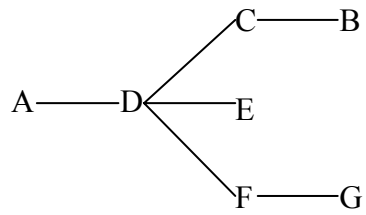


Penyelesaian:

- $C = \{ 1 \}$ $\underline{C} = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
Node terhubung dengan 1 adalah (1, 2), (1, 3), (1, 4)
Dengan $d = \{ 10, 15, 8 \}$, $d_{\min} = 8$, yaitu (1, 4) jadi,
- $C^i = \{ 1, 4 \}$ $\underline{C}^i = \{ 2, 3, 5, 6, 7 \}$
Node terhubung dengan 1 dan 4 adalah (1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 3), (4, 5), sehingga
- $C^{ii} = \{ 1, 3, 4, 5 \}$ $\underline{C}^{ii} = \{ 2, 6, 7 \}$
Node terhubung dengan 1, 3, 4 dan 5 adalah (1, 2), (3, 2), (3, 6), (4, 2), (4, 6), (5, 2), (5, 6), (5, 7), dengan $d = \{ 10, 7, 7, 9, 6, 8, 7, 7 \}$, $d_{\min} = 6$, yaitu (4, 6) diperoleh,
- $C^{iii} = \{ 1, 3, 4, 5, 6 \}$ $\underline{C}^{iii} = \{ 2, 7 \}$
Node terhubung dengan 1, 3, 4, 5 dan 6 adalah (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 7), (6, 7), dengan $d = \{ 10, 7, 9, 8, 7, 5 \}$, $d_{\min} = 5$, yaitu (6, 7) jadi,
- $C^{iv} = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ $\underline{C}^{iv} = \{ 2 \}$
Node terhubung adalah (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), dengan $d = \{ 10, 7, 9, 8 \}$, $d_{\min} = 7$, yaitu (3, 2) jadi,
- $C^v = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ $\underline{C}^v = \{ \}$.

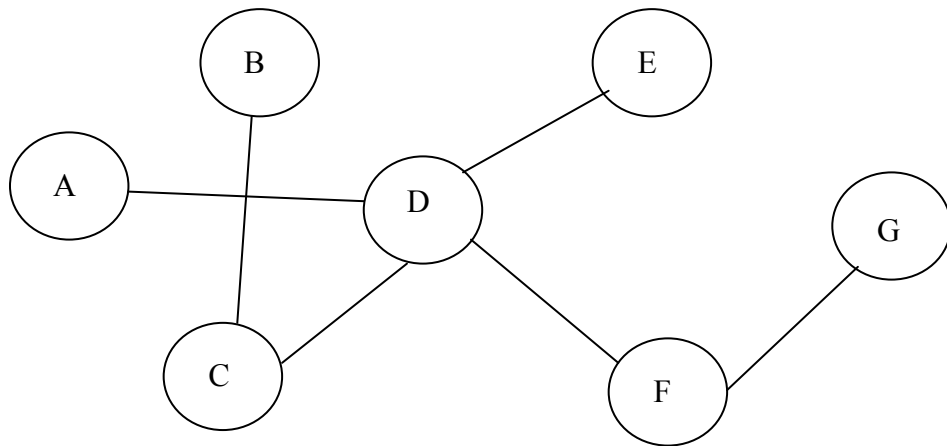
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Pohon perentang minimalnya:



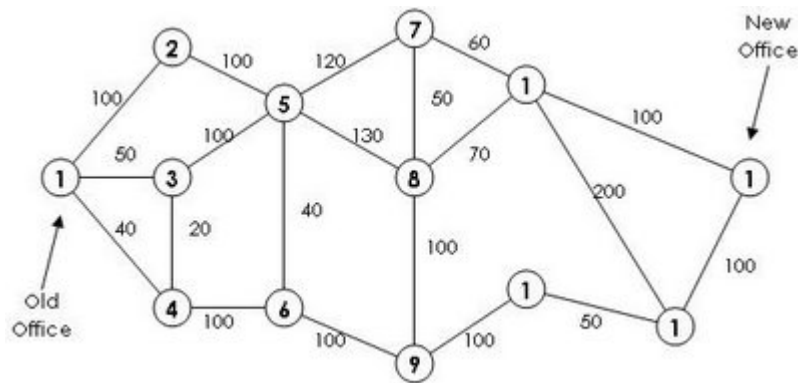
Dengan $f_{\min} = 8 + 5 + 5 + 6 + 5 + 7 = 36$.

Network pohon perentang minimalnya:



B. MASALAH LINTASAN TERPENDEK

Masalah rute terpendek (*Shortest Path Problems*) berguna untuk menentukan jarak tersingkat antara titik awal dan beberapa titik tujuan. Sebagai contoh, sebuah perusahaan jasa pengangkutan barang disewa untuk memindahkan furnitur dan perlengkapan kantor milik *Istec Corporation* ke markas besarnya yang baru. Untuk memindahkan barang-barang tersebut, perusahaan jasa yang disewa dapat melalui beberapa jalur antar kota sebagaimana yang digambarkan pada diagram jaringan berikut ini.



Agar perjalanan lebih efisien, maka jalur manakah yang jarak tempuhnya lebih pendek ?

Terdapat dua algoritma untuk menyelesaikan suatu masalah rute terpendek, yaitu algoritma asiklik dan algoritma siklik. Algoritma asiklik adalah algoritma untuk menyelesaikan masalah rute terpendek pada jaringan kerja tanpa loop, sedangkan algoritma siklik adalah algoritma untuk menyelesaikan masalah rute terpendek pada jaringan kerja berloop atau tanpa loop.

Berikut ini akan dijabarkan kedua algoritma tersebut berikut contoh penggunaannya.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Algoritma Asiklik

Langkah-langkah algoritma asiklik:

1. Menentukan simpul awal dan jarak terpendeknya.
2. Menentukan jarak terpendek dari suatu simpul yang ada pada jaringan berdasarkan simpul yang telah ditentukan jarak terpendeknya dengan menambah jarak antara kedua simpul tersebut.
3. Lakukan langkah 2 untuk setiap simpul yang ada pada jaringan kerja.
4. Setelah ditentukan jarak terpendek untuk semua simpul pada jaringan, selanjutnya menentukan rute terpendeknya, dengan melakukan penelusuran mundur.

Algoritma Asiklik adalah sebagai berikut:

1. Tentukan

$$u_j = \min \{ u_i + d_{ij} \}$$

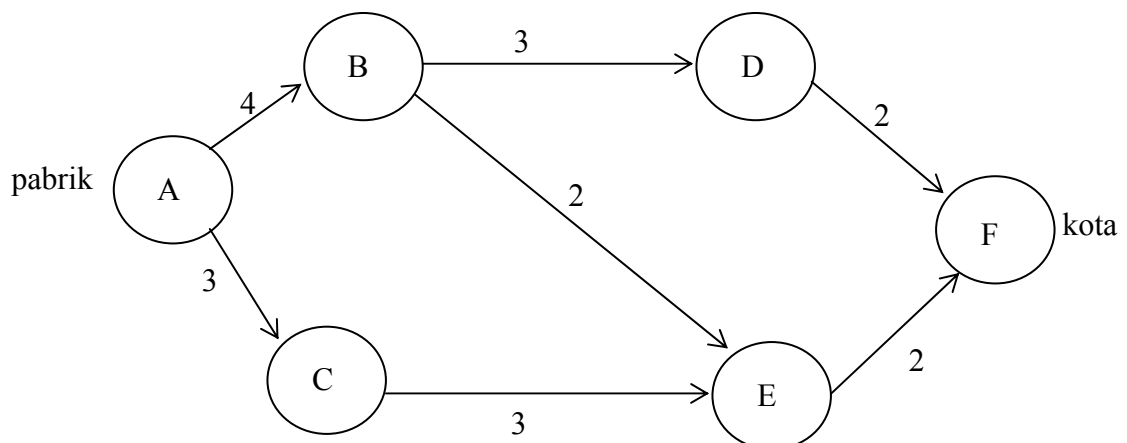
dengan u_j = jarak terpendek dari simpul i ke simpul j .

d_{ij} = jarak antara simpul i dan j .

2. Tentukan lintasan terpendek dengan penelusuran mundur.

Contoh 2.6.

Diberikan suatu jaringan kerja distribusi barang dari pabrik ke kota sebagai berikut:



Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Penyelesaian:

Karena pada jaringan kerja pendistribusian barang dari pabrik ke kota tidak memuat loop, maka digunakan algoritma asiklik untuk menyelesaikan masalah rute terpendeknya.

Algoritma asiklik pada jaringan kerja pendistribusian barang dari pabrik ke kota

1. Pada simpul A : jarak terpendek pada simpul A adalah nol, dinotasikan dengan

$$u_a = 0.$$

2. Pada simpul B : jarak terpendek sampai ke simpul B adalah jarak terpendek pada simpul A ditambah jarak antara simpul A dan simpul B, dirumuskan dengan

$$u_b = \min \{ u_a + d_{ab} \} = \min \{ 0 + 4 \} = 4.$$

3. Pada simpul C : jarak terpendek sampai ke simpul C adalah jarak terpendek pada simpul A ditambah jarak antara simpul A dan simpul C, dirumuskan dengan

$$u_c = \min \{ u_a + d_{ac} \} = \min \{ 0 + 3 \} = 3.$$

4. Pada simpul D : jarak terpendek sampai ke simpul D adalah jarak terpendek pada simpul B ditambah jarak antara simpul B dan simpul D, dirumuskan dengan

$$u_d = \min \{ u_b + d_{bd} \} = \min \{ 4 + 3 \} = 7.$$

5. Pada simpul E : jarak terpendek sampai ke simpul E adalah nilai minimal antara jarak terpendek pada simpul B ditambah jarak antara simpul B dan simpul E dengan jarak terpendek pada simpul C ditambah jarak antara simpul C dan simpul E, dirumuskan dengan

$$u_e = \min \{ u_b + d_{be}, u_c + d_{ce} \} = \min \{ 4 + 2, 3 + 3 \} = 6.$$

6. Pada simpul F : jarak terpendek sampai ke simpul F adalah nilai minimal antara jarak terpendek pada simpul D ditambah jarak antara simpul D dan simpul F dengan jarak terpendek pada simpul E ditambah jarak antara simpul E dan simpul F, dirumuskan dengan

$$u_f = \min \{ u_d + d_{df}, u_e + d_{ef} \} = \min \{ 7 + 2, 6 + 2 \} = 8.$$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

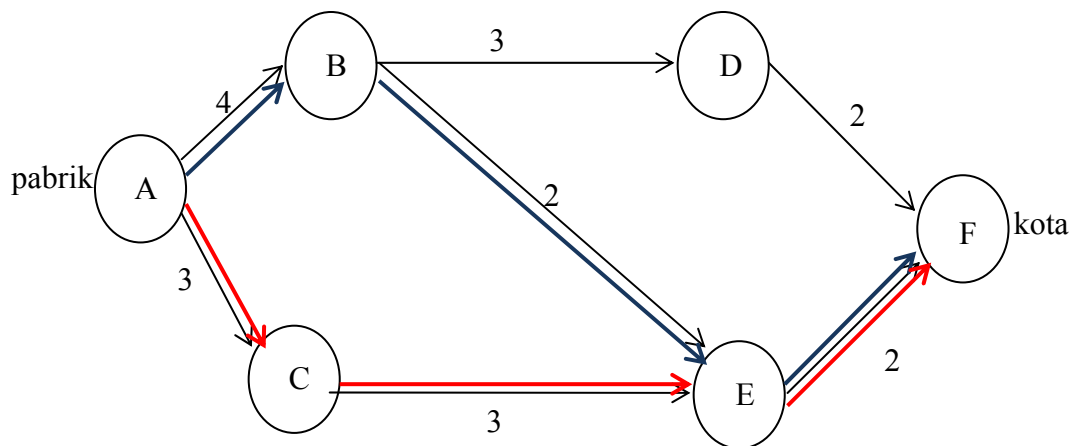
Dengan algoritma asiklik, diperoleh jarak terpendek dari simpul A (pabrik) ke simpul F (kota) adalah 8. Rute terpendeknya diperoleh dengan penelusuran mundur sebagai berikut:

1. Pada simpul F, nilai minimal 8 diperoleh dari rumus $u_e + d_{ef}$, sehingga simpul sebelum simpul F pada rute terpendek adalah simpul E.
2. Pada simpul E, nilai minimal 6 diperoleh dari rumus $u_b + d_{be}$ dan $u_c + d_{ce}$, sehingga simpul sebelum simpul E pada rute terpendek adalah simpul B atau simpul C.
3. Pada simpul B, nilai minimal 4 diperoleh dari rumus $u_a + d_{ab}$, sehingga simpul sebelum simpul B adalah simpul A.
4. Pada simpul C, nilai minimal 3 diperoleh dari rumus $u_a + d_{ac}$, sehingga simpul sebelum simpul C adalah simpul A.

Secara sederhana hasil penelusuran mundur dapat digambarkan sebagai berikut:

$F \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$ atau $F \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$.

Dalam diagram jaringan kerja, digambarkan sebagai berikut:



Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Algoritma Siklik (*Dijkstra's Algorithm*)

Langkah-langkah Algoritma Siklik

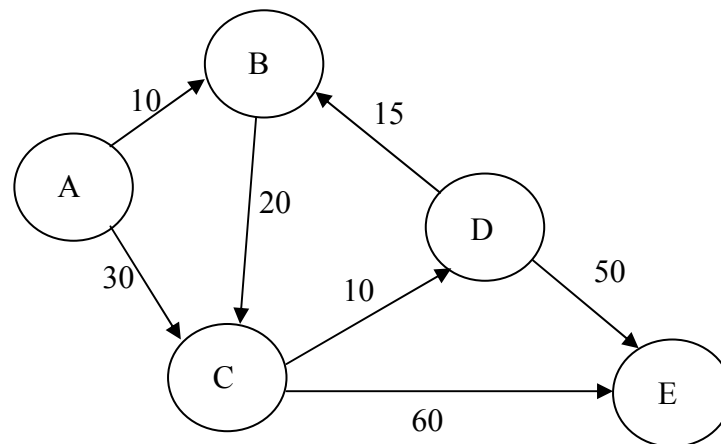
Algoritma ini berlaku untuk network dengan loop atau network tanpa loop. Algoritma ini disebut juga algoritma 'pe-label-an', karena menggunakan 2 label, yaitu *temporary label* (sementara) dan *permanent label* (tetap). Notasi untuk kedua label ini adalah $[d, n]$, dengan d menotasikan jarak terpendek yang bisa ditempuh ke suatu simpul, n menotasikan simpul terakhir yang dilalui sehingga d terealisasi.

1. Algoritma diawali dengan : a) simpul sumber diberi label permanen $[0, s]$ dengan s menotasikan *starting simpul*, 0 (nol) adalah nilai yang diberikan sebagai jarak dari simpul 1 ke dirinya sendiri. B) sedangkan simpul lain pada jaringan kerja diberi label temporary $[M, -]$, dengan M menotasikan bilangan yang nilainya sangat besar, sedangkan tanda $-$ menunjukkan belum ada identifikasi simpul.
2. Langkah selanjutnya adalah menentukan simpul permanen berikutnya, dengan cara sebagai berikut, dari simpul permanen, tentukan simpul yang langsung bisa dicapai, tentukan d dan n nya.
3. Bila hanya ada satu simpul, labelkan menjadi permanen.
4. Jika lebih dari satu, maka tentukan simpul dengan nilai $d = \min \{ d_i \}$, simpul dengan nilai d demikian akan menjadi simpul permanen.
5. Ulangi langkah 2 hingga 4 hingga semua simpul permanen dan simpul terakhir atau tujuan (Destinasi) tercapai.

Contoh 2.7.

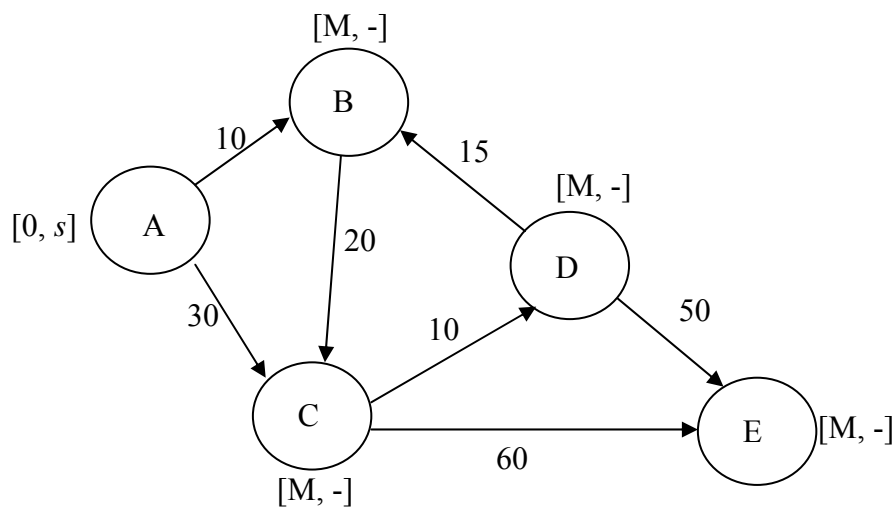
Diberikan jaringan kerja berikut, tentukan lintasan terpendek dari jaringan kerja tersebut.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



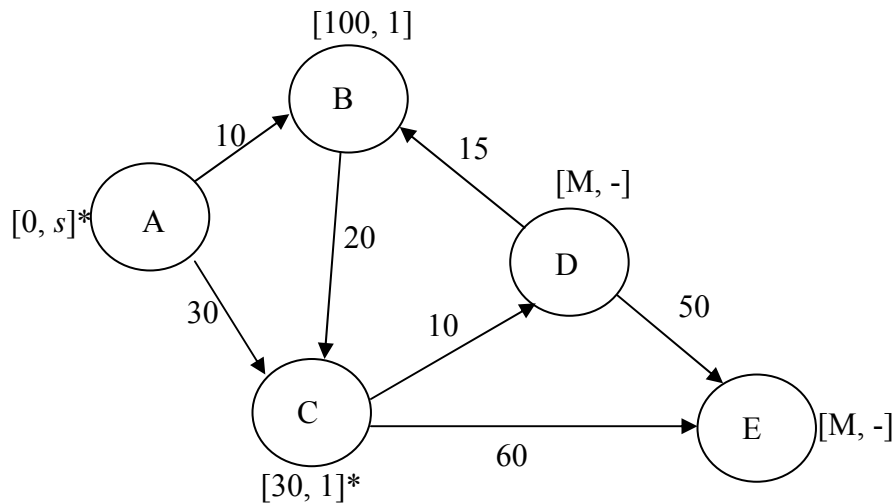
Penyelesaian:

1. Tentukan simpul A sebagai simpul permanen, dinotasikan $[0, s]$ dan simpul lainnya, yaitu simpul B, C, D, dan E sebagai simpul temporary, dinotasikan $[M, -]$.

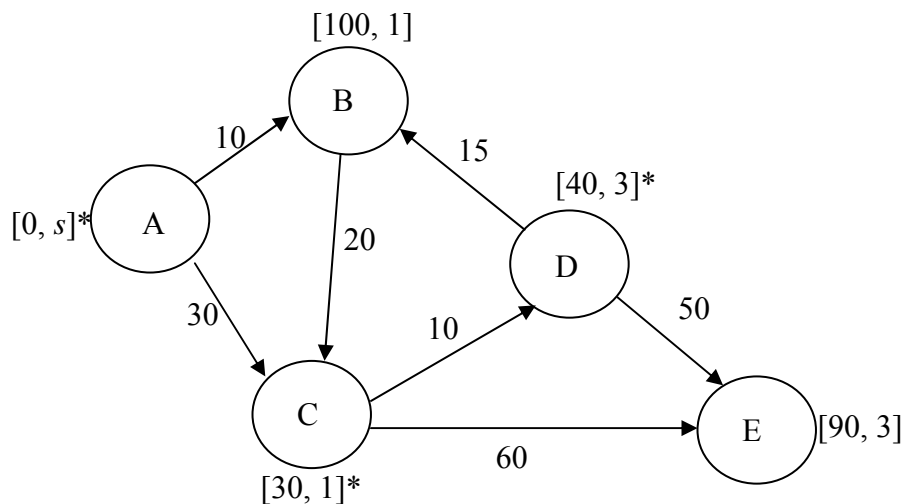


2. Simpul B dan C bisa dicapai langsung dari simpul A, $[d, n]$ untuk simpul B adalah $[0 + 100, 1]$ dan untuk simpul C adalah $[0 + 30, 1]$.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



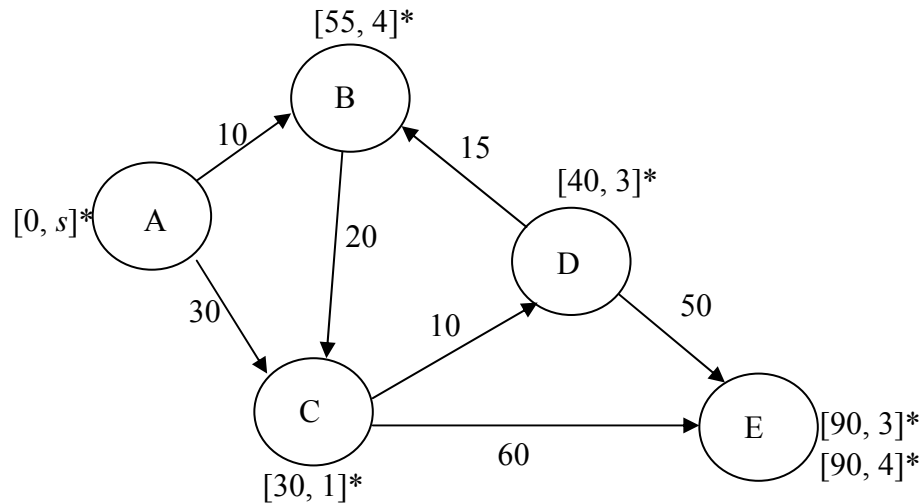
3. Diperoleh $d = \min \{d_B, d_C\} = \min \{100, 30\} = 30$. Karena $d = 30$ ada pada simpul C maka simpul C menjadi simpul permanen kedua, diberi tanda permanen yaitu *.
4. Simpul D dan E bisa dicapai langsung dari simpul C, $[d, n]$ untuk simpul D adalah $[30 + 10, 3]$ dan untuk simpul E adalah $[30 + 60, 3]$.



5. Diperoleh $d = \min \{d_B, d_D, d_E\} = \min \{100, 40, 90\} = 40$. Karena $d = 40$ ada pada simpul D maka simpul D menjadi simpul permanen ketiga, diberi tanda permanen yaitu *.

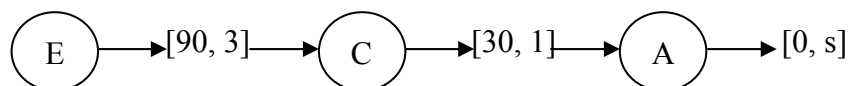
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

6. Simpul B dan E bisa dicapai langsung dari simpul D, $[d, n]$ untuk simpul B dari simpul permanen D adalah $[40 + 15, 4]$ dan untuk simpul E adalah $[40 + 50, 4]$.



7. Diperoleh $d = \min \{d_B, d_E\} = \min \{55, 90\} = 55$. Karena $d = 55$ ada pada simpul B maka simpul B menjadi simpul permanen keempat, diberi tanda permanen yaitu *.
8. Karena hanya simpul E yang belum menjadi simpul permanen, sedangkan simpul E adalah simpul tujuan dengan label $[90, 3]$ dan $[90, 4]$, yaitu mempunyai nilai minimum d yang sama yaitu 90, maka simpul E dapat langsung diubah menjadi simpul permanen, dan diberi tanda permanen yaitu *.
9. Karena semua simpul sudah menjadi simpul permanen, maka dilakukan penelusuran mundur untuk mencari rute terpendeknya.

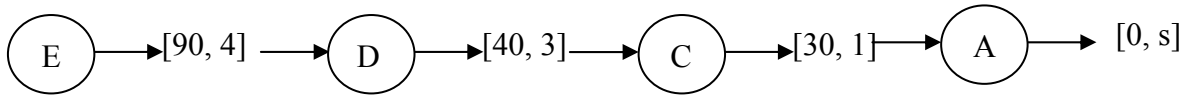
Penelusuran mundur untuk mencari rute terpendek:



Alurnya 1 – 3 – 5 dengan jarak terpendek adalah 90.

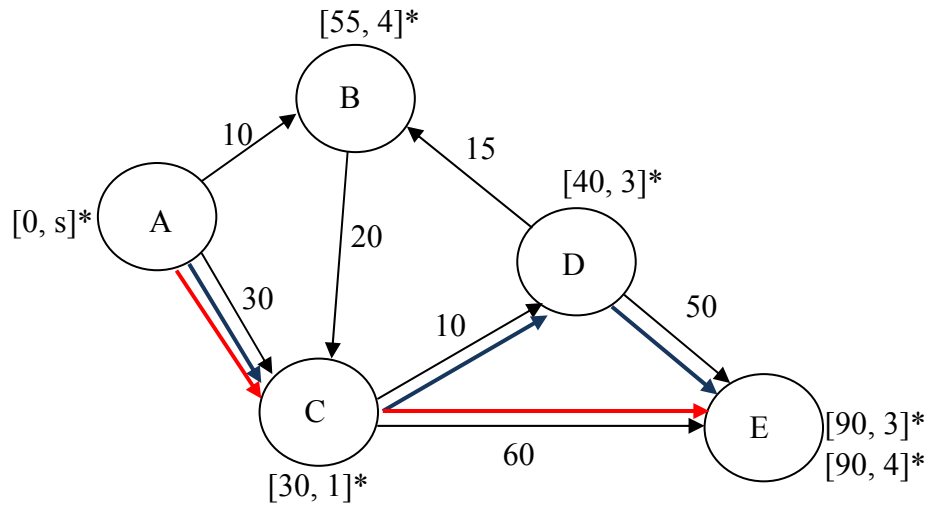
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Atau



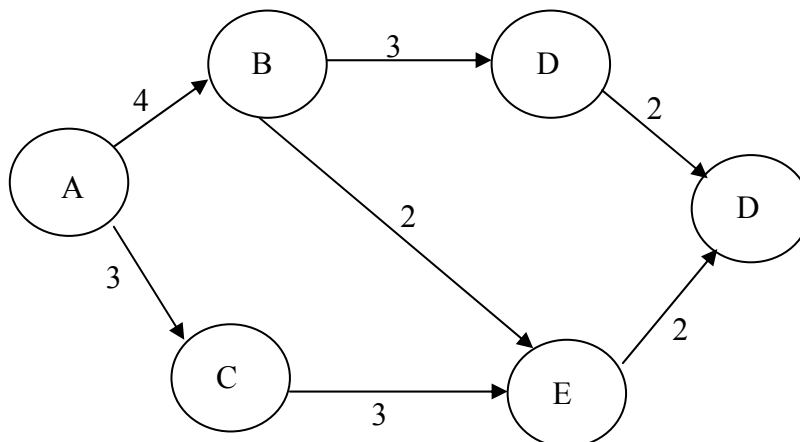
Alurnya 1 – 3 – 4 – 5 dengan jarak terpendek adalah 90.

Dalam bentuk diagram jaringan kerja kedua rute terpendek yang diperoleh terlihat dalam 2 warna yang berbeda, merah dan biru, dengan jarak terpendeknya 90.



Soal-soal Latihan 2.1. :

Diberikan jaringan kerja berikut. Tentukanlah jarak terpendek dan rute terpendeknya menggunakan algoritma siklik.



C. MASALAH RUTE TERPENDEK DIPANDANG SEBAGAI MODEL TRANSSHIPMENT

Telah diketahui pada masalah transshipment sebagai masalah khusus transportasi, tujuan yang ingin dicapai pada masalah tersebut adalah menentukan alur terpendek yang bisa dilakukan untuk mendistribusikan barang dari beberapa sumber ke beberapa tujuan dan harus singgah di beberapa persinggahan, baik hanya singgah untuk melakukan bongkar muat barang maupun untuk pendistribusian barang. Karena mempunyai tujuan yang sama, maka masalah rute terpendek dapat dipandang dalam pemodelan masalah transshipment sebagai berikut.

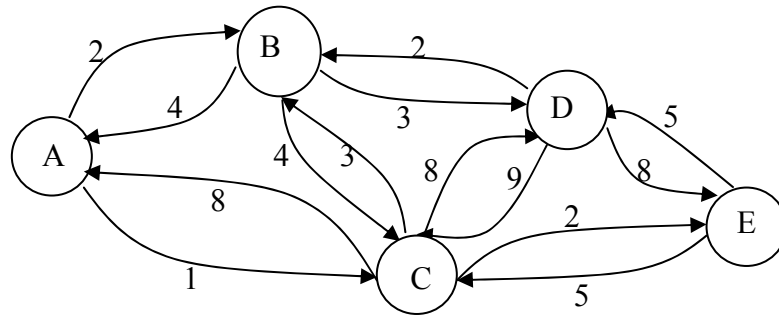
Asumsi-asumsi yang ada:

1. Rute terpendek dapat dipandang sebagai masalah transportasi dengan satu sumber (origin) dan satu tujuan (destinasi).
2. Nilai-nilai $b_i = 1$ dan $a_j = 1$. Dalam hal ini i adalah node sumber, j adalah node tujuan, $i = 1$ dan $j = 1$.
3. Tujuan dalam masalah rute terpendek adalah meminimumkan jarak yang ditempuh b_i dari sumber ke tujuan.
4. Buffer (B) adalah 1.
5. Nilai $c_{ii} = 0, \forall i$.
6. Node yang tidak terhubung mempunyai $c_{ij} = M$, dengan M adalah bilangan dengan nilai besar.

Contoh 2.8.

Diberikan diagram jaringan kerja untuk menentukan rute terpendek sebagai berikut:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



Selesaikan masalah rute terpendek tersebut sebagai pemodelan masalah transshipment.

Penyelesaian:

Pemodelan masalah transshipment:

Meminimumkan

$$f = 2x_{12} + 4x_{21} + 8x_{13} + 1x_{31} + 2x_{35} + 5x_{53} + 3x_{23} + 4x_{32} + 2x_{24} + 3x_{42} + 8x_{34} + 9x_{45} + 8x_{54}$$

terhadap kendala

simpul A : $x_{12} + x_{13} = 1$

simpul B : $x_{24} + x_{23} + x_{21} = x_{12} + x_{32} + x_{42}$

simpul C : $x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}$

simpul D : $x_{42} + x_{43} + x_{45} = x_{24} + x_{34} + x_{54}$

simpul E : $x_{45} + x_{35} = 1$

$x_{ij} \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 5$

Dengan buffer = b (agar berbeda dengan node B) maka :

Simpul A : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 + b$

Simpul B : $x_{22} + x_{24} + x_{23} + x_{21} = x_{22} + x_{12} + x_{32} + x_{42}$

atau

$$x_{22} + x_{24} + x_{23} + x_{21} = b$$

$$x_{22} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = b$$

simpul C : $x_{33} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = x_{33} + x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53}$

atau

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$x_{33} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = b$$

$$x_{33} + x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = b$$

$$\text{simpul D : } x_{44} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{54}$$

atau

$$x_{44} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = b$$

$$x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = b$$

$$\text{simpul E : } x_{55} + x_{45} + x_{35} = 1 + b$$

Representasi model tersebut dalam bentuk tabel transshipment adalah:

	A	B	C	D	E	b_i
A	1 0	1 2	8	M	M	1+b
B	4	0	3	2	M	b
C	1	4	0	8	2	b
D	M	3	9	0	5	b
E	M	M	5	8	0	b
a_j	b	b	b	b	1+b	1+5b

dengan $b = 1$.

Solusi optimumnya diperoleh pada plb (penyelesaian layak basis):

$$x_{11}, x_{12}, x_{24}, x_{35}, x_{43}, x_{55}$$

Karena x_{11}, x_{55} menghubungkan node A dan E ke dirinya sendiri, maka solusi optimumnya adalah:

$$x_{12}, x_{24}, x_{35}, x_{43},$$

dengan rute terpendek:

$$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \text{ dan } f_{\text{opt}} = 2 + 2 + 9 + 2 = 15.$$

D. MASALAH ARUS MAKSIMAL

Masalah arus maksimal merupakan salah satu bagian jaringan kerja yang membahas mengenai penentuan kapasitas maksimal yang dapat masuk dan keluar dalam suatu jaringan kerja pada satu waktu tertentu. Pada masalah ini, umumnya arus yang masuk ke suatu simpul tidak sama dengan arus yang keluar dari suatu simpul. Selain itu diasumsikan juga, jika kapasitas suatu busur tidak ditentukan secara spesifik, maka dianggap arus yang masuk ke suatu simpul sama dengan arus yang keluar dari suatu simpul.

Aplikasi dalam masalah arus maksimal ini sangat luas. Diantaranya penentuan jumlah kendaraan dalam suatu jaringan jalan raya dari suatu tempat ke suatu tempat tertentu yang dapat melalui beberapa jalur alternatif serta melewati beberapa persimpangan jalan, dengan beban jalan yang tidak sama. Aplikasi lainnya, adalah pada penentuan jumlah daya listrik yang dapat dialirkan dari suatu gardu induk ke suatu gardu cabang yang dapat menyebar ke beberapa wilayah penerima arus listrik dan pengguna. Masih banyak lagi aplikasi masalah arus maksimal yang ada pada kehidupan sehari-hari. Coba Anda cari yang lain.

Berikut ini diberikan algoritma untuk menyelesaikan suatu masalah yang terkait dengan masalah arus maksimal.

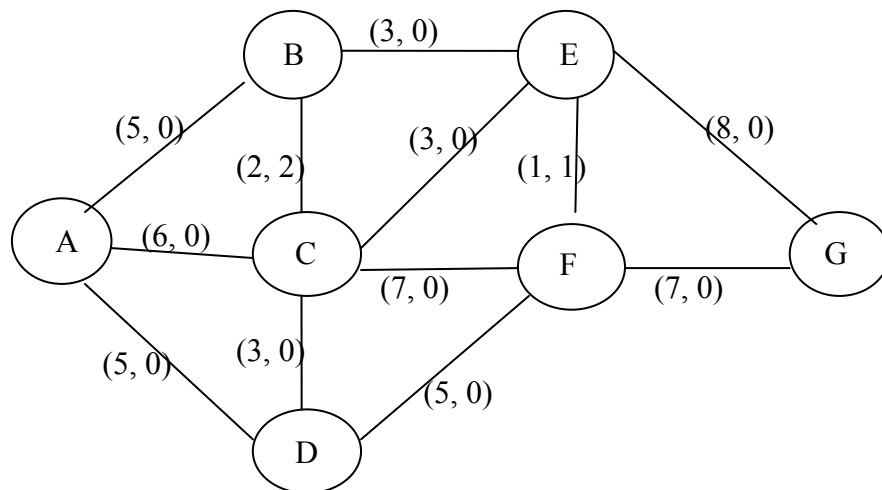
Algoritma Arus Maksimal :

1. Tentukan simpul sumber dan simpul destinasi.
2. (a, b) menotasikan arus dua simpul i dan j dengan a adalah arus dari i ke j dan b adalah arus dari j ke i . Dalam hal ini i adalah simpul keluar dan j adalah simpul masuk.
3. $[d, n]$ menotasikan label tiap simpul dengan d adalah maksimum arus dari simpul i yang bisa ditampung simpul j dan n adalah simpul yang memungkinkan nilai d .
4. Cari jalur dari simpul sumber ke simpul destinasi yang mempunyai kapasitas arus searah dengan jalurnya, yang lebih besar dari nol pada setiap cabangnya.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

5. Tentukan $P_f = \min \{ d_i \}$ dari semua cabang pada langkah no 2.
6. Pada setiap cabang, ubah (a, b) menjadi $(a - P_f, b + P_f)$.
7. Ulangi langkah 2 – 4, sehingga tidak bisa ditemukan jalur lagi.
8. Arus maksimal dari network adalah ΣP_f dalam iterasi-iterasi yang dilakukan.

Contoh 2.9. Diberikan diagram jaringan kerja untuk masalah arus maksimal sebagai representasi arus lalu lintas dalam kota Madani yang mempunyai 7 terminal bus kota dengan nama Terminal A sampai dengan Terminal G. Setiap ruas jalan yang menghubungkan dua terminal mempunyai kapasitas arus kendaraan yang berbeda, ada pula yang hanya satu arah saja. Tentukanlah arus maksimal kendaraan dari Terminal A yang dapat masuk ke Terminal G.



Penyelesaian:

Untuk dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan algoritma arus maksimal yang ada, maka lakukan iterasi-demi iterasi, dengan setiap iterasi melibatkan satu pemilihan jalur dari Terminal A (selanjutnya ditulis A) menuju Terminal G (selanjutnya ditulis G), dengan setiap busur antara dua simpul mempunyai nilai d yang tidak sama dengan nol. Langkah-langkah iterasi yang diambil pada penyelesaian masalah arus lalu lintas tersebut disampaikan sebagai berikut:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Iterasi 1: jalur terpilih A – C – F – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul C : [6, 1], simpul F : [7, 3], simpul G : [7, 6]

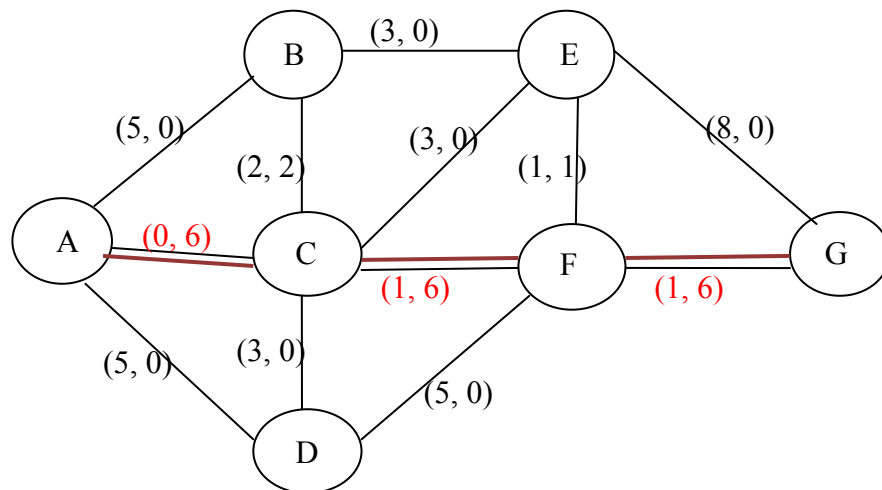
Min $\{ d_i \} = \min \{ 6, 7, 7 \} = 6 \rightarrow P_{f1}$.

Pada setiap (a, b) : A – C menjadi $(6 - 6, 0 + 6) = (0, 6)$

C – F menjadi $(7 - 6, 0 + 6) = (1, 6)$

F – G menjadi $(7 - 6, 0 + 6) = (1, 6)$.

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 6$$

Iterasi 2: jalur terpilih A – B – E – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul B : [5, 1], simpul E : [3, 2], simpul G : [8, 5]

Min $\{ d_i \} = \min \{ 5, 3, 8 \} = 3 \rightarrow P_{f2}$.

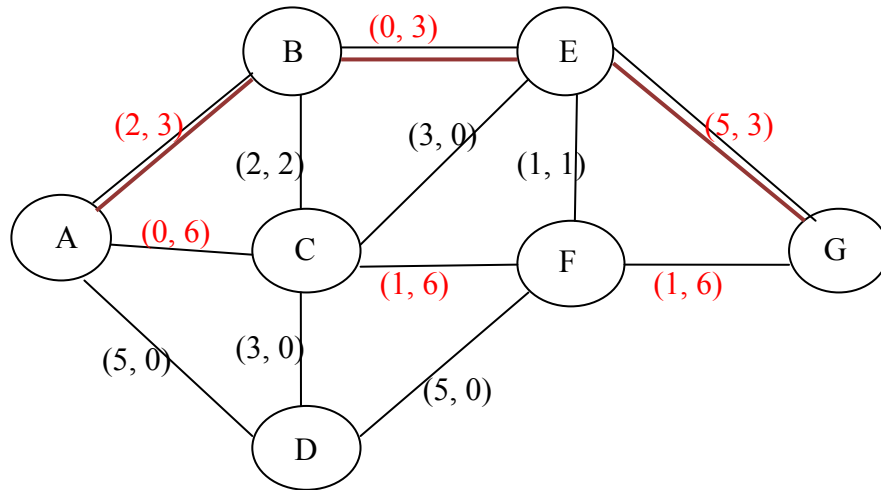
Pada setiap (a, b) : A – B menjadi $(5 - 3, 0 + 3) = (2, 3)$

B – E menjadi $(3 - 3, 0 + 3) = (0, 3)$

E – G menjadi $(8 - 3, 0 + 3) = (5, 3)$.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 9$$

Iterasi 3: jalur terpilih A – B – C – E – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul B : [2, 1], simpul C : [2, 2], simpul E : [3, 3], simpul G : [5, 5]

Min $\{ d_i \} = \min \{ 2, 2, 3, 5 \} = 2 \rightarrow P_{f3}$.

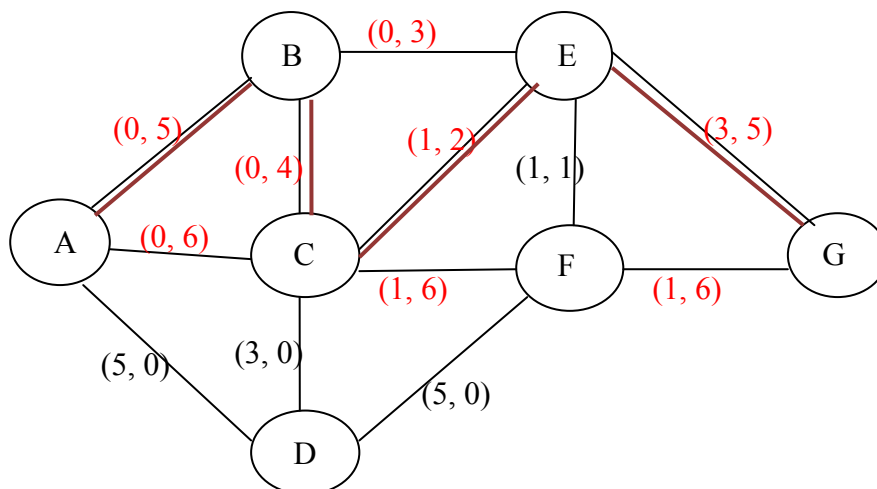
Pada setiap (a, b) : A – B menjadi $(2 - 2, 3 + 2) = (0, 5)$

B – C menjadi $(2 - 2, 2 + 2) = (0, 4)$

C – E menjadi $(3 - 2, 0 + 2) = (1, 2)$

E – G menjadi $(5 - 2, 3 + 2) = (3, 5)$.

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 11$$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Iterasi 4: jalur terpilih A – D – F – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul D : [5, 1], simpul F : [5, 4], simpul G : [1, 6]

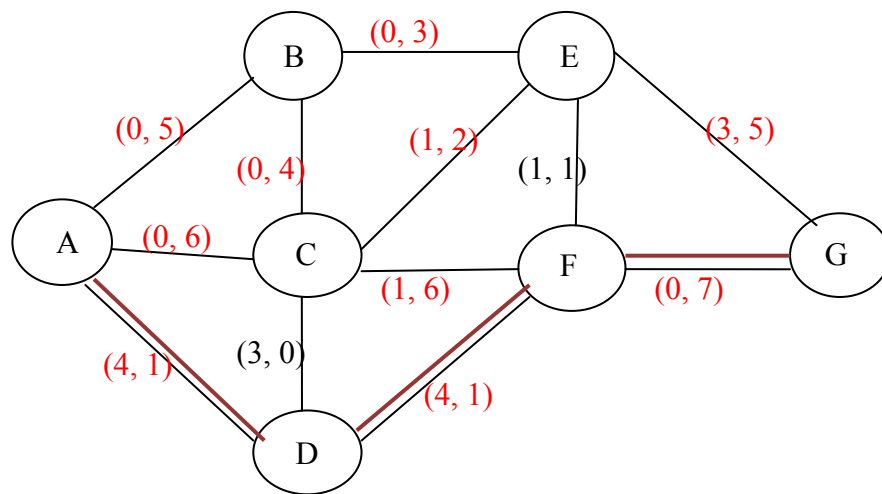
$\text{Min } \{ d_i \} = \text{min } \{ 5, 5, 1 \} = 1 \rightarrow P_{f4}$.

Pada setiap (a, b) : A – D menjadi $(5 - 1, 0 + 1) = (4, 1)$

D – F menjadi $(5 - 1, 0 + 1) = (4, 1)$

F – G menjadi $(1 - 1, 6 + 1) = (0, 7)$.

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 12$$

Iterasi 5: jalur terpilih A – D – F – E – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul D : [4, 1], simpul F : [4, 4], simpul E : [1, 6], simpul G : [3, 5]

$\text{Min } \{ d_i \} = \text{min } \{ 4, 4, 1, 3 \} = 1 \rightarrow P_{f5}$.

Pada setiap (a, b) : A – D menjadi $(4 - 1, 1 + 1) = (3, 2)$

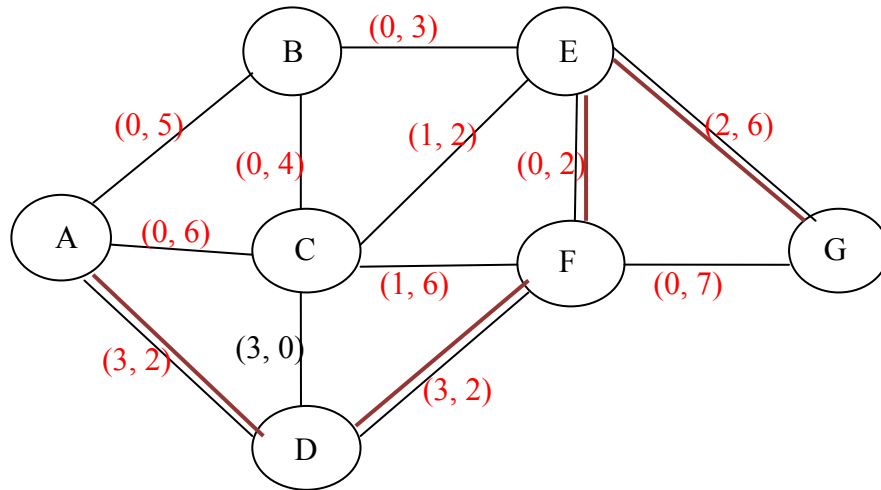
D – F menjadi $(4 - 1, 1 + 1) = (3, 2)$

F – E menjadi $(1 - 1, 1 + 1) = (0, 2)$

E – G menjadi $(3 - 1, 5 + 1) = (2, 6)$.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 13$$

Iterasi 6: jalur terpilih A – D – C – E – G

Dengan $[d, n]$ untuk simpul D : [3, 1], simpul C : [3, 4], simpul E : [1, 3], simpul G : [2, 5]

Min $\{ d_i \} = \min \{ 3, 3, 1, 2 \} = 1 \rightarrow P_{f6}$.

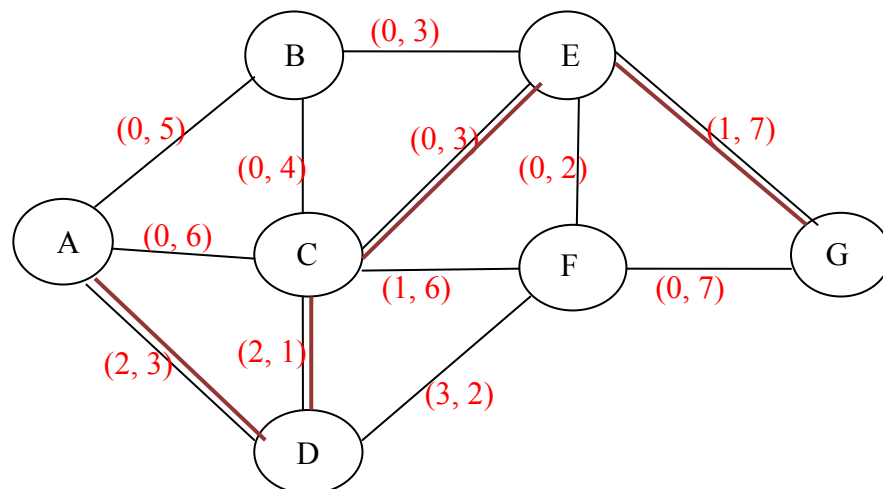
Pada setiap (a, b) : A – D menjadi $(3 - 1, 2 + 1) = (2, 3)$

D – C menjadi $(3 - 1, 0 + 1) = (2, 1)$

C – E menjadi $(1 - 1, 2 + 1) = (0, 3)$

E – G menjadi $(2 - 1, 6 + 1) = (1, 7)$.

Network menjadi:



$$P_f = \sum P_{fi} = 14$$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Jalur A – D – F – G; A – D – C – F – G; A – D – C – E – G tidak bisa di iterasi karena $a = 0$.

Jadi sudah tidak ada jalur lagi pada jaringan kerja tersebut yang dapat di iterasi.

Dengan kata lain hasil iterasi 6 sudah optimal, dengan arus maksimal :

$$\begin{aligned}P_f &= \sum P_{f_i} \\ &= P_{f_1} + P_{f_2} + P_{f_3} + P_{f_4} + P_{f_5} + P_{f_6} \\ &= 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 14.\end{aligned}$$

E. PENJADWALAN PROYEK DENGAN CPM DAN PERT

Dalam pembangunan suatu gedung sekolah akan meliputi kegiatan-kegiatan yang saling berhubungan antara satu kegiatan dengan kegiatan lainnya. Agar pembangunan gedung dapat berjalan dengan baik maka diperlukan perencanaan proyek pembangunan gedung sekolah secara menyeluruh. Perencanaan proyek tersebut berupa perencanaan gambar (master plan), perencanaan material (bahan bangunan), perencanaan jumlah dan keahlian tenaga kerja, perencanaan pembiayaan, serta perencanaan waktu pelaksanaan. Pada perencanaan tersebut terdapat rincian kegiatan-kegiatan yang dilakukan dan harus sesuai master plan desain diantaranya membuat lubang pondasi, memasang pondasi, memasang tiang pancang, memasang tembok, memasang rangka atap, memasang atap, membuat rangka pintu dan jendela, memasang genting, dan seterusnya hingga tahap finishing dicapai.

Hubungan antara kegiatan-kegiatan tersebut antara lain adalah dapat dikerjakan bersamaan waktunya, dapat dikerjakan setelah kegiatan lain diselesaikan, dapat dilakukan kapan saja tanpa terpengaruh kegiatan lain, dapat dikerjakan dengan penundaan, dan sebagainya. Karena bermacamnya hubungan antar kegiatan yang tentu saja akan berakibat pada efisiensi waktu, biaya dan tenaga, maka perlu ada pengaturan yang baik antara kegiatan-kegiatan yang ada. Metode CPM dan PERT adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk perencanaan proyek sehingga efisiensi yang diinginkan bisa tercapai.




Manajemen proyek dengan CPM (Critical Path Method) dan PERT (Project Evaluation and Review Technique) telah berkembang sebagai teknik analisis perencanaan, penjadwalan, dan pengendalian proyek dengan tujuan mengoptimalkan efisiensi pelaksanaan proyek. Metode CPM adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan waktu kritis dan kegiatan kritis, sedangkan metode PERT adalah metode yang digunakan tidak hanya menentukan waktu kritis, namun juga untuk menentukan dugaan yang mungkin terjadi pada perencanaan proyek.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Sebuah proyek digambarkan dengan diagram jaringan kerja yang terdiri dari simpul dan busur sebagai rangkaian kegiatan yang saling berkaitan. Simpul mendefinisikan batas awal dan akhir kegiatan, sedangkan busur mendefinisikan kegiatan-kegiatan yang saling berkaitan dan harus dilakukan dalam satu urutan yang logis. Dalam hal ini, rangkaian kegiatan yang disusun harus memperhatikan hubungan antar kegiatan. Sebelum dibahas CPM dan PERT, terlebih dahulu akan dijelaskan tentang diagram jaringan kerja.

Diagram Jaringan Kerja

Dalam menggambarkan suatu jaringan kerja, digunakan simbol-simbol berikut:

1.  anak panah atau busur berarah (*arrow*), menyatakan sebuah kegiatan yang didefinisikan sebagai hal yang memerlukan waktu.
2.  lingkaran kecil atau simpul (*node*), menyatakan sebuah peristiwa (*event*) yang didefinisikan sebagai ujung atau pertemuan dari satu atau beberapa kegiatan.
3.  anak panah terputus-putus, menyatakan kegiatan semu (*dummy*). *Dummy* berfungsi untuk membatasi mulainya kegiatan dan tidak memerlukan waktu.

Dalam pelaksanaannya, simbol-simbol ini digunakan dengan aturan-aturan berikut:

1. Di antara dua *event* yang sama, hanya boleh digambarkan satu anak panah.
2. Nama suatu kegiatan dinyatakan dengan huruf atau dengan nomor *event*.
3. Kegiatan harus mengalir dari *event* bernomor rendah ke *event* bernomor tinggi.
4. Diagram hanya memiliki sebuah *initial event* (awal kejadian) dan sebuah *terminal event* (akhir kejadian).

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

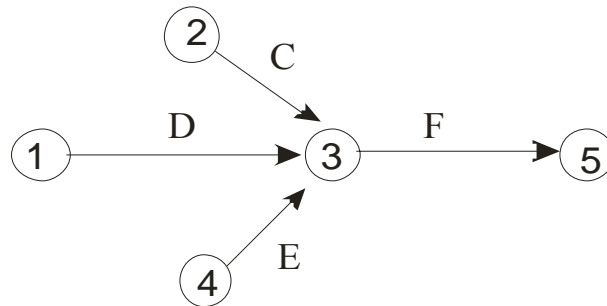
Adapun AON (*Activity on Node*) pada kegiatan, dinyatakan dengan:

1. Jika kegiatan A harus diselesaikan dahulu sebelum kegiatan B dapat dimulai, maka hubungan antara kedua kegiatan tersebut dapat digambarkan sebagai:



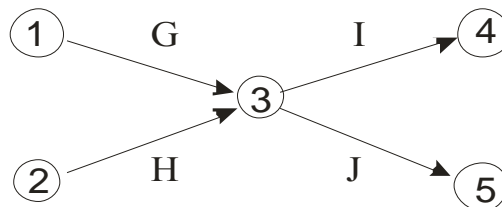
Gambar 1. Kegiatan A yang didahului kegiatan B

2. Jika kegiatan C, D, dan E harus selesai sebelum kegiatan F dapat dimulai, maka:



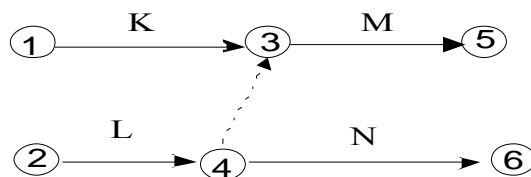
Gambar 2. Kegiatan F yang didahului kegiatan C, D, E

3. Jika kegiatan G dan H harus selesai sebelum kegiatan I dan J, maka:



Gambar 3. Kegiatan I, J yang didahului kegiatan G, H

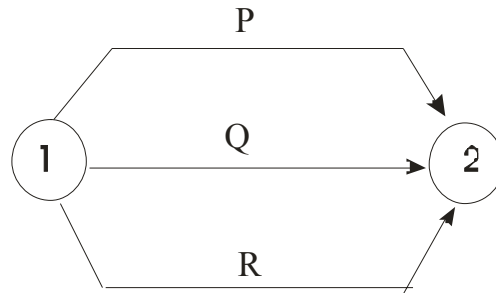
4. Jika kegiatan K dan L harus selesai sebelum kegiatan M dimulai, dan kegiatan N dapat dimulai setelah kegiatan L sudah selesai, maka:



Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

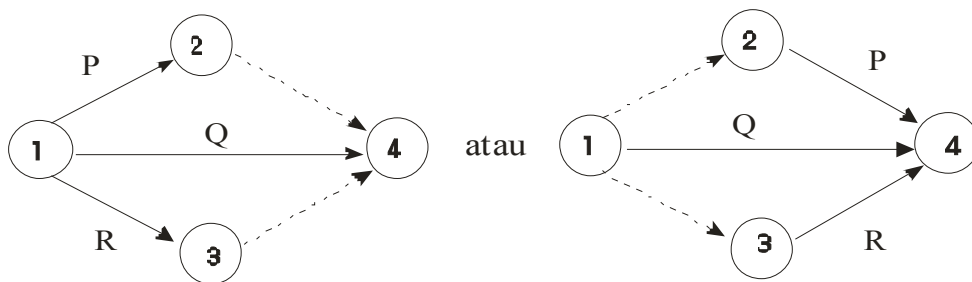
Gambar 4. Kegiatan K, L harus diselesaikan sebelum kegiatan M dimulai, dan kegiatan N dapat dimulai setelah kegiatan L selesai

5. Jika kegiatan P, Q, dan R mulai dan selesai pada lingkaran kejadian yang sama, maka dianggap salah jika menggambar seperti berikut:



Gambar 5. Penggambaran yang tidak benar untuk kegiatan P, Q, R yang dilaksanakan secara bersamaan

Pada Gambar 5, kegiatan-kegiatan dari simpul 1 ke simpul 2 adalah kegiatan P atau kegiatan Q atau R. Untuk membedakan ketiga kegiatan tersebut, masing-masing harus menggunakan *dummy* sebagai berikut, *dummy* dapat diletakkan pada permulaan atau akhir kegiatan.



Gambar 6. Penggambaran yang benar untuk kegiatan P, Q, R yang dilaksanakan secara bersamaan

Contoh 1:

Buatlah diagram proyek dari rangkaian kegiatan-kegiatan yang terangkum dengan urutan sebagai berikut:

CPM (Critical Path Method)

Setelah jaringan kerja suatu proyek digambarkan, langkah berikutnya adalah menganalisis diagram kerja untuk mengestimasi waktu yang diperlukan untuk penyelesaian seluruh kegiatan. Dalam menganalisis waktu terdapat satu atau beberapa lintasan dari kegiatan-kegiatan pada jaringan kerja yang menentukan jangka waktu penyelesaian seluruh proyek. Lintasan tersebut dinamakan lintasan kritis. Sedangkan lintasan yang tidak kritis merupakan lintasan yang mempunyai jangka waktu lebih pendek dari pada lintasan kritis. Dengan demikian lintasan yang tidak kritis ini mempunyai kelonggaran waktu yang dinamakan waktu mengambang (*slack/float*). *Slack* terbagi menjadi dua yaitu *total slack* dan *free slack*.

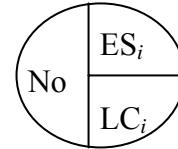
Sebelum membahas perhitungan, berikut ini akan disajikan notasi-notasi yang digunakan:

1. ES_i = *earliest activity start time*, saat tercepat dimulainya kegiatan.
2. LC_i = *latest completion time*, yaitu saat paling lambat diselesaikannya kegiatan.
3. d_{ij} = *activity duration time*, yaitu waktu yang diperlukan untuk suatu kegiatan (hari).
4. a_{ij} = nama aktifitas antara *event i* dan *event j*.
5. FF_{ij} = *free slack/free float*.
6. TF_{ij} = *total slack/total float*.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Perhitungan yang harus dilakukan terdiri atas dua tahap yaitu perhitungan maju dan perhitungan mundur. Untuk mempermudah menunjukkan hasil perhitungan, *node* dibagi atas tiga bagian sebagai berikut:

1. No = Nomor *event*.
2. ES_i = ruang untuk hasil perhitungan maju.
3. LC_i = ruang untuk hasil perhitungan mundur.

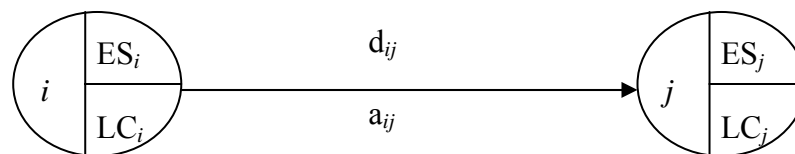


Perhitungan Maju (*Foward Computation*).

Pada perhitungan maju, dimulai dari *initial event* menuju ke *terminal event*. Ada tiga langkah yang dilakukan pada perhitungan maju, yaitu: Saat tercepat terjadinya *initial event*, berlaku $ES_0 = 0$. Diasumsikan bahwa waktu dimulai kegiatan adalah 0, karena belum ada kegiatan yang dilakukan sebelum kegiatan awal.

Jika *initial event* terjadi pada waktu ke nol, maka: $ES_0 = 0$

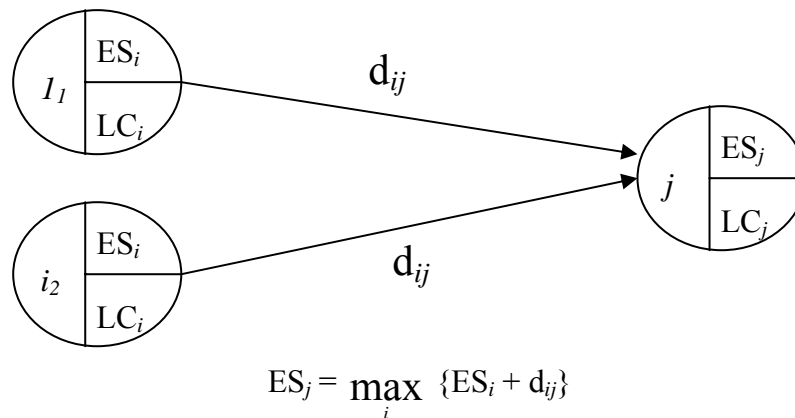
Untuk kegiatan selanjutnya, setelah waktu pertama pengerjaan suatu kegiatan dijelaskan sebagai berikut:



$$ES_j = ES_i + d_{ij}$$

Sebuah *event* dapat terjadi jika kegiatan-kegiatan yang mendahuluinya telah terselesaikan. Maka saat paling cepat terjadinya sebuah *event* sama dengan nilai terbesar dari saat tercepat untuk menyelesaikan kegiatan-kegiatan dari *event* tersebut. *Event* yang menggabungkan beberapa kegiatan (*merge event*), digambarkan berikut ini:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

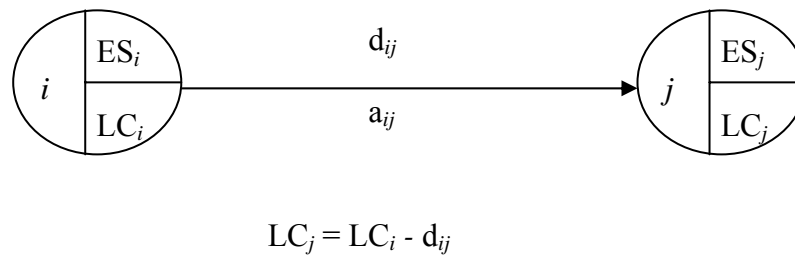


Perhitungan Mundur (*Backward Computation*).

Perhitungan mundur bergerak dari *terminal event* menuju *initial event*. Perhitungan mundur ini mempunyai tiga langkah perhitungan, yaitu:

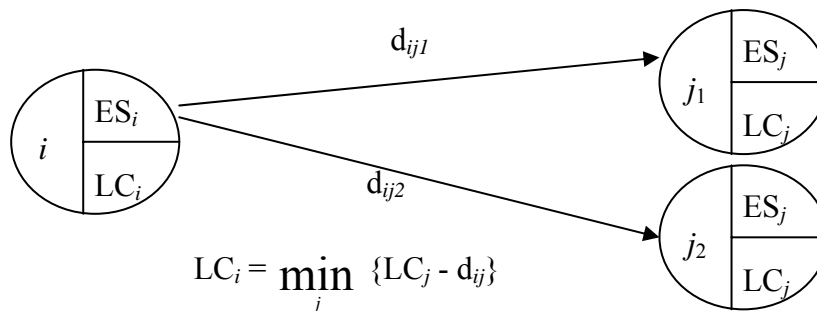
Pada *terminal event* berlaku $ES_{\text{end}} = LC_{\text{end}}$.

Saat paling lambat memulai kegiatan sama dengan saat paling lambat untuk menyelesaikan kegiatan itu dikurangi dengan durasi kegiatan tersebut.



Event yang mengeluarkan beberapa kegiatan (*burst event*) diselesaikan dengan memperhitungkan saat paling lambat terjadinya sebuah *event* sama dengan nilai terkecil dari saat paling lambat untuk memulai kegiatan-kegiatan yang berpangkal pada *event* tersebut.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



Uji Optimal

Suatu kegiatan a_{ij} merupakan kegiatan kritis jhj memenuhi 3 kondisi sebagai berikut: 1. $ES_i = LC_i$; 2. $ES_j = LC_j$; 3. $ES_i + d_{ij} = ES_j$.

Menentukan Lintasan Kritis

1. Tandailah lingkaran merah pada masing-masing simpul yang memenuhi $ES_i = LC_i$.
2. Tandailah dengan garis merah kegiatan-kegiatan kritisnya.
3. Lintasan kritisnya merupakan kegiatan-kegiatan kritis dari simpul awal sampai simpul akhir.

Lintasan Kritis merupakan rangkaian kegiatan-kegiatan kritis.

Lintasan lain yang bukan lintasan kritis disebut lintasan sub kritis, yaitu lintasan yang memuat kegiatan-kegiatan yang tidak kritis, artinya kegiatan-kegiatan yang mempunyai kelonggaran waktu (*float / slack*).

Contoh 2:

Tentukan waktu kritis dan lintasan kritis, bila diketahui kegiatan-kegiatan (notasi :

a) dan waktu pengerjaan (notasi : D) ditentukan sebagai berikut:

a	D
A	4

a	D
J	4

α	
E	D, K

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

B	2
C	10
D	2
E	5
F	3
G	13
H	4

K	6
L	7
M	5
N	9
P	8
Q	4

D	C
K	J, L
Q, L	G, M
C	B
J, C	P, H, F
B, F	A
P, M	N
H	G

Jawab:

Kegiatan awal : Q, E (Q, E merupakan dua kegiatan yang ada di kiri namun tidak ada di kanan).

Kegiatan akhir : A, G, N (A, G, dan N merupakan tiga kegiatan yang ada di kanan namun tidak ada di kiri).

Waktu Mengambang (*Float/ Slack*)

Setelah perhitungan maju dan perhitungan mundur, maka berikutnya harus dilakukan perhitungan waktu mengambang dari kegiatan (i, j) yaitu *total float* (TF) dan *free float* (FF).

Total float adalah jumlah waktu penyelesaian kegiatan yang dapat diundur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dari penyelesaian proyek secara keseluruhan, adalah:

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - d_{ij}$$

Sedangkan *free float* adalah jumlah waktu penyelesaian suatu kegiatan diukur tanpa mempengaruhi saat paling cepat dari dimulainya kegiatan yang lain, adalah:

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - d_{ij}$$

Jalur kritis diketahui dari kegiatan-kegiatan yang hasil perhitungannya tidak mempunyai *float*, dengan kata lain kegiatan kritis mempunyai $TF_{ij} = FF_{ij} = 0$.

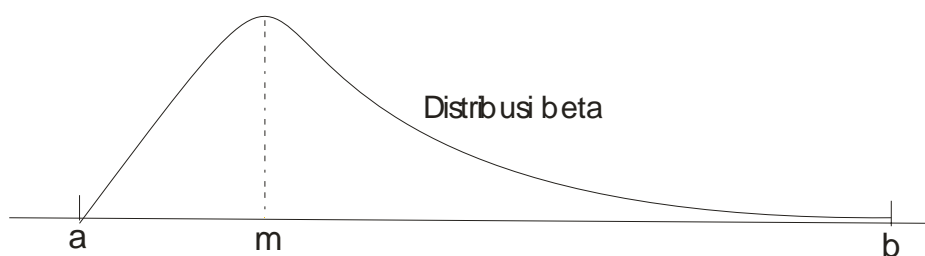
Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Pendekatan Tiga Dugaan PERT

Dalam CPM, durasi setiap kegiatan diketahui secara pasti. Tetapi pada kenyataannya, untuk kebanyakan pelaksanaan proyek tidak diketahui secara pasti. Untuk itu, PERT mempertimbangkan ketidakpastian pengerjaan proyek dengan tiga pendugaan waktu untuk setiap kegiatan, yang dinyatakan sebagai berikut:

1. Dugaan paling mungkin (m) = waktu yang paling realitis yang dibutuhkan untuk melakukan suatu kegiatan.
2. Dugaan optimis (a) = waktu yang tidak dapat terjadi, tetapi mungkin terjadi jika semua hal berlangsung dengan lancar.
3. Dugaan pesimis (b) = waktu yang tidak dapat terjadi, tetapi mungkin terjadi jika semua hal berlangsung dengan buruk.

Ketiga pendugaan ditunjukkan dengan peluang distribusi pada grafik berikut:



Gambar Model Distribusi Peluang pada Durasi Kegiatan Metode PERT dengan Tiga Waktu Pendugaan

PERT memakai pendekatan yang menganggap bahwa kurun waktu kegiatan tergantung pada banyak faktor dan variasi, sehingga perkiraan diberi rentang (*range*) dengan tiga estimasi waktu. Selain itu, PERT juga menggunakan parameter lain untuk mengukur ketidakpastian secara kuantitatif seperti dihitung dengan standar deviasi dan variansi. Untuk lebih lengkapnya, perhitungan PERT dalam tiga waktu pendugaan dijelaskan sebagai berikut:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Dalam tiga waktu pendugaan terdapat dua asumsi yang mengubah a, b, m menjadi nilai harapan (t_e) dan ragam (σ) dari waktu yang dibutuhkan untuk suatu kegiatan.

Asumsi pertama : lebar antara a (dugaan optimis) dan b (dugaan pesimis) mempunyai standar deviasi 6, berarti $6\sigma = b - a$. Sehingga ragam setiap kegiatan adalah:

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}(b - a)\right]^2$$

Asumsi kedua: peluang distribusi pada setiap waktu yang dibutuhkan untuk berkegiatan merupakan distribusi beta.

Distribusi beta mempunyai bentuk yang tepat untuk ketiga waktu dugaan, seperti yang digambarkan sebelumnya dengan modus (m) dan dua ujungnya (a dan b), diasumsikan dengan $0 \leq a \leq b$, karena distribusi beta memiliki empat sifat yang tepat untuk menaksirkan probabilitas setiap kegiatan dalam proyek, yaitu:

1. Probabilitas kecil (1 dalam 100) untuk mencapai waktu optimis (waktu terpendek) diberi simbol a.
2. Probabilitas kecil (1 dalam 100) untuk mencapai waktu pesimis (waktu terpanjang) diberi simbol b.
3. Waktu yang paling mungkin diberi simbol m, dapat diberi simbol m, dapat bergerak dengan bebas antara a dan b.
4. Tingkat ketidakpastiannya dalam memperkirakan, dapat diukur.
5. Diketahui dari gambar nilai tengah rentang $\frac{a + b}{2}$, sehingga

t_e merupakan rata-rata dari modus dan nilai tengah rentang, dengan modus bernilai dua pertiga dan sepertiga untuk nilai tengah rentang, dirumuskan sebagai berikut:

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$t_e = \frac{1}{3} \left[2m + \frac{1}{2}(a + b) \right]$$

Setelah perhitungan dugaan nilai harapan dan ragam untuk setiap kegiatan, dapat dilakukan tiga asumsi berikutnya:

Asumsi ketiga: waktu kegiatan yang satu dengan yang lainnya merupakan peubah acak yang bebas.

Asumsi keempat: lintasan kritis membutuhkan waktu yang lebih lama dari lintasan yang lain. Sehingga nilai harapan dan ragam waktu proyek merupakan penjumlahan nilai harapan dan ragam pada kegiatan-kegiatan jalur kritis.

Asumsi kelima: waktu penyelesaian proyek mempunyai sebaran normal.

Dalam hal ini, memiliki sebaran normal karena penjumlahan dari beberapa peubah acak dan bentuk umum dari teorema limit tengah berimplikasi bahwa sebaran peluang bagi jumlah peubah acak distribusi beta adalah mendekati sebaran normal.

Dalam mengevaluasi hasil perhitungan pada sebaran normal, dapat dibandingkan hasil perhitungan waktu yang dibutuhkan dalam penyelesaian proyek jalur kritis dengan waktu yang dijadwalkan. Salah satu caranya yaitu satuan baku dengan nilai z , dijelaskan dengan definisi berikut:

Definisi. Suatu pengamatan X dari suatu populasi dengan nilai harapan t_e dan simpangan baku σ , mempunyai nilai z atau skor z yang didefinisikan sebagai

$$z = \frac{x - t_e}{\sigma}$$

Percepatan Umur Proyek (*Crashing Project*)

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Crashing project adalah mempercepat pengerjaan seluruh kegiatan proyek secara efisien. Dalam percepatan waktu pengerjaan proyek, terdapat dua estimasi waktu dan biaya dari hasil perhitungan CPM yang telah dilaksanakan, yang meliputi:

Normal time (D_{ij}) adalah estimasi waktu penyelesaian kegiatan pada waktu normal.

Crash time (d_{ij}) adalah estimasi waktu tercepat untuk menyelesaikan suatu kegiatan.

Normal cost ($C_{D_{ij}}$) adalah estimasi biaya penyelesaian kegiatan pada waktu yang normal.

Crash cost ($C_{d_{ij}}$) adalah estimasi biaya penyelesaian suatu kegiatan dalam *crash time* atau pada batas waktu yang ditentukan.

Dalam *crashing project* terdapat empat langkah penyelesaian, yaitu:

1. Tentukan jalur kritis dan kegiatan yang berada pada jalur kritis
2. Hitung *crash cost* per periode untuk seluruh kegiatan dalam jaringan proyek (dengan asumsi bahwa *crash cost* bersifat linear), rumus yang digunakan adalah:

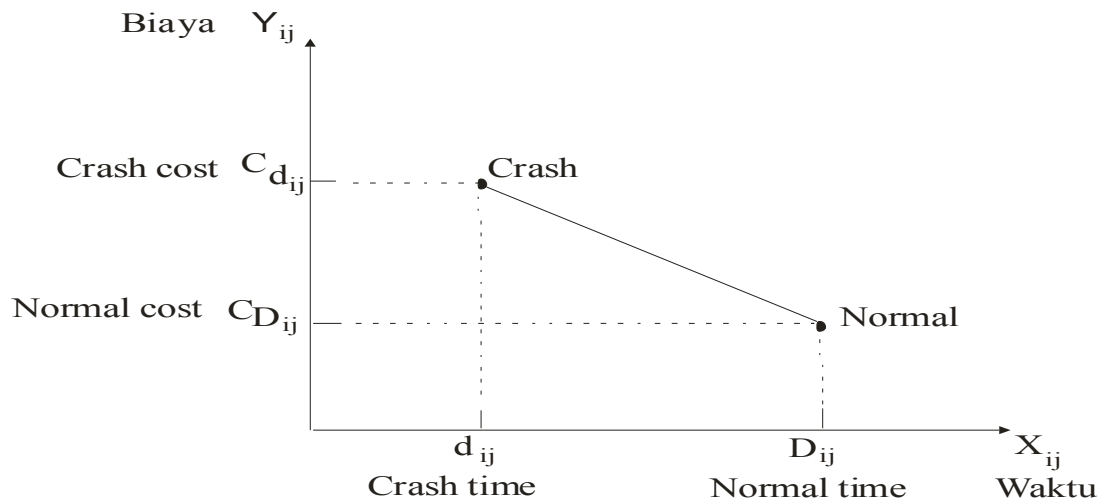
$$\text{crash cost / periode} = \frac{\text{crash cost} - \text{normal cost}}{\text{normal time} - \text{crash time}}$$

3. Pilih kegiatan pada jalur kritis yang memiliki *crash cost* paling minimum
4. Periksa, apakah kegiatan yang dipercepat tersebut masih merupakan jalur kritis. Jika jalur tersebut tetap jalur terpanjang dalam jaringan, ulangi langkah ketiga. Jika tidak, tentukan jalur kritis baru dan ulangi langkah ketiga. Hitungan selesai setelah semua jalur kritis pada jaringan kerja telah dihitung dengan langkah tiga.

Dari keterangan di atas dapat disimpulkan bahwa dalam sebuah diagram kerja jalur kritis nilainya tidak tunggal, tetapi hanya ada satu jalur kritis yang

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

paling tepat untuk diterapkan. Keempat bagian dalam estimasi waktu dan biaya, dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar Percepatan Waktu Pengerjaan Suatu Kegiatan

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Soal-soal Latihan 2.2. :

Buatlah diagram panah (Network) untuk tiap-tiap soal berikut:

1. Buatlah diagram panah yang terdiri dari kegiatan-kegiatan A, B, C, ..., P yang memenuhi hubungan urutan berikut ini:
 - i. A, B, dan C kegiatan-kegiatan pertama dari proyek, dapat dimulai secara serentak.
 - ii. Kegiatan D, E, dan F dimulai segera setelah kegiatan A selesai.
 - iii. Kegiatan I dan G dimulai setelah kegiatan B dan D selesai.
 - iv. Kegiatan H dimulai setelah kegiatan C dan G selesai.
 - v. Kegiatan K dan L melanjutkan kegiatan I.
 - vi. Kegiatan J melanjutkan kegiatan E dan H.
 - vii. Kegiatan M dan N melanjutkan kegiatan F tetapi tidak dapat dimulai sampai kegiatan E dan H selesai.
 - viii. Kegiatan O melanjutkan kegiatan M dan I.
 - ix. Kegiatan P melanjutkan kegiatan J, L, dan O.
 - x. Kegiatan K, N, dan P adalah kegiatan akhir proyek.

2. Tabel berikut memberikan data untuk membangun sebuah rumah baru. Buatlah model jaringan yang bersangkutan dan lakukan penghitungan jalur kritis.

Kegiatan	Penjabaran	Kegiatan yang tepat sebelumnya	Durasi (hari)
A	Membersihkan lokasi	-	1
B	Membawa perkakas ke lokasi	-	2
C	Melakukan penggalian	A	1
D	Tuangkan fondasi	C	2
E	Pemasangan pipa ledeng dari luar	B,C	6
F	Buat kerangka rumah	D	10
G	Pemasangan kawat listrik	F	3
H	Memasang lantai	G	1
I	Memasang atap	F	1
J	Pemasangan pipa ledeng dari dalam	E,H	5
K	Memasang atap	I	2
L	Pemasangan lapisan dinding luar	F,J	1
M	Memasang jendela dan pintu luar	F	2
N	Membangun tembok	L,M	4
O	Mengisolasi dinding dan langit-langit	G,J	2
P	Menutup dinding dan langit-langit	O	2

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Q	Mengisolasi atap	I,P	1
R	Menyelesaikan interior	P	7
S	Menyelesaikan eksterior	I,N	7
T	Membuat taman	S	3

3. Untuk mempersiapkan anggaran tahun berikutnya, sebuah perusahaan harus mengumpulkan informasi dari bagian penjualan, produksi, akuntansi dan keuangan. Tabel berikut menunjukkan kegiatan dan lama kegiatan. Siapkan model jaringan dari masalah ini dan lakukanlah penghitungan jalur kritis.

Kegiatan	Penjabaran	Kegiatan yang tepat sebelumnya	Durasi (hari)
A	Ramalkan volume penjualan	-	10
B	Pelajari pasar persaingan	-	7
C	Rancang barang dan fasilitas	A	5
D	Susun jadwal produksi	C	3
E	Perkirakan biaya produksi	D	2
F	Tetapkan harga penjualan	B,E	1
G	Susun anggaran	E,F	14

4. Kegiatan-kegiatan yang termasuk dalam pelayanan paduan suara dengan cahaya lilin diberikan dalam tabel berikut. Susun model jaringan dan lakukan penghitungan jalur kritis.

Kegiatan	Penjabaran	Kegiatan yang tepat sebelumnya	Durasi (hari)
A	Pilih musik	-	21
B	Pelajari musik	A	14
C	Buat salinan dan beli buku-buku	A	14
D	Percobaan	B,C	3
E	Latihan	D	70
F	Latihan solo	D	70
G	Sewa kandil	D	14
H	Beli lilin	G	1
I	Dirikan dan hias kandil	H	1
J	Beli dekorasi	D	1
K	Menyiapkan dekorasi	J	1
L	Pesan syal jubah paduan suara	D	7
M	Setrika jubah	L	7
N	Periksa sistem PA	D	7
O	Pilih track musik	N	14
P	Tentukan sistem PA	O	1
Q	Latihan akhir	E,F,P	1
R	Kelompok paduan suara	Q,I,K	1
S	Program akhir	M,R	1

5. Tabel berikut meringkaskan kegiatan-kegiatan untuk memindahkan kabel listrik beraliran 13,8 kilovolt sepanjang 1700 kaki akibat dari pelebaran ruas

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

jalan di mana saluran saat ini dipasang. Gambarlah model jaringan dan lakukan penghitungan jalur kritis.

Kegiatan	Penjabaran	Kegiatan yang tepat sebelumnya	Durasi (hari)
A	Tinjauan tugas	-	1
B	Beritahu para pelanggan tentang putusnya aliran listrik untuk sementara	A	0,5
C	Bebaskan tanah	A	1
D	Mencari petugas	A	0,5
E	Dapatkan tiang dan bahan-bahan	C,D	3
F	Membagikan tiang	E	3,5
G	Koordinasi lokasi tiang	D	0,5
H	Pemancangan	G	0,5
I	Menggali lubang-lubang	H	3
J	Buat kerangka dan dirikan tiang-tiang	F,I	4
K	Menutupi alat konduktor lama	F,I	1
L	Menarik alat konduktor baru	J,K	2
M	Memasang bahan selebihnya	L	2
N	Menggantung alat konduktor	L	2
O	Memotong pohon-pohon	D	2
P	Mematikan listrik dan mengganti saluran	B,M,N,O	0,1
Q	Menghidupkan listrik dan memasang saluran baru secara bertahap	P	0,5
R	Pembersihan	Q	1
S	Mengganti alat konduktor lama	Q	1
T	Mengganti tiang-tiang lama	S	2
U	Mengembalikan bahan ke toko	I	2

6. Kegiatan-kegiatan untuk membeli sebuah mobil baru diringkaskan dalam tabel berikut ini. Gambarlah model jaringan dan lakukan perhitungan jalur kritis.

Kegiatan	Penjabaran	Kegiatan yang tepat sebelumnya	Durasi (hari)
A	Melakukan studi kelayakan	-	3
B	Mencari calon pembeli untuk mobil saat ini	A	14
C	Mendaftarkan model-model yang mungkin	A	1
D	Penelitian untuk kemungkinan	C	3

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

	semua model		
E	Mewawancarai para montir	C	1
F	Mengumpulkan iklan-iklan dealer	C	2
G	Menyusun dan mengatur semua informasi yang bersangkutan	D,E,F	1
H	Memilih tiga model terbaik	G	1
I	Melakukan test drive pada ketiga pilihan	H	3
J	Mengumpulkan informasi tentang garansi dan pendanaan	H	2
K	Memilih satu mobil	I,J	2
L	Membandingkan para dealer dan memilih dealer	K	2
M	Mencari warna dan pilihan yang diinginkan	L	4
N	Melakukan test drive pada model terpilih sekali lagi	L	1
O	Membeli mobil baru	B,M,N	3

7. Tentukanlah lintasan kritis dan waktu kritis dari perencanaan proyek berikut dengan data-data tentang rangkaian kegiatan dan durasi waktu yang diperlukan ditampilkan dalam tabel berikut ini:

a	D
A	1
B	2
C	1
D	2
E	6
F	10
G	3
H	1
I	1
J	5

a	D
K	2
L	1
M	2
N	4
O	2
P	2
Q	1
R	7
S	7
T	3

α	
A	C
C	D
B, C	E
D	F
F	G
G	H
F	I
E, H	J
I	K

α	
F, J	L
F	M
L, M	N
G, J	O
O	P
I, P	Q
P	R
I, N	S
S	T

8. Tentukanlah lintasan kritis dan waktu kritis dari perencanaan proyek berikut dengan data-data tentang rangkaian kegiatan dan durasi waktu yang diperlukan ditampilkan dalam tabel berikut ini:

a	D
A	10
B	12
C	8

α	
A	-
B	-
C	B

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

D	7
E	10
F	9
G	6

D	A, C
E	C
F	C
G	D,E, F

9. Tentukanlah lintasan kritis dan waktu kritis dari perencanaan proyek berikut dengan data-data tentang rangkaian kegiatan dan durasi waktu yang diperlukan ditampilkan dalam tabel berikut ini:

a	D
A	20
B	25
C	17
D	19
E	21
F	22
G	18

a	D
H	20
I	21
K	17
L	14
M	10
N	20
O	22

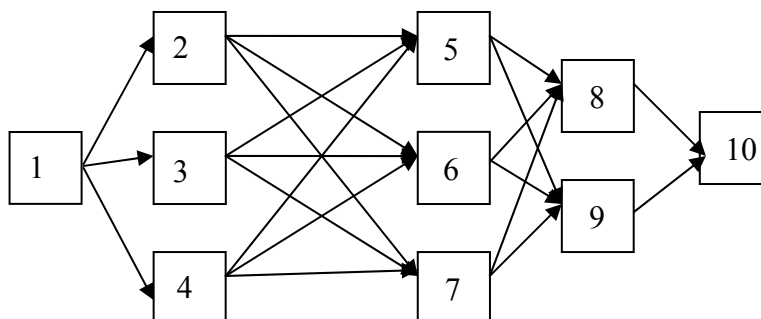
α	
A	C, D
B	E
A	E
C	F
D	G
E	H, I
G	K, L
K	M, O
L	N

BAB IV. PEMROGRAMAN DINAMIK

Pemrograman dinamik (*dynamic programming*) merupakan salah satu teknik pengambilan keputusan untuk menyelesaikan masalah optimasi multistage dengan menguraikannya menjadi bagian-bagian masalah yang lebih kecil, dan karena itu lebih sederhana dalam perhitungan. Dalam teknik ini, keputusan yang menyangkut suatu persoalan dioptimalkan secara bertahap dan bukan secara sekaligus. Jadi, inti dari teknik ini adalah membagi satu persoalan menjadi beberapa bagian persoalan yang dalam program dinamis disebut tahap, kemudian memecahkan tiap tahap sampai seluruh persoalan telah terpecahkan.

Ilustrasi Program Dinamik

Seorang *salesman* harus berangkat dari satu kota ke kota lainnya. Diantara kota asal dan kota tujuan itu terdapat beberapa kota lain yang dapat digunakan sebagai tempat persinggahan sementara. Kota-kota yang dapat dilewati itu dapat digambarkan sebagai berikut :



Meskipun kota awal dan kota tujuan terakhir diketahui, untuk setiap kota yang akan ditempuhnya, *salesman* tersebut memiliki beberapa alternatif dengan ongkos

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

yang berbeda. Data ongkos yang harus dibayar jika *salesman* itu meninggalkan kota i dan menuju ke kota j (c_{ij}) adalah sebagai berikut :

	2	3	4		5	6	7		8	9		10			
1	2	4	3		2	7	4	6		5	1	4		8	3
				3	3	2	4		6	6	3		9	4	
				4	4	1	5		7	3	3				

Rute manakah yang dapat menghasilkan ongkos terkecil?

Dari persoalan diatas, ada 4 tahap (*stage*) yang harus dijalani untuk melakukan perjalanan dari kota (*state*) asal di 1 ke tujuan di 10. Untuk dapat menyelesaikan persoalan ini, maka pertama-tama harus diingat bahwa keputusan terbaik yang dibuat pada suatu *stage* belum tentu menghasilkan keputusan optimum secara menyeluruh. Berdasarkan strategi pemilihan ini, maka rute yang akan memberikan ongkos terkecil ialah 1 – 2 – 6 – 9 – 10 dengan ongkos total 13. akan tetapi, jika dia mau sedikit berkorban pada salah satu *stage* maka akan diperoleh penghematan yang lebih besar. Sebagai contoh : 1 – 4 – 6 lebih murah (secara keseluruhan) daripada 1 – 2 – 6.

Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan persoalan ini ialah dengan menggunakan cara coba-coba (*trial and error*). Akan tetapi, jumlah rute yang dapat dilalui cukup banyak (ada 18) sehingga menghitung ongkos total untuk masing-masing rute itu akan sangat membosankan. Dengan program dinamis, persoalan itu dapat diselesaikan secara lebih sederhana.

Pemecahan persoalan dengan program dinamis ini dimulai dengan mengambil bagian kecil dari suatu persoalan dan mencari solusi optimumnya. Kemudian, bagian persoalan itu diperluas sedikit demi sedikit dan dicari solusi optimumnya yang baru. Demikian seterusnya hingga persoalan asal terpecahkan secara lengkap. Untuk lebih jelasnya, perhatikan kembali ilustrasi diatas.

Tetapkan variabel-variabel keputusan x_n sebagai tempat-tempat persinggahan pada *stage* n ($n = 1, 2, 3, 4$). Maka rute yang dijalani adalah 1 – x_1 –

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$x_2 - x_3 - x_4$, dimana x_4 adalah kota (*state*) 10 atau $x_4 = 10$. Selanjutnya tetapkan pula variabel-variabel berikut :

1. $f_n(s, x_n)$ = ongkos total yang harus dibayar jika *salesman* itu berada di kota s dan memilih x_n sebagai tempat persinggahan berikutnya.
2. Untuk s dan n tertentu, x_n^* adalah nilai x_n yang meminimumkan $f_n(s, x_n)$.
3. $f_n^*(S) =$ nilai minimum dari $f_n(s, x_n)$ sehingga $f_n^*(s) = f_n^*(s, x_n^*)$.

Tujuannya adalah untuk mendapatkan $f_1^*(1)$ dengan cara mencari $f_4^*(s)$, $f_3^*(s)$ dan $f_2^*(s)$ terlebih dahulu. Jadi, program dinamis menyelesaikan suatu persoalan dengan melakukan perhitungan mundur walaupun untuk persoalan tertentu bisa dengan perhitungan maju.

Jika hanya tinggal satu *stage* lagi yang harus dijalani oleh *salesman* itu, maka rutenya sepenuhnya ditentukan oleh tujuan akhirnya. Karena itu, solusi persoalan dengan satu *stage* ini adalah:

s	$f_4^*(s)$	x_4^*
8	3	10
9	4	10

Jika *salesman* itu masih mempunyai dua *stage* lagi yang harus dijalani, maka solusinya memerlukan sedikit perhitungan. Sebagai contoh, asumsikan bahwa *salesman* itu berada pada kota 5. Selanjutnya, dia harus pergi, apakah ke *state* 8 atau *state* 9 dengan ongkos masing-masing 1 dan 4. Jika ia memilih *state* 8, penambahan ongkos minimumnya (setelah mencapai *state* 8 ini) adalah seperti pada table diatas, yaitu 3. Dengan demikian, maka ongkos total untuk keputusan ini adalah $1 + 3 = 4$. Begitu pula jika ia memilih *state* 9, maka ongkos totalnya adalah $4 + 4 = 8$. Oleh karena itu, ia seharusnya memilih *state* 8 atau $x_3^* = 8$ sehingga diperoleh ongkos total minimum $f_3^*(5) = 4$.

Dengan cara yang sama, kita hitung untuk $s = 6$ dan $s = 7$ sehingga hasil keseluruhan dari persoalan dengan dua *stage* ini adalah :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

x_3 s	$f_3(s, x_3) = c_s x_3 + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s)$	x_3^*
	8	9		
5	4	8	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

Solusi untuk persoalan dengan tiga *stage* dapat diperoleh dengan cara yang sama. Dalam kasus ini, $f_2(s, x_2) = c_s x_2 + f_3^*(x_2)$. Sebagai contoh, jika *salesman* berada pada *state* 2 dan akan melanjutkan ke *state* 5, maka ongkos total minimum $f_2(2, 5)$ adalah ongkos pada *stage* pertama ($c_{25} = 7$) ditambah dengan ongkos minimum dari *state* 5 ke depan (yaitu $f_3^*(5) = 4$) sehingga $f_2(2, 5) = 7 + 4 = 11$. dengan cara yang sama, didapat $f_2(2, 6) = 4 + 7 = 11$ dan $f_2(2, 7) = 6 + 6 = 12$, sehingga ongkos total minimum dari *state* 2 ke depan adalah $f_2^*(2) = 11$ dengan kota pemberhentian $x_2 = 5$ atau 6.

Hasil selengkapnya dari persoalan dengan tiga *stage* ini adalah :

x_2 s	$f_2(s, x_2) = c_s x_2 + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	5	6	7		
2	11	11	12	11	5 atau 6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5 atau 6

Pada persoalan dengan 4 *stage*, ongkosnya adalah ongkos pada *stage* pertama ditambah dengan ongkos minimum berikutnya, yaitu :

x_2 s	$f_1(s, x_2) = c_s x_2 + f_3^*(x_2)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	2	3	4		
1	13	11	11	11	3 atau 4

Untuk menuliskan solusi optimum dari persoalan semula, maka mulailah mengurut solusi masing-masing bagian persoalan sebagai berikut :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Hasil dari persoalan dengan 4 *stage* menunjukkan bahwa *salesman* harus pergi pertama-tama ke *stage* 3 atau 4. Andaikan ia memilih $x_1^* = 3$, maka solusi dari persoalan dengan tiga *stage* untuk $s = 3$ adalah $x_2^* = 5$. Hasil ini membawa kita pada persoalan dengan 2 *stage* yang menghasilkan $x_3^* = 8$ untuk $s = 5$, dan pada persoalan dengan 1 *stage* yang menghasilkan $x_4^* = 10$ untuk $s = 8$. Dengan demikian, maka salah satu rute optimalnya adalah $1 - 3 - 5 - 8 - 10$. Apabila *salesman* itu memilih $x_1^* = 4$, maka didapat dua rute optimum yang lain, yaitu $1 - 4 - 6 - 9 - 10$. Semuanya itu memberikan ongkos total yang sama, yaitu $f_1^*(1)=11$.

Karakteristik Persoalan Program Dinamis

Persoalan dalam program dinamis mempunyai ciri-ciri dan keistimewaan dasar sebagai berikut :

1. Persoalan dapat dibagi menjadi beberapa tahap (*stage*), yang pada masing-masing *stage* diperlukan adanya satu keputusan kebijakan (*policy decision*) pada setiap tahap.
2. Setiap tahap memiliki sejumlah keadaan atau *state* yang bersesuaian dan berhubungan dengan *stage* yang bersangkutan dalam arti berbagai keadaan yang mungkin dimana permasalahan berada pada suatu tahap dan akan menuju pada tahap berikutnya.
3. Pengaruh keputusan kebijakan pada setiap tahap adalah untuk merubah keadaan sekarang menjadi keadaan yang berkaitan dengan tahap berikutnya.
4. Keputusan terbaik pada suatu *stage* bersifat independent terhadap keputusan yang dilakukan pada *stage* sebelumnya.
5. Prosedur pemecahan persoalan dimulai dengan mendapatkan cara (keputusan) terbaik untuk setiap *state* dari *stage* terakhir.
6. Ada suatu hubungan timbal balik yang mengidentifikasi keputusan terbaik untuk setiap *state* pada *stage* n , berdasarkan keputusan terbaik untuk setiap *state* pada *stage* $(n+1)$.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

7. Terdapat hubungan rekursif yang mengidentifikasi kebijakan optimal antar tahap yang berurutan, ini berarti dengan menggunakan hubungan timbal balik tersebut, prosedur penyelesaian persoalan bergerak mundur *stage* demi *stage*.
8. Hubungan rekursif tersebut bergerak tahap demi tahap sampai ditemukan kebijakan dan keputusan optimum untuk masing-masing *state* hingga akhirnya diperoleh keputusan optimum yang menyeluruh, mulai dari *stage* awal.

Untuk mendapatkan solusi dari persoalan-persoalan dalam program dinamis tersebut maka terdapat tiga unsur dasar yang diperlukan yaitu:

1. Tahap (*stage*)
Suatu tahap dalam program dinamis didefinisikan sebagai bagian dari masalah yang memiliki beberapa alternatif yang saling menggantikan yang darinya alternatif terbaik akan dipilih.
2. Keadaan (*state*)
Suatu keadaan didefinisikan sebagai batasan yang mengangkat semua tahap secara bersama-sama.
3. Alternatif keputusan pada setiap tahap.
Pada setiap tahap terdapat alternatif keputusan-keputusan yang harus dipilih untuk menemukan solusi optimal.

Pemrograman dinamis pada umumnya menjawab masalah dalam tahap-tahap, dengan setiap tahap meliputi tepat satu variabel optimasi. Setiap tahap dalam masalah tersebut berisi satu atau lebih variabel yang harus dibedakan untuk menentukan nilai optimal fungsi tujuannya. Pada program dinamis terdapat 2 jenis variabel yaitu variabel status dan variabel keputusan. Variabel status adalah variabel yang terdapat dalam setiap tahap, sedangkan variabel keputusan adalah variabel untuk merubah keadaan sekarang menjadi keadaan yang berkaitan dengan tahap berikutnya.

Perhitungan di tahap yang berbeda-beda dihubungkan melalui perhitungan rekursif dengan cara yang menghasilkan pemecahan optimal yang mungkin bagi seluruh masalah.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Ini berarti bahwa setiap kali kita mengambil keputusan, kita harus memperhatikan keadaan yang dihasilkan oleh keputusan sebelumnya. Karena itu, keadaan yang dihasilkan oleh suatu keputusan didasarkan pada keadaan dari keputusan sebelumnya dan merupakan landasan bagi keputusan berikutnya. Sehingga konsep tentang keadaan adalah sangat penting sekali.

Karena keadaan berubah dari satu tahap ke tahap berikutnya, maka nilai setiap keadaan akan menggambarkan kondisi dari suatu proses keputusan mengubah keadaan lama (awal) menjadi keadaan baru (akhir). Keadaan baru menjadi landasan bagi keputusan baru, dan keputusan baru mengubah keadaan baru (awal) menjadi lebih baru (akhir), demikian seterusnya sampai proses ini berlangsung. Karenanya, hasil yang diharapkan dari suatu keputusan tergantung dari awal dan akhir dari keadaan untuk keputusan tersebut dan kemudian menjumlahkan seluruhnya sebagai satu rangkaian keputusan. Tugas terakhir ialah mengambil keputusan yang memaksimumkan jumlah hasil atau perolehan.

Pendekatan program dinamis didasarkan pada prinsip optimisasi Bellman (1950) yang mengatakan bahwa “Suatu kebijakan optimal mempunyai sifat bahwa apapun keadaan dan keputusan awal, keputusan berikutnya harus membentuk suatu kebijakan optimal dengan memperhatikan keadaan dari hasil keputusan pertama”.

Prinsip ini mengandung arti bahwa :

1. Kita diperkenankan untuk mengambil keputusan yang layak bagi tahap persoalan yang masih tersisa tanpa melihat kembali keputusan-keputusan masa lalu atau tahap-tahap terdahulu.
2. Dalam rangkaian keputusan yang telah diambil, hasil dari masing-masing tergantung pada hasil keputusan sebelumnya dalam rangkaian.

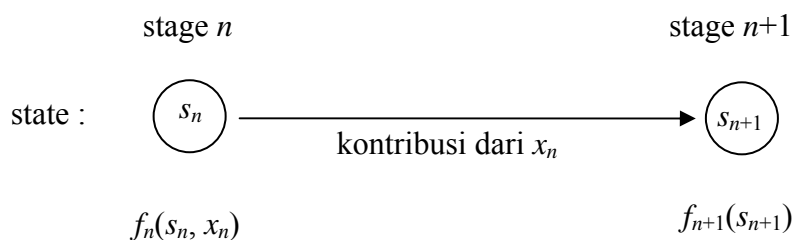
Misalnya, kalau kita telah mengambil keputusan buruk pada tahap pertama dan kedua, maka ini bukan berarti bahwa kita tidak bisa mengambil keputusan yang baik pada tahap ketiga, empat dan seterusnya. Program dinamis memungkinkan seseorang sampai pada keputusan optimal untuk masa atau tahap yang masih terbentang di depan biarpun ia sudah mengambil keputusan buruk di masa lalu.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Jadi prinsip dasar dalam program dinamis adalah prinsip optimalitas yaitu menentukan bagaimana suatu masalah yang diuraikan dengan benar dapat dijawab dalam tahap-tahap melalui perhitungan rekursif. Dengan menggunakan hubungan rekursif ini, prosedur penyelesaian bergerak tahap demi tahap sampai kebijakan optimal tahap terakhir ditemukan. Sekali kebijakan optimal tahap n ditemukan maka n komponen keputusan dapat ditemukan kembali dengan melacaknya menggunakan penelusuran mundur.

A. PEMROGRAMAN DINAMIK DETERMINISTIK

Program dinamik deterministik adalah program dinamik dimana *state* pada *stage* berikutnya sepenuhnya ditentukan oleh *state* dan keputusan pada *stage* saat ini. Program dinamis deterministik dapat diterangkan dengan diagram berikut :



Dengan demikian, maka pada *stage n*, prosesnya akan berada pada *state* s_n pada *stage* ini dibuat keputusan x_n , kemudian proses bergerak ke *state* s_{n+1} pada *stage* ($n+1$). Dari titik ini kedepan, nilai fungsi tujuan untuk keputusan optimumnya telah terlebih dahulu dihitung, yaitu $f_{n+1}(s_{n+1})$. Keputusan memilih juga memberikan kontribusi terhadap fungsi tujuan, yang dengan menggabungkan kedua besaran ini akan diperoleh nilai fungsi tujuan $f_n(s_n, x_n)$ yang berawal pada *stage n*. minimkan nilai tersebut dengan memperhatikan x_n sehingga diperoleh $f_n(s_n) = f_n(s_n, x_n)$. setelah hal ini dilakukan untuk semua nilai s_n yang mungkin, maka prosedur penyelesaiannya bergerak kembali pada persoalan dengan satu *stage*.

Suatu cara untuk menategorikan persoalan program dinamis deterministik ini adalah dengan melihat bentuk fungsi tujuannya. Sebagai contoh, fungsi tujuannya mungkin meminimumkan jumlah kontribusi dari masing-masing *stage* atau dapat

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

pula memaksimumkannya atau meminimumkan hasil perkaliannya, dan sebagainya. Cara pengkategorian yang lain didasarkan pada keadaan dari kumpulan *state* pada suatu *stage*. Artinya, apakah *state* s_n , dapat direpresentasikan sebagai variabel *state* diskrit atau kontinu, atau mungkin diperlukan suatu vektor *state* (lebih dari satu variabel).

Berikut ini diberikan satu contoh dari persoalan program dinamis deterministik, yang walaupun konteksnya sangat berbeda dengan ilustrasi diatas tetapi tetap mempunyai formulasi matematis yang sama, kecuali bahwa fungsi tujuannya tidak lagi minimasi tetapi maksimasi.

Contoh 4.1.

Badan kesehatan dunia (WHO) bermaksud akan menyempurnakan pelayanan kesehatan di Negara-negara yang sedang berkembang. Saat ini WHO mempunyai 5 *team* kesehatan yang harus ditempatkan di tiga negara untuk menyempurnakan pelayanan kesehatan, pendidikan kesehatan dan program latihan. Dengan demikian maka WHO harus menentukan berapa *team* yang harus ditempatkan di tiap-tiap negara, sehingga keefektifan total dari kelima *team* itu dapat dimaksimumkan. Sebagai ukuran dari keefektifan ini ialah pertambahan umur (yaitu berapa tahun umur orang akan bertambah dengan adanya *team* tersebut).

Tabel berikut ini adalah taksiran pertambahan umur (tahun orang) dalam satuan ribu untuk tiap negara dan tiap alokasi *team* yang mungkin dilakukan.

Jumlah team yang dialokasikan	Pertumbuhan umur (ribuan tahun-orang)		
	Negara 1	Negara 2	Negara 3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Persoalan ini memerlukan pembuatan tiga buah keputusan yang saling berhubungan, yaitu berapa jumlah *team* kesehatan yang harus dialokasikan pada ketiga negara itu. Karenanya, walaupun tidak ada satu rangkaian yang tetap, ketiga negara ini dapat dianggap sebagai 3 *stage* dalam formulasi program dinamis, dimana variabel keputusan x_n ($n = 1, 2, 3$) merupakan jumlah *team* yang dialokasikan pada *stage* (negara) n .

Untuk dapat menentukan *state*-nya kita harus dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut :

- Apakah yang berubah dari satu *stage* ke *stage* berikutnya?
- Berdasarkan keputusan-keputusan yang telah dibuat pada *stage* sebelumnya, bagaimanakah status situasi pada *state* berikutnya dapat ditentukan?
- Informasi apa tentang suatu *state* yang diperlukan untuk menentukan keputusan optimum berikutnya?

Dengan dasar-dasar ini, maka *state* dari sistem pada persoalan diatas adalah jumlah *team* kesehatan yang masih tersedia untuk dialokasikan.

Misalkan $p_i(x_i)$ adalah ukuran keefektifan dari pengalokasian sebanyak x_i *team* kesehatan pada negara i . maka fungsi tujuannya adalah memilih x_1, x_2 dan x_3 sehingga :

$$\text{Maksimumkan: } \sum_{i=1}^3 p_i(x_i)$$

$$\text{dengan kendala } \sum_{i=1}^3 x_i = 5$$

$$x_i \text{ integer nonnegatif}$$

Dengan demikian maka :

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + \text{maksimum} \sum_{i=n+1}^3 p_i(x_i)$$

$$\text{Sehingga : } \sum_{i=n}^3 x_i = s$$

$$x_i \text{ integer nonnegatif } n = 1, 2, 3$$

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Kita tahu bahwa $f_n^*(s) = \text{maks } f_n(s, x_n)$

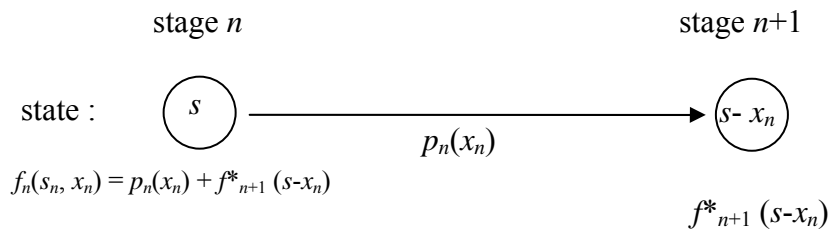
dimana $x_n = 0, 1, 2, \dots, s$

Karena itu, maka :

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}(s - x_n)$$

(dimana $f_4^* = 0$)

Hubungan ini dapat digambarkan sebagai berikut :



Akibatnya hubungan timbal balik dari fungsi-fungsi f_1^* , f_2^* dan f_3^* untuk persoalan ini menjadi :

$$f_n^*(s) = \text{maks}[p_n(x_n) + f_{n+1}(s - x_n)]$$

Untuk $n = 1, 2$

$x_n = 0, 1, 2, \dots, s$

Untuk *stage* terakhir ($n = 3$), maka $f_3^*(s) = \text{maks } p_3(x_3)$

dengan $x_3 = 0, 1, 2, \dots, s$

Berikut ini adalah hasil perhitungan seluruhnya, dimulai dari *stage* terakhir ($n = 3$) dan bergerak mundur hingga *stage* pertama ($n = 1$).

$n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

$$n = 2$$

x_2	$f_2(s, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s - x_2)$						$f_2^*(s)$	x_2^*
	s	0	1	2	3	4		
0	0						0	0
1	50	20	45				50	0
2	70	70	45				70	1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

$$n = 1$$

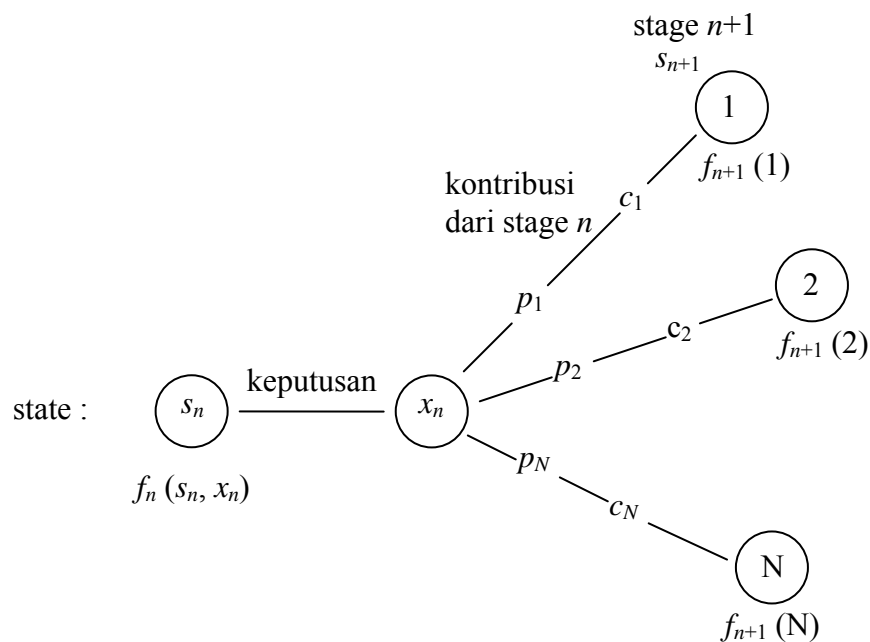
x_1	$f_1(s, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s - x_1)$						$f_1^*(s)$	x_1^*
	s	0	1	2	3	4		
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Dengan demikian, maka solusi optimumnya adalah $x_1^* = 1$, sehingga $s = 5 - 1 = 4$ untuk $n = 2$. Akibatnya $x_2^* = 3$. Selanjutnya $s = 4 - 3 = 1$ untuk $n = 3$ sehingga $x_3^* = 1$. Karena $f_1^*(5) = 170$ maka alokasi (1, 3, 1) dari team 130 kesehatan pada tiga negara ini akan menghasilkan teksiran total 170.000 penambahan tahun orang.

B. PEMROGRAMAN DINAMIK PROBABILISTIK

Berbeda dengan program dinamik deterministik, pada program dinamik probablistik ini *stage* berikutnya tidak dapat seluruhnya ditentukan oleh *state* dan keputusan pada *stage* saat ini, tetapi ada suatu distribusi kemungkinan ini masih seluruhnya ditentukan oleh *state* dan keputusan pada *stage* saat ini. Struktur dasar program dinamis probablistik dapat digambarkan sebagai berikut :

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda



di mana :

- N adalah banyaknya *state* yang mungkin pada *stage* ($n+1$)
- (p_1, p_2, \dots, p_n) adalah distribusi kemungkinan dari terjadinya suatu *state* berdasarkan *state* s_n dan keputusan x_n pada *stage* n
- c_i adalah kontribusi dari *stage* n terhadap fungsi tujuan, jika *state* berubah menjadi *state* i

jika gambar diatas diperluas sehingga mencakup seluruh *state* dan keputusan pada seluruh *stage* yang mungkin, maka gambar tersebut akan merupakan pohon keputusan (*decision tree*). Jika pohon keputusan ini tidak terlalu lebar, maka akan dapat digunakan sehingga cara untuk membuat iktisar dari berbagai kemungkinan dapat terjadi.

Akibat struktur probabilistic ini, maka hubungan antara $f_n(s_n, x_n)$ dengan $f_{n+1}(s_{n+1})$ menjadi lebih rumit daripada untuk program dinamis deterministic. Bentuk yang tepat untuk hubungan ini akan bergantung pada bentuk fungsi tujuan secara keseluruhan.

Sebagai ilustrasi, misalkan tujuannya adalah meminimumkan ekspektasi jumlah kontribusi dari masing-masing *stage*. Pada kasus ini $f_n(s_n, x_n)$ menyatakan

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

ekspektasi jumlah minimum dari *stage n* ke muka, berdasarkan *state* s_n dan keputusan x_n pada *stage n* maka :

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^N p_i [c_i + f_{n+1}^*(i)]$$

dengan

$$f_{n+1}(s_{n+1}) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(s_{n+1}, x_{n+1})$$

dimana minimisasi ini diambil dari nilai-nilai x_{n+1} yang fisibel.

Contoh 4.2.

Sebuah perusahaan mendapat order untuk menyuplai suatu item tipe tertentu. Karena langganan menginginkan kualitas yang tinggi, maka perusahaan tersebut harus memproduksi lebih dari satu item untuk memperoleh item yang dapat diterima. Perusahaan ini memperkirakan bahwa setiap item yang diproduksinya itu akan diterima dengan probabilitas $\frac{1}{2}$, dan akan rusak (tanpa kemungkinan untuk diperbaiki) dengan probabilitas $\frac{1}{2}$. Dengan demikian, maka banyaknya item yang dapat diterima dari suatu lot yang berukuran L akan mempunyai distribusi binomial, artinya probabilitas bahwa tidak ada item yang diterima dari lot tersebut adalah $(1/2)^L$.

Ongkos produksi marginal untuk produksi ini ditaksir sebesar \$100 per item (walaupun rusak) dan kelebihan item dianggap tidak berharga. Sebagai tambahan, jika proses produksi untuk produksi ini di *set-up*, maka harus disediakan ongkos *set-up* sebesar \$ 300. Jika pemeriksaan menyatakan bahwa seluruh lot yang dihasilkan tidak ada yang dapat diterima, maka proses produksinya harus di *set-up* dengan tambahan ongkos sebesar \$ 300. Perusahaan ini hanya mempunyai waktu untuk membuat tidak lebih dari 3 siklus produksi (*production run*). Jika suatu item yang ketiga, maka kerugian karena hilangnya penerimaan dari penjualan ini ditambah dengan denda yang harus dibayar adalah sebesar \$1600.

Tujuan persoalan ini ialah untuk menentukan ukuran lot pada *production run* yang diperlukan sehingga diperoleh ekspektasi pembuatan yang minimum.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Jawaban :

Stage dari persoalan ini adalah *production run*, sedangkan variabel keputusan x_n ($n = 1, 2, 3$) adalah ukuran lot produksi pada *stage* n . Banyaknya item yang dapat diterima (yaitu nol atau satu) adalah *state* dari sistem pada setiap *stage*. Jadi *state* $s = 1$ pada *stage* 1. Jika paling sedikit satu item yang dapat diterima telah dihasilkan, maka *state* berubah menjadi $s = 0$, dan setelah itu tidak ada lagi ongkos tambahan yang diperlukan. Dalam hal ini $f_n(s, x_n)$ adalah ekspektasi ongkos total yang minimum untuk *stage* n ke depan, berdasarkan *state* s dan keputusan x_n pada *stage* n .

$$\begin{aligned} \text{Maka : } f_n^*(s) &= \min f_n(s, x_n) \\ &\text{dengan } x_n = 0, 1, 2, \dots \\ &\text{dimana } f_n^*(0) = 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan \$100 sebagai satuan uang, maka kontribusi terhadap ongkos dari *stage* n adalah $(K + x_n)$ dimana :

$$\begin{aligned} K &= 0 \text{ jika } x_n = 0 \\ &3 \text{ jika } x_n > 0 \end{aligned}$$

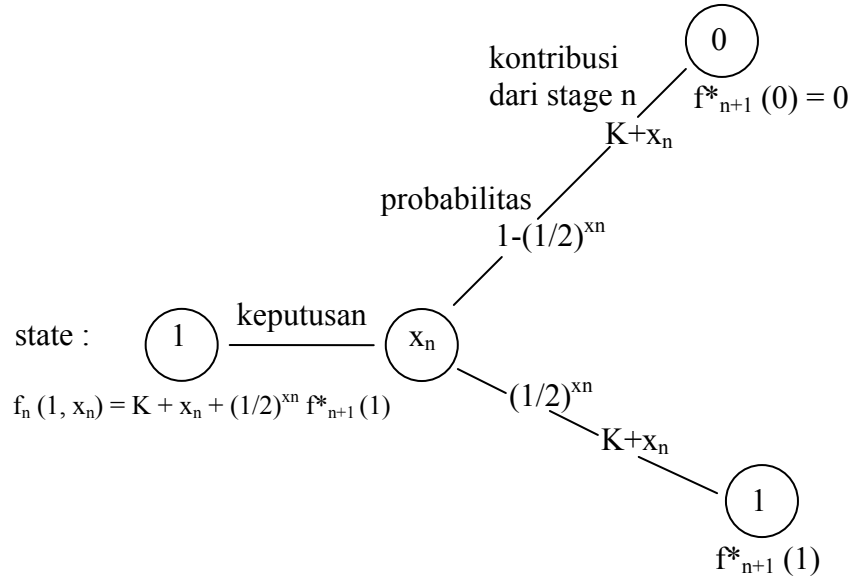
Untuk $s = 1$, maka :

$$\begin{aligned} f_n(1, x_n) &= K + x_n + (1/2)^2 f_{n+1}^*(1) + [1 - (1/2)^{x_n}] f_{n+1}^*(0) \\ &= K + x_n + (1/2)^{x_n} f_{n+1}^*(1) \end{aligned}$$

dengan $f_4^*(1) = 16$, yaitu terminal ongkos jika tidak dihasilkan item yang dapat diterima.

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

Hubungan ini dapat digambarkan sebagai berikut :



Hubungan timbal baliknya adalah :

$$f_n^*(1) = \min [K + x_n + (1/2)^{x_n} f_{n+1}^*(1)]$$

$$X_n = 0, 1, 2, \dots$$

Untuk $n = 1, 2, 3$.

Perhitungan selengkapnya adalah :

$$n = 3$$

x_3	$f_3(1, x_3) = K + x_3 + 16(1/2)^{x_3}$					$f_3^*(s)$	x_{3^*}
	0	1	2	3	4		
0	0					0	0
1	16	12	9	8	8	8	3,4

$$n = 2$$

x_2	$f_2(1, x_2) = K + x_2 + (1/2)^{x_2} f_3^*(1)$					$f_2^*(s)$	x_{2^*}
	0	1	2	3	4		
0	0					0	0
1	8	8	7	7	7,5	7	2,3

Ketekunan dan Ketelitian Kunci Kesuksesan Anda

x_1	$f_1(1, x_1) = K + x_1 + (1/2)^{x_1} f_2^*(1)$					$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	1	2	3	4		
1	7	7,5	6,75	6,875	7,0625	6,75	2

Dengan demikian, maka kebijakan optimum adalah memproduksi 2 item pada *production run* pertama. Jika tidak ada yang dapat diterima, maka buatlah sebanyak 2 atau 3 item pada *production run* kedua. Jika tidak ada yang dapat diterima, maka buatlah 3 atau 4 item pada *production run* ketiga. Ekspektasi ongkos total untuk kebijakan ini adalah \$ 675.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, D.R., Sweeney, D.J. and William, T.A. (1985). *An Introduction to Management Sciences: Qualitative Approach to Decision Making*, 4th Edition.

Taha, Hamdy (1989). *Operation Research: an Introduction*, Collier MacMilan International Edition.

Winston, Wayne L., (1993). *Operations Research : Application and Algorithms*, 3th Edition. Duxbury Press, Belmont, California