BAB IV

PROSES *BIRTH-DEATH* DAN APLIKASINYA DALAM SISTEM ANTRIAN

4.1 Distribusi Eksponensial Dalam Proses *Birth-Death*

Kebanyakan sistem antrian dimodelkan menggunakan *interarrival times* dan *service times* berdistribusi eksponensial. Berdasarkan The no-memory property dari distribusi exponensial maka probabilitas suatu kelahiran dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ tidak tergantung pada berapa lama sistem berada dalam state j. Probabilitas sebuah kelahiran dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ adalah :

$$\int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

Dari ekspansi deret Taylor $e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ maka :

$$\int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\Delta t} dt = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa laju kelahiran dalam state j hanya berupa *arrival rate* λ.

Untuk menentukan laju kematian pada saat t, dengan catatan jika state = 0 pada saat t berarti tidak ada service dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ berarti $\mu_0 = 0$. Jika state pada waktu t adalah $j \geq 1$ dan diketahui hanya ada satu server, jadi hanya tepat satu customer yang sedang dilayani. Berdasarkan *The no-memory property* dari distribusi exponesial diperoleh probabilitas satu customer selesai dilayani dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ adalah :

$$\int_0^{\Delta t} \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

Jadi untuk $j \geq 1$, $\mu_j = \mu$.

Misal kita asumsikan *service times* dan *interarrival times* saling independen, maka $M/M/1/FCFS/\infty/\infty$ merupakan sebuah proses *birth-death*.

Untuk sistem antrian yang lebih kompleks dengan *interarrival times* dan *service times* berdistribusi exponensial, dapat dimodelkan sebagai proses *birth-death* dengan menambah jumlah server.

Berikut ini adalah contoh sebuah sistem antrian yang dapat dimodelkan sebagai proses *birth-rate*.

Sistem antrian $M/M/2/FCFS/\infty/\infty$ dengan $\lambda = 3$, $\mu = 6$. Sistem ini dapat dimodelkan sebagai proses *birth-death* dengan :

$\lambda_j = 3$, untuk j = 0, 1, 2,…

$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 6 + 6 = 12$, $\mu_j = 12$ untuk j = 3, 4, 5,….

Jika salah satu dari *interarrival times* atau *service times* tidak berdistribusi exponensial, maka sistem tersebut tidak dapat digambarkan sebagai proses *birth-death*.

4.1.1 Penurunan *Steady State* Untuk proses *Birth-Death*

Terdapat empat jalan yang mungkin agar pada saat $t + \Delta t$, sistem berada pada state j. Untuk $j \geq 1$ keempat jalan itu adalah sebagai berikut :

Kejadian	State pada Saat t	State pada Saat $t+\Delta t$	Probabilitas kejadian
I	j – 1	j	$P_{i.j-1}(t)(\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t))$
II	j + 1	j	$P_{i.j+1}(t)(\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t))$
III	j	j	$P_{i.j}(t)(1-\mu_j\Delta t - \lambda_j \Delta t - 2o(\Delta t))$
IV	State lain	j	$o(\Delta t)$

Jika pada saat t sistem berada pada state j, j – 1, atau j + 1 maka supaya sistem berada pada state j pada saat $t+\Delta t$ akan terdapat lebih dari satu kejadian (*birth* atau *death*) dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$. Berdasarkan Hk. 3. kejadian ini akan memiliki probabilitas $o(\Delta t)$. Diasumsikan untuk Δt kecil maka $o(\Delta t) = 0$.

Selanjutnya $P_{ij}(t+\Delta t)$ dapat kita tulis sebagai berikut :

$$P_{ij}(t+\Delta t) = (I) + (II) + (III) + (IV)$$

$$P_{ij}(t+\Delta t) = P_{ij}(t) + \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i.j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i.j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j) \quad \text{…………(4.1.1.1)}$$

$$\underline{+\, o(\Delta t)(P_{i.j-1}(t) + P_{i.j+1}(t) + 1 - 2P_{ij}(t)).}$$

Untuk yang digaris bawah dapat ditulis sebagai $o(\Delta t)$ sehingga diperoleh

$$P_{ij}(t+\Delta t) = P_{ij}(t) + \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i.j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i.j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j) + o(\Delta t)$$

kedua ruas dibagi dengan $\Delta(t)$ untuk $\Delta(t)$ mendekati nol, maka diperoleh untuk semua i dan $j \geq 1$,

$$P_{ij}^{'}(t) = \lambda_{j-i}P_{i.j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j \quad \text{……………………(4.1.1.2)}$$

ambil j = 0, maka $P_{i.j-1}(t) = 0,$ dan $\mu_j = 0$ sehingga diperoleh :

$$P'_{i.0}(t) = \mu_1 P_{i.1}(t) - \lambda_0 P_{i.0}(t)$$

Dalam kenyataan persamaan deferensial ini sangat sulit untuk diselesaikan, maka didefinisikan probabilitas *steady-state* π_j , (j=0, 1, 2,…) sebagai suatu rantai Markov,

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

Untuk t besar dan sebarang inisial state, $P_{ij}(t)$ tidak akan berubah banyak, bahkan mungkin akan berupa konstan. Berarti dalam keadaan *steady-state* $P'_{ij}(t) = 0$, kemudian juga diperoleh $P_{i.j-1}(t) = \pi_{j-1}$, $P_{i.j+1}(t) = \pi_{j+1}$, dan $P_{ij}(t) = \pi_j$.

Substitusikan ke persamaan (4.1.1.2) maka untuk $j \geq 1$, didapat :

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-i} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} - \pi_j \mu_j - \pi_j \lambda_j = 0 \quad \text{……………………………..………(4.1.1.3)}$$

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = \pi_j(\lambda_j + \mu_j)$$

ambil j = 0, didapat :

$$\mu_1 \pi_1 = \pi_0 \lambda_0$$

Persamaan terakhir dapat pula diperoleh dari kenyataan hasil pengamatan yaitu :

Untuk setiap t di dalam proses birth-death, pastilah benar bahwa untuk setiap state j, jumlah dari berapa kali kita masuk state j dan jumlah berapa kali kita keluar dari state j, akan paling banyak berbeda satu.

Misal setelah observasi selama t waktu, diperoleh hasil bahwa kita telah masuk state 4 sebanyak tiga kali. Maka kejadian-kejadian berikut pastilah benar.

Kejadian	**Inisial State**	**State Pada Saat t**	**Banyaknya berapa kali keluar dari state 4 setelah t waktu**
1	State 4	State 4	3
2	State 4	Selain state 4	4
3	Selain state 4	State 4	2
4	Selain state 4	Selain state 4	3

Terlihat pada kolom 4, bahwa setelah t waktu bila kita telah masuk state 4 sebanyak tiga kali maka banyaknya berapa kali keluar dari state 4 adalah 2, 3, atau 4 kali. Jadi paling banyak hanya berbeda satu.

Jadi untuk t besar pastilah benar bahwa :

$$\frac{nilai \quad harapan \quad berapa \quad kali \quad keluar \quad dari \quad state \quad j}{satuan \quad waktu} = \frac{nilai \quad harapan \quad berapa \quad kali \quad masuk \quad ke \quad state \quad j}{satuan \quad waktu} \qquad \text{…..……..(4.1.1.4)}$$

Diasumsikan bahwa sistem telah masuk *steady-sate*. Maka untuk setiap state j, j = 0, 1, 2,… terdapat probabilitas π_j yaitu peluang terdapat j orang dalam sistem setelah tercapai *steady-state*. Untuk $j \geq 1$, kita hanya dapat meninggalkan state j menuju state j – 1 atau state j + 1, sehingga :

$$\frac{Nilai \quad harapan \quad keluar \quad dari \quad state \quad j}{satuan \quad waktu} = \pi_j(\lambda_j + \mu_j) \qquad \text{…...…...….(4.1.1.5)}$$

Juga untuk $j \geq 1$ kita hanya dapat masuk state j dari state j – 1 atau state j + 1, sehingga :

$$\frac{Nilai \quad harapan \quad masuk \quad ke \quad state \quad j}{satuan \quad waktu} = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} \qquad \text{……….(4.1.1.6)}$$

Dari persamaan (4.1.1.5) dan (4.1.1.6) diperoleh :

$$\pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} = \pi_j(\lambda_j + \mu_j) \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots.) \qquad \text{………….(4.1.1.7)}$$

diambil j = 0 , maka $\mu_0 = \pi_{-1} = 0$ sehingga diperoleh :

$$\pi_1\mu_1 = \pi_0\lambda_0 \qquad \text{…...…………..(4.1.1.8)}$$

Persamaan (4.1.1.7) dan (4.1.1.8) disebut sebagai *flow balance equations* atau *conservation of flow equation* untuk proses *birth-death*.

Perhatikan persamaan (4.1.1.7), maka kita peroleh *flow balance equation* :

(j = 0) $\pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1$

(j = 1) $(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$

(j = 2) $(\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3$

:

:

(j = j) $(\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}$

4.1.2 Penyelesaian Dari Flow Balance Equation

Dari j = 0 telah kita telah kita peroleh $\pi_1 = \dfrac{\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$.

substitusikan ke (j = 1) : $\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 = \dfrac{(\lambda_1 + \mu_1)\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$

$$\mu_2\pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0\lambda_1)}{\mu_1}$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0\lambda_1)}{\mu_1\mu_2}$$

bila substitusi diteruskan untuk (j = 2), (j = 3), ….. maka akan diperoleh :

$$\pi_j = \pi_0 c_j \text{ , dengan } c_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_j} \qquad ....(4.1.2.1)$$

Untuk sebarang waktu t kita harus berada dalam suatu state, jadi jumlah probabilitas *steady-state* harus sama dengan satu.

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \pi_0 c_j = 1 \qquad ....(4.1.2.2)$$

untuk j = 0, maka persamaan (4.1.2.1) menjadi $\pi_0 = \pi_0 c_0$

jadi $c_0 = 1$

$$\pi_0 (1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} c_j) = 1 \qquad ....(4.1.2.3)$$

dari (4.1.2.3) dapat dihitung π_0 asalkan $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ terbatas, yaitu :

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} c_j} \qquad ....(4.1.2.4)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.1.2.4) ke (4.1.2.1) maka akan didapat nilai π_j, j = 1, 2, … Jika $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ tak terbatas, tidak ada *steady-state* pada sistem, hal ini disebabkan arrival rate sama atau melebihi jumlah maksimum yang bisa dilayani server, sehingga state akan terus naik dan tak ada equilibrium.

4.2 Sistem Antrian M/M/1/GD/∞/∞ Dan Formula Antrian $L = \lambda W$

Sistem antrian M/M/1/GD/∞/∞ mempunyai *interarrival times* dan *service times* yang berdistribusi eksponensial dan hanya memiliki satu server, sedangkan jumlah arrival tidak dibatasi. Kita asumsikan arrival rate $=\lambda$ dan service rate $=\mu$. Sistem antrian ini dapat kita modelkan sebagai proses *birth-death* dengan parameter sebagai berikut :

$$\lambda_j = \lambda \quad (j = 0, 1, 2,\ldots),\ \mu_0 = 0,\ \mu_j = \mu \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \ldots\ldots\ldots(4.2)$$

4.2.1 Penurunan Dari Probabilitas *Steady-State*

Untuk memperoleh nilai π_j, kita substitusikan persamaan (4.2) ke (4.1.2.1) :

$$\pi_1 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu},\ \pi_2 = \frac{\lambda^2\pi_0}{\mu^2},\ \ldots,\ \pi_j = \frac{\lambda^j\pi_0}{\mu^j} \qquad \ldots\ldots\ldots(4.2.1.1)$$

didefinisikan $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ kita sebut ρ sebagai intensitas traffic dari sistem antrian. Jika terjadi $\rho \geq 1$ berarti $\lambda \geq \mu$ (*arrival rate* paling sedikit sebesar *service rate*). Untuk $\rho = 1$ maka *arrival rate* sama dengan *service rate* jadi server akan terus sibuk dan tidak akan tercapai *steady-state*. Demikian pula jika $\rho > 1$ maka jumlah customer dalam sistem akan terus meningkat sehingga tidak akan tercapai *steady-state*.

Substitusi persamaan (4.2.1.1) ke (4.1.2.2) diperoleh :

$$\pi_0(1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(4.2.1.2)$$

karena $0 \leq \rho < 1$, maka $\quad \pi_0 \times \dfrac{1}{1-\rho} = 1$

$$\pi_0 = 1 - \rho \qquad (0 \leq \rho < 1) \qquad \ldots\ldots(4.2.1.3)$$

substitusi persamaan (4.2.1.3) ke (4.2.1.1) diperoleh :

$$\pi_j = \rho^j(1-\rho) \qquad (0 \le \rho < 1) \qquad \text{…………...…(4.2.1.4)}$$

4.2.2 Penurunan Dari L

Didefinisikan L adalah jumlah rata-rata customer yang ada dalam sistem.

Diberikan $L = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\pi_j = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j$

didefinisikan $S = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + ... = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

jadi $$L = (1-\rho)S = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad \text{……………...(4.2.2)}$$

4.2.3 Penurunan dari L_q

Didefinisikan L_q adalah nilai harapan dari jumlah jumlah customer yang sedang menunggu di garis antrian. Jadi jika ada 0 atau 1 customer dalam sistem, maka tidak ada customer yang menunggu di antrian. Jika terdapat j orang di dalam sistem $(j \ge 1)$ maka akan terdapat j – 1 orang di garis antrian.

$$L_q = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\pi_j = \sum_{j=1}^{j=\infty} j\pi_j - \sum_{j=1}^{j=\infty}\pi_j$$

$$= L - (1-\pi_0)$$

substitusi dari persamaan (4.1.1.8) diperoleh :

$$L_q = L - \rho$$

substitusi dari persamaan (4.2.2) diperoleh :

$$L_q = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad \text{…………..……………...(4.2.3)}$$

4.2.4 Penurunan dari L_s

L_s merupakan nilai harapan dari jumlah cutomer yang sedang dilayani.

$$L_s = 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + ...) = 1 - \pi_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

Kita dapat juga mencari L_q menggunakan persamaan $L = L_s + L_q$,

$$L_q = L - L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

4.2.5 Formula Antrian $L = \lambda W$

Kita definisikan W adalah nilai berapa lama seorang customer berada di dalam sistem, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk antri ditambah waktu pelayanan server.

Didefinisikan besaran-besaran sebagai berikut :

$\lambda =$ Jumlah rata-rata arrival masuk ke sistem per unit waktu

$L =$ Jumlah rata-rata customer yang ada di dalam sistem

$L_q =$ Jumlah rata-rata customer yang sedang antri

$L_s =$ Jumlah rata-rata customer yang sedang dilayani server

$W =$ Waktu rata-rata seorang customer berada di dalam sistem

$W_q =$ Waktu rata-rata seorang customer harus antri

$W_s =$ Waktu rata-rata yang dibutuhkan server untuk melayani satu customer.

Diasumsikan sistem telah mencapai steady-state, semua rata-rata di atas adalah rata-rata steady-state. Besaran-besaran di atas dapat diselesaikan menggunakan *Little's Queuing formula*. Formula ini bisa dilihat pada teorema berikut :

Teorema

Untuk sebarang sistem antrian yang terdapat distribusi *steady-state*, berlaku relasi-relasi berikut :

$$L = \lambda W \quad \text{…………...……….}(4.2.5.1)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad \text{…………………....}(4.2.5.2)$$

$$L_s = \lambda W_s \quad \text{………………….….…}(4.2.5.3)$$

Untuk membuktikan teorema tersebut dapat dilihat dari satuannya. Misal untuk persamaan (4.2.5.1), L adalah jumlah customer dalam sistem, jadi mempunyai satuan "orang", kemudian λ mempunyai satuan "orang / jam" dan W mempunyai satuan "jam". Jadi LW mempunyai satuan "orang".

Untuk bukti lain, perhatikan kejadian saat seorang customer datang, kita namai customer-A. Diasumsikan customer-A datang setelah *steady-state* tercapai. Saat customer-A berada dalam sistem maka akan terdapat (nilai rata-rata) L customer dalam sistem. Customer-A akan berada dalam sistem selama W waktu. Setelah customer-A meninggalkan sistem, maka yang tinggal di dalam sistem adalah customer-customer di belakangnya yang datang dalam W waktu tersebut, dan ini berjumlah λW. Dari sini terlihat bahwa $L = \lambda W$

Dengan menggunakan teorema di atas, kita bisa mendapatkan nilai W dan W_q. Substitusi dari persamaan (4.2.2) diperoleh :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Substitusi dari persamaan (4.2.3) diperoleh :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Bila diperhatikan $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, maka jika ρ mendekati satu maka baik W maupun W_q keduanya akan sangat besar. Sedangkan untuk ρ mendekati nol, W_q akan mendekati nol dan W mendekati $\dfrac{1}{\mu}$ yaitu nilai rata-rata *service times.*

Berikut adalah contoh penggunaan formula tersebut :

<u>Contoh 1.</u>

Pada sebuah server *drive-in teller* rata-rata datang 10 mobil per jam. Diasumsikan rata-rata *service times* untuk sebuah mobil adalah 4 menit, dan baik *interarrival times* maupun *service times* keduanya berdistribusi eksponensial.

1. Berapa probabilitas teller akan *idle* (bebas kerja) ?
2. Berapa jumlah rata-rata mobil yang antri ?
3. Berapa waktu rata-rata sebuah mobil di dalam sistem ?
4. Berapa rata-rata costumer yang dilayani server dalam satu jam ?

Penyelesaian :

Diketahui sistem antrian M/M/1/GD/∞ / ∞ dengan $\lambda = 10$ mobil per jam dan $\mu = 15$ mobil per jam. Berarti $\rho = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

1. teller akan idle bila customer dalam sistem berjumlah nol.

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ .$$

Jadi teller akan idle rata-rata 1/3 dari waktu tugasnya.

2. $$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \text{ mobil.}$$

3. $$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \text{ mobil}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ jam = 12 menit.}$$

4. Diketahui $\mu = 15$, jadi jika server terus sibuk maka akan ada rata-rata 15 customer yang telah dilayani selama satu jam. Dari no.1 diketahui bahwa server akan *idle* rata-rata 1/3 waktu tugasnya. Jadi dalam satu jam rata-rata akan terdapat $(\frac{2}{3})(15) = 10$ customer yang selesai dilayani server. Dalam kenyataan, karena sistem dalam keadaan *steady-state*, jika dalam satu jam terdapat 10 arrival maka akan terdapat pula 10 customer meninggalkan sistem dalam satu jam.

4.2.6 Model Optimisasi Antrian

Berikut ini adalah contoh penggunaan teori antrian untuk optimisasi.

Contoh 2.

Masinis yang bekerja di sebuah *tool-and-die plant* harus mencari alat-alat dari pusat peralatan. Rata-rata dalam satu jam terdapat 10 masinis datang mencari peralatan. Pusat peralatan dipimpin oleh seorang juru tulis yang dibayar $6 per jam yang membutuhkan waktu rata-rata 5 menit untuk setiap permintaan alat. Setiap masinis memproduksi barang-barang senilai $10 per jam (berarti perusahaan akan membayar $10 untuk setiap satu jam yang digunakan masinis di pusat peralatan). Perusahaan mempertimbangkan perlu tidaknya menyewa pembantu juru tulis dengan bayaran $4 per jam. jika bersama pembantu maka juru tulis membutuhkan waktu rata-rata 4 menit untuk setiap permintaan barang. Diasumsikan *arrival times* dan *service times* berdistribusi eksponensial. Perlukah disewa pembantu ?

Penyelesaian :

Penyelesaian optimum untuk problem di atas adalah meminimalkan *service cost* per jam (biaya untuk membayar juru tulis) dan *delay cost* per jam (biaya yang dikeluarkan selama masinis berhenti kerja karena harus ke pusat paralatan). Jadi perusahaan ingin meminimalkan pengeluaran per jam, yaitu :

$$\frac{harapan \quad pengeluaran}{jam} = \frac{service \quad \cos t}{jam} + \frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{jam}$$

dengan,

$$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{jam} = \frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{customer} \times \frac{harapan \quad jumlah \quad customer}{jam}$$

$$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{customer} = \frac{\$10}{ma\sin is \cdot jam} \times \begin{pmatrix} rata - rata \quad jumlah \quad jam \quad ma\sin is \\ di \quad pusat \quad perala\tan \end{pmatrix}$$

- jika tanpa pembantu untuk juru tulis, maka :

$\lambda = 10$ masinis per jam, dan $\mu = 12$ masinis per jam.

jadi diperoleh $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12 - 10} = \frac{1}{2}$ jam. (w adalah waktu rata-rata masinis di pusat peralatan)

diperoleh $$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{jam} = 10 \times \tfrac{1}{2} \times 10 = \$50$$

dari soal diketahui $$\frac{service \quad \cos t}{jam} = \$6$$

jadi tanpa pembantu, harapan pengeluaran per jam = 6 + 50 = $56

- jika menyewa pembantu maka :

$\lambda = 10$ masinis per jam, dan $\mu = 15$ customer per jam

jadi diperoleh $W = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5}$ jam

diperoleh $\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{jam} = 10 \times \frac{1}{5} \times 10 = \$20$

dari soal diketahui $\frac{service \quad \cos t}{jam} = 6 + 4 = \$10$

jadi dengan menyewa pembantu diharapkan pengeluaran per jam = 20 + 10 = $30.

- Kesimpulan dengan menyewa pembantu akan lebih menguntungkan.