

ANALISIS TEGANGAN DAN REGANGAN

2.1. Kekuatan Bahan

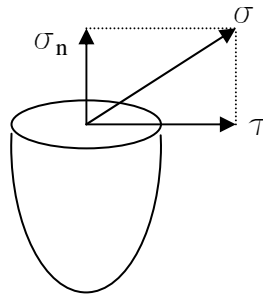
Suatu sistem struktur yang menanggung beban luar (*external forces*) akan menyebabkan timbulnya gaya dalam (*internal forces*) pada elemen-elemen penyusun struktur tersebut, gaya dalam berfungsi untuk menahan beban yang bekerja sesuai dengan hukum keseimbangan (*equilibrium*). Apabila gaya dalam bertambah maka akan menyebabkan bertambahnya tahanan dalam material yang digunakan sampai mencapai suatu nilai maksimum, jika penambahan beban masih terus dilanjutkan maka akan terjadi kegagalan pada elemen struktur tersebut. Batas maksimum kemampuan elemen struktur dalam memberikan tahanan guna melawan beban luar yang bekerja disebut sebagai kekuatan, selanjutnya kekuatan struktur sangat dipengaruhi oleh material yang digunakan, jenis pembebanan, sistem struktur, temperatur, jangka waktu pembebanan dan lain sebagainya.

Kriteria kekuatan juga berhubungan dengan material, hal ini tergantung pada besarnya gaya tarik-menarik dan tolak-menolak antar atom-atom penyusun material yang digunakan pada elemen struktur sebagai hasil dari perubahan jarak antar atom (*interatomic spacing*) akibat bekerjanya gaya luar. Analisis kekuatan bahan perlu mempertimbangkan intensitas gaya dalam yang bekerja untuk menahan seluruh beban luar yang bekerja pada elemen struktur. Intensitas gaya dalam yang bekerja pada setiap titik material disebut sebagai tegangan, sedangkan tegangan maksimum yang terukur pada saat terjadinya kegagalan disebut sebagai kekuatan bahan.

2.2. Tegangan

Tegangan merupakan intensitas gaya dalam pada elemen struktur sebagai reaksi terjadinya deformasi yang timbul akibat bekerjanya beban luar, pada umumnya intensitas gaya ini berarah miring pada bidang potongan. Dalam praktek keteknikan intensitas gaya tersebut diuraikan menjadi tegak lurus dan

sejajar dengan irisan yang sedang dianalisis. Penguraian intensitas gaya ini dapat dilihat pada Gambar 2.1, sehingga menghasilkan tegangan normal dan geser.



Gambar 2.1. Komponen Tegangan Normal dan Geser dari Tegangan

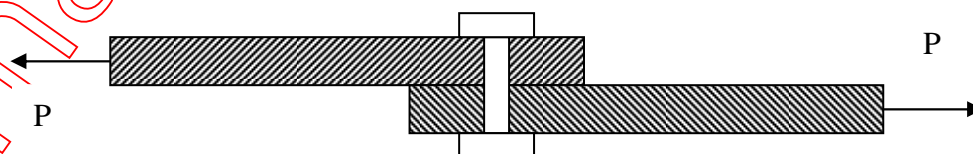
Tegangan normal merupakan intensitas gaya yang bekerja tegak lurus terhadap potongan tampang melintang, apabila tegangan normal tersebut bekerja ke arah luar dari penampang maka disebut sebagai tegangan tarik dengan tanda positif, sedangkan tegangan yang menuju potongan tampang disebut tegangan tekan dengan tanda negatif. Besarnya tegangan normal dihitung menurut Persamaan

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.1)$$

Tegangan geser merupakan intensitas gaya yang bekerja sejajar dengan potongan tampang melintang yang dapat dihitung dengan Persamaan berikut :

$$\tau = \frac{P}{A} \quad (2.2)$$

Contoh nyata bekerjanya tegangan normal dan geser dapat dilihat pada Gambar 2.2, di mana pada batang baja bekerja tegangan normal positif pada A_{baja} sedangkan pada sambungan baut bekerja tegangan geser pada A_{baut} .



Gambar 2.2. Sambungan Baut

2.3. Deformasi

Elemen struktur dapat berubah bentuk secara geometris, fenomena ini antara lain disebabkan karena penempatan beban luar dan perubahan temperatur. Bentuk-bentuk deformasi yang sering dijumpai antara lain perubahan panjang (*elongation*), lentur (*bending*), geser (*shearing*) dan puntir (*twisting*).

Analisis deformasi pada suatu elemen batang dinyatakan dengan parameter yang diukur pada suatu garis sistem batang. Garis sistem batang ini biasanya ditentukan berimpit dengan garis berat, yaitu garis yang melewati titik-titik pusat berat penampang melintang. Penampang itu sendiri diambil sebagai potongan fiktif yang merupakan bidang datar dengan garis sistem sebagai sumbu normal. Beberapa asumsi yang lazim digunakan dalam analisis struktur berbentuk rangka batang (*truss, beam, frame, grid*) meliputi :

- a.) Penampang elemen batang yang permukaannya datar/rata sebelum deformasi, tetap datar/rata sesudah terjadi deformasi.
- b.) Apabila elemen batang dianggap tersusun dari lapisan-lapisan serat yang sejajar dengan garis sistem, maka diasumsikan bahwa tidak ada deformasi yang terjadi pada arah ortogonal serat.
- c.) Deformasi akibat geser lentur pada elemen batang dianggap kecil dan dapat diabaikan, sehingga yang diperhitungkan hanyalah deformasi aksial akibat tegangan normal pada penampang, yang ditimbulkan oleh momen lentur dan gaya aksial.

Ketiga asumsi di atas khususnya sangat mendekati kenyataan untuk kasus batang dengan ukuran lateral yang relatif cukup kecil dibandingkan dengan panjang elemen batang, implikasi dari ketiga asumsi di atas adalah :

- a.) Regangan akan terdistribusi secara linear sepanjang ketinggian atau sepanjang lebar penampang, atau secara umum pada arah dimensi lateral elemen batang.
- b.) Garis yang normal terhadap penampang (termasuk garis sistem) sebelum terjadi deformasi akan tetap normal terhadap penampang setelah deformasi.

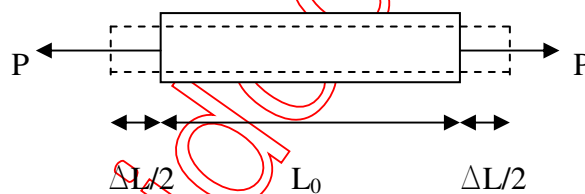
2.4. Regangan

Deformasi yang terjadi pada elemen batang yang menerima beban luar tergantung pada ukuran awal penampang, sehingga lebih tepat jika dinyatakan dalam bentuk regangan yang merupakan nilai banding perubahan dimensi per satuan ukuran terhadap dimensi awalnya, regangan dapat juga didefinisikan sebagai ekspresi non-dimensional dari deformasi.

2.4.1. Regangan Normal

Berdasarkan dimensi panjang elemen batang (L_0) yang menerima beban tarik sebesar P (Gambar 2.3), akan terjadi perpanjangan sebesar ΔL pada elemen batang. Besaran regangan normal dapat dinyatakan dalam bentuk Persamaan berikut :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.1)$$

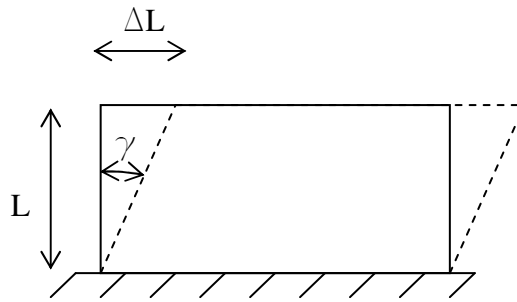


Gambar 2.3. Regangan Normal pada Elemen Batang

Seperti halnya dalam penandaan arah gaya, regangan juga diberi tanda positif jika terjadi gaya tarik yang menyebabkan bertambahnya dimensi batang, sebaliknya digunakan tanda negatif jika diberikan gaya tekan yang menyebabkan berkurangnya dimensi batang dibandingkan ukuran semula.

2.4.2. Regangan Geser

Regangan ini timbul akibat bekerjanya gaya geser pada elemen batang. Fenomena regangan geser dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Regangan Geser

Regangan geser = $\tan \gamma = \gamma$, karena nilai γ yang sangat kecil maka digunakan

$$= \frac{\Delta L}{L} \quad (2.2.)$$

2.4.3. Regangan Volumetric

Suatu benda yang menerima gaya luar yang bekerja ke segala arah, akan menyebabkan terjadinya perubahan volume. Perubahan per satuan volume yang dihitung berdasarkan volume awalnya disebut regangan *volumetric*.

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} \quad (2.3.)$$

Dimensi pada suatu kubus dengan panjang masing-masing sisi x , y dan z menerima beban ke segala arah akan mengalami perubahan pada setiap sisinya sebesar dx , dy dan dz . Sehingga perubahan volume benda tersebut dapat dihitung sebesar :

$$\begin{aligned} \Delta V &= (x + dx).(y + dy).(z + dz) - x.y.z \\ &= (x.y.z + x.y.dz + y.z.dx + x.z.dy) - x.y.z \quad (\text{nilai relatif kecil diabaikan}) \\ &= y.z.dx + x.z.dy + x.y.dz \end{aligned} \quad (2.4.)$$

maka besarnya regangan *volumetric*

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{y.z.dx + x.z.dy + x.y.dz}{x.y.z} \\ &= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2.5.)$$

Dapat disimpulkan bahwa regangan *volumetric* adalah hasil penjumlahan regangan normal ke arah sumbu x, y dan z.

2.5. Angka Poisson

Apabila suatu batang menerima beban tarik dalam arah longitudinal, maka akan terjadi perubahan dimensi dalam bentuk perpanjangan ke arah longitudinal dan penyempitan ke arah lateral, sebaliknya jika bekerja beban aksial tekan maka akan terjadi pemendekan dalam arah longitudinal dan pemekaran dalam arah lateral. Dapat disimpulkan bahwa pada umumnya regangan yang terjadi dalam arah longitudinal dan lateral akan memiliki tanda yang berlawanan (positif dan negatif). Perubahan dimensi dalam arah lateral selalu terjadi secara proporsional dengan perubahan dimensi ke arah longitudinal. Konstanta yang menghubungkan antara regangan ke arah lateral dan longitudinal disebut *poisson's ratio*.

$$\nu = - \frac{\epsilon_{lateral}}{\epsilon_{longitudinal}} \quad (2.6.)$$

Dari Persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa regangan lateral dapat timbul tanpa adanya tegangan ke arah yang sama.

2.6. Hubungan Tegangan dan Regangan

Pada pelaksanaan Uji Tarik yang menggunakan *Universal Testing Machine* dengan penambahan beban secara konstan maka akan terlihat pula terjadinya perpanjangan batang, sehingga grafik dihasilkan grafik yang merupakan hubungan antara laju penambahan beban dengan laju penambahan deformasi batang. Grafik tersebut akan tersaji dalam bentuk linear sampai pada titik *a* yang merupakan batas proporsional. Sampai pada batas ini bahan yang diuji masih mengikuti *Hukum Hooke* yang menyatakan bahwa penambahan tegangan berbanding lurus

secara linear dengan penambahan regangan atau $\frac{\text{Tegangan}}{\text{Regangan}} = \text{Konstan}$.

Konstanta tersebut lazim dilambangkan dengan huruf *E* yang disebut sebagai *Modulus Young* atau *Modulus Elastisitas*, yang ditunjukkan sebagai kemiringan (*slope*) dari diagram tegangan-regangan sampai pada batas

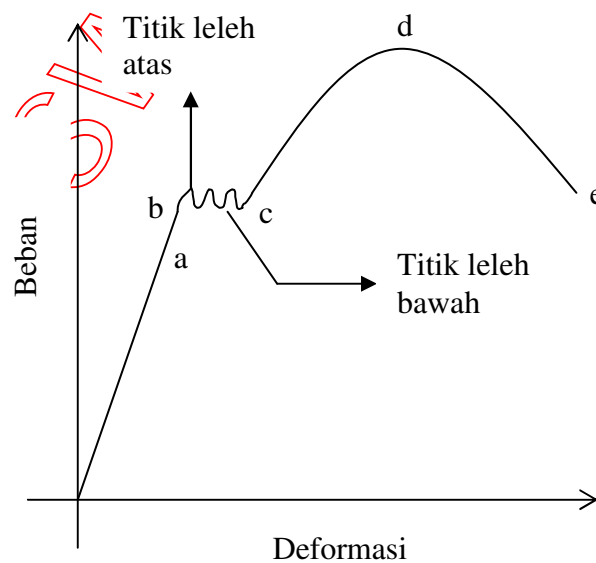
proporsional. Sedikit di atas titik *a* adalah titik *b* yang merupakan batas elastis. Jika beban yang telah diterapkan sampai pada batas elastis ini dilepaskan lagi maka dimensi benda uji akan kembali ke ukuran awalnya. Pada kenyataannya letak titik *a* dan *b* sangat berdekatan sehingga akan sangat sulit membedakan keduanya. Secara matematis hubungan antara tegangan dan regangan dapat dinyatakan dalam Persamaan berikut :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (2.7.)$$

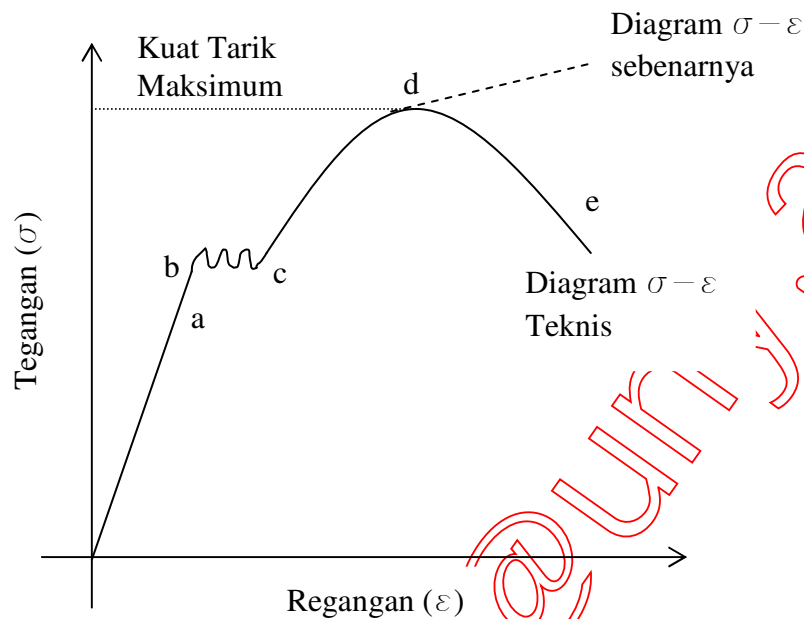
Pada pelaksanaan uji tarik dapat dihitung pula besarnya pertambahan panjang benda uji dengan Persamaan berikut :

$$\Delta L = \varepsilon.L_0 = \frac{P.L_0}{A.E} \quad (2.8.)$$

Apabila pengujian telah mencapai titik *b* dan jalannya pembebanan tetap diteruskan maka akan dijumpai fenomena leleh sampai pada titik *c* baru terjadi penambahan tegangan yang berarti kekuatan bahan bertambah secara progresif, fenomena ini disebut sebagai *strain hardening*. Pada titik *d* beban maksimum tercapai, sehingga disebut sebagai *titik maksimum*, mulai titik ini gejala *necking* terlihat dengan mengecilnya dimensi lateral (luas tampang) sampai mencapai titik *e* yang disebut sebagai *titik putus*.



Gambar 2.5. Hubungan Beban - Deformasi

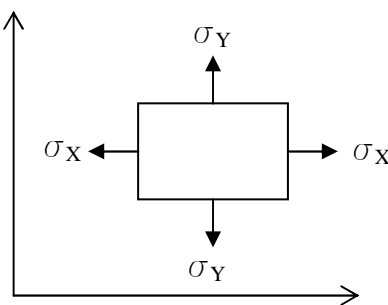


Gambar 2.6. Hubungan Tegangan – Regangan

Pada Gambar 2.6 terlihat dua grafik hasil uji tarik baja, diagram tegangan-regangan teknis dihitung dengan anggapan luas tampang melintang (A) tetap, sedangkan diagram tegangan-regangan sebenarnya memperhitungkan adanya perubahan luas akibat fenomena *necking*.

2.7. Regangan dalam Sistem Tegangan Biaksial dan Triaksial

Sistem tegangan biaksial terjadi apabila dalam suatu sistem struktur bekerja beban aksial dalam dua arah sumbu yang saling tegak lurus (Gambar 2.7), sedangkan triaksial terjadi jika tegangan bekerja dalam tiga arah sumbu koordinat (Gambar 2.8).



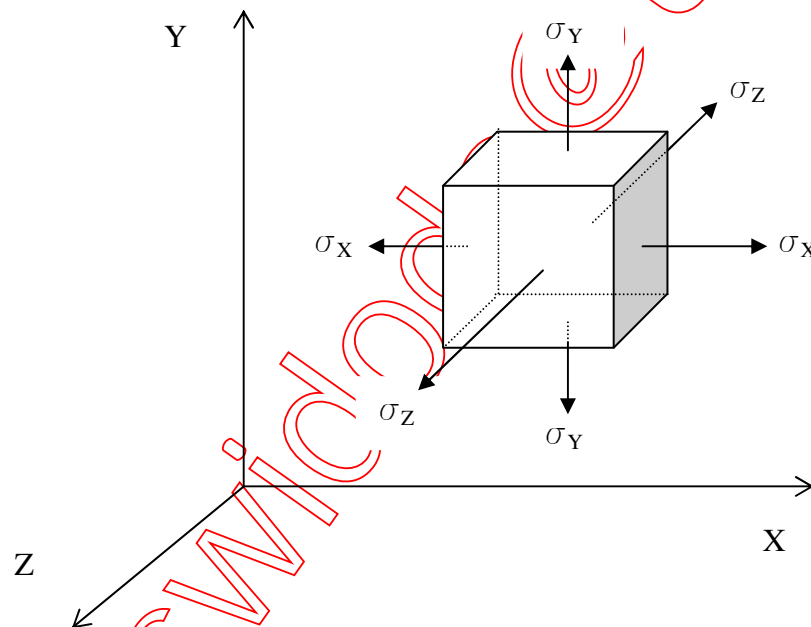
Gambar 2.7. Sistem Tegangan Biaksial

Menurut Gambar 2.7, regangan total dalam arah sumbu x (ϵ_x), dipengaruhi oleh tegangan ke arah sumbu X dan Y (σ_x dan σ_y), sehingga dengan menggunakan hukum Hooke dan angka Poisson dapat ditentukan

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \quad (2.9.)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \quad (2.10.)$$



Gambar 2.8. Sistem Tegangan Triaksial

Selanjutnya dalam sistem tegangan triaksial yang ditunjukkan Gambar 2.8, besarnya regangan total dalam semua arah dipengaruhi oleh besarnya tegangan σ_x , σ_y , dan σ_z , sehingga diperoleh

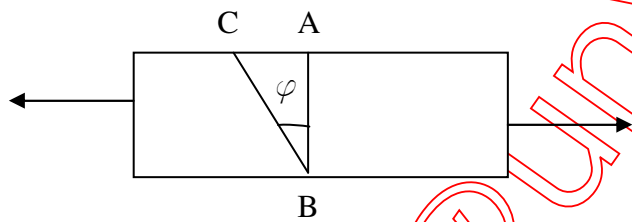
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)) \quad (2.11.)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)) \quad (2.12.)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)) \quad (2.13.)$$

2.8. Tegangan pada Bidang Miring

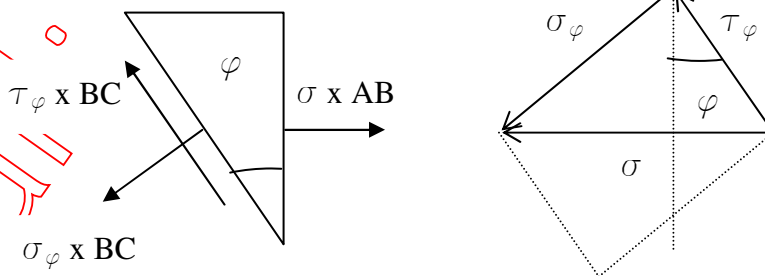
Pada suatu batang dengan luasampang A yang menanggung beban tarik uniaksial P seperti terlihat pada Gambar 2.9, menyebabkan terjadinya tegangan normal σ sepanjang sumbu batang yang dihitung menurut persamaan berikut



Gambar 2.9. Beban Uniaksial

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.14.)$$

Potongan BC merupakan bidang yang memiliki sudut kemiringan φ terhadap potongan AB yang merupakan bidang normal terhadap sumbu aksial batang, selanjutnya perbandingan luas potongan AB dan BC dapat dinyatakan dalam perbandingan panjang garis AB dan BC. Tegangan yang bekerja pada potongan penampang tersebut dapat digambarkan sebagai berikut



σ_{φ} = Tegangan normal bidang BC
 τ_{φ} = Tegangan geser bidang BC

Gambar 2.10. Tegangan pada Bidang Miring

Kesimbangan gaya pada Gambar 2.10 dapat diperoleh dengan mengikuti prinsip *equilibrium* bahwa jumlah gaya dalam semua arah harus bernilai nol, sehingga

$$\sigma_{\varphi} x_{BC} = (\sigma_{xAB}) \cdot \cos \varphi$$

$$\tau_{\varphi} x_{BC} = (\sigma_{xAB}) \cdot \sin \varphi$$

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x \frac{AB}{BC} \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \cos^2 \varphi \quad (2.15.)$$

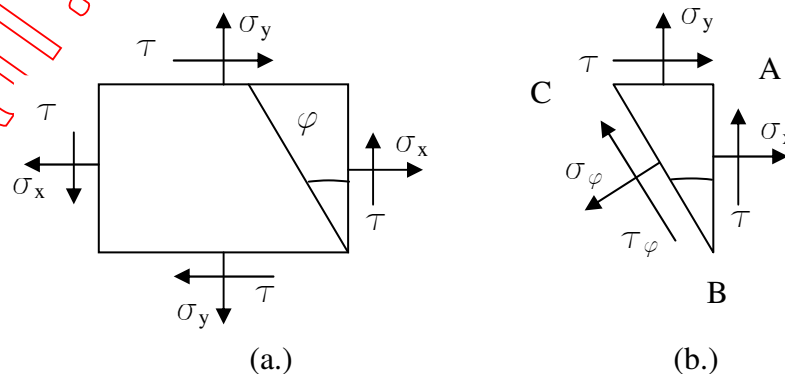
$$\tau_{\varphi} = \sigma_x \frac{AB}{BC} \cdot \sin \varphi = \sigma \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad (2.16.)$$

Berdasarkan kedua Persamaan di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

- Tegangan normal maksimum terjadi pada sudut $\varphi = 0$, yang nilainya sama dengan σ sedangkan besarnya tegangan geser nol.
- Tegangan geser maksimum terjadi pada sudut $\varphi = 45^\circ$, yang nilainya sama dengan $\sigma/2$.

2.9. Tegangan Akibat Beban Campuran

Pada suatu elemen berbentuk empat persegi panjang per satuan ketebalan yang menerima beban berupa tegangan normal σ_x dan σ_y ke arah sumbu X dan Y, bekerja bersama-sama tegangan geser τ seperti terlihat pada Gambar 2.11.a, elemen yang dianalisis sangat kecil sehingga tegangan σ_x , σ_y dan τ dianggap bekerja dalam satu titik tangkap.



Gambar 2.11. Tegangan Akibat Beban Campuran

Tegangan yang bekerja pada bidang ABC seperti terlihat pada Gambar 2.11.b, dimana elemen dan irisannya dianalisis dalam setiap satuan tebal dengan luasan penampang dihitung pada bidang X-Y. Berdasarkan hukum keseimbangan (*equilibrium*), jumlah semua komponen gaya yang bekerja pada irisanampang ke segala arah harus sama dengan nol. Atas dasar uraian di atas maka sistem keseimbangan gaya yang bekerja pada arah tegak lurus bidang BC dapat diuraikan sebagai berikut :

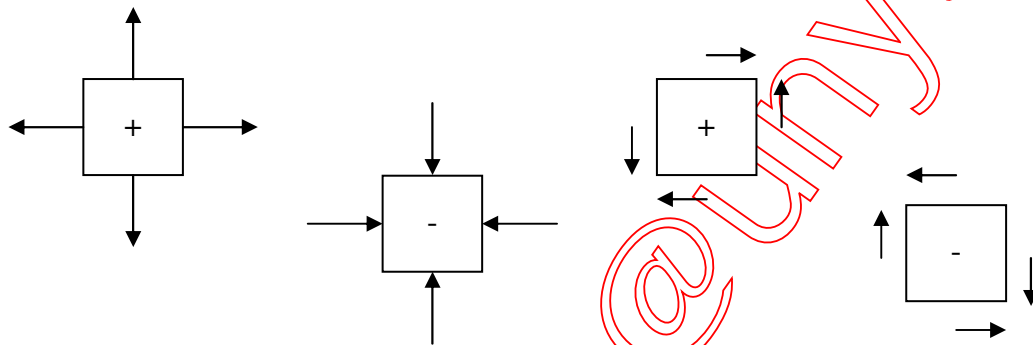
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi xBC} &= \sigma_x \cdot AB \cdot \cos \varphi + \sigma_y \cdot CA \cdot \sin \varphi + \tau \cdot AB \cdot \sin \varphi + \tau \cdot CA \cdot \cos \varphi \\
 \sigma_{\varphi} &= \sigma_x \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \cos \varphi + \sigma_y \cdot \frac{CA}{BC} \cdot \sin \varphi + \tau \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \sin \varphi + \tau \cdot \frac{CA}{BC} \cdot \cos \varphi \\
 &= \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + \tau \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\
 \text{dengan} \quad \cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} ; \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ; \quad \sin 2\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\
 \sigma_{\varphi} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi \quad (2.17.)
 \end{aligned}$$

Sedangkan gaya yang bekerja pada arah bidang BC dapat diuraikan dalam bentuk Persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
 \tau_{\varphi xBC} &= \sigma_x \cdot AB \cdot \sin \varphi - \sigma_y \cdot CA \cdot \cos \varphi - \tau \cdot AB \cdot \cos \varphi + \tau \cdot CA \cdot \sin \varphi \\
 \tau_{\varphi} &= \sigma_x \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \sin \varphi - \sigma_y \cdot \frac{CA}{BC} \cdot \cos \varphi - \tau \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \cos \varphi + \tau \cdot \frac{CA}{BC} \cdot \sin \varphi \\
 &= \sigma_x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \tau \cdot \cos^2 \varphi + \tau \cdot \sin^2 \varphi \\
 &= (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \tau \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\
 \tau_{\varphi} &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \sin 2\varphi - \tau \cdot \cos 2\varphi \quad (2.18.)
 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas berlaku secara valid baik untuk tegangan normal positif (tarik) maupun negatif (desak), demikian pula dengan tegangan geser yang bertanda positif maupun negatif.

Ketentuan penggunaan tanda dalam analisis tegangan normal dan geser dapat dilihat pada Gambar 2.12.



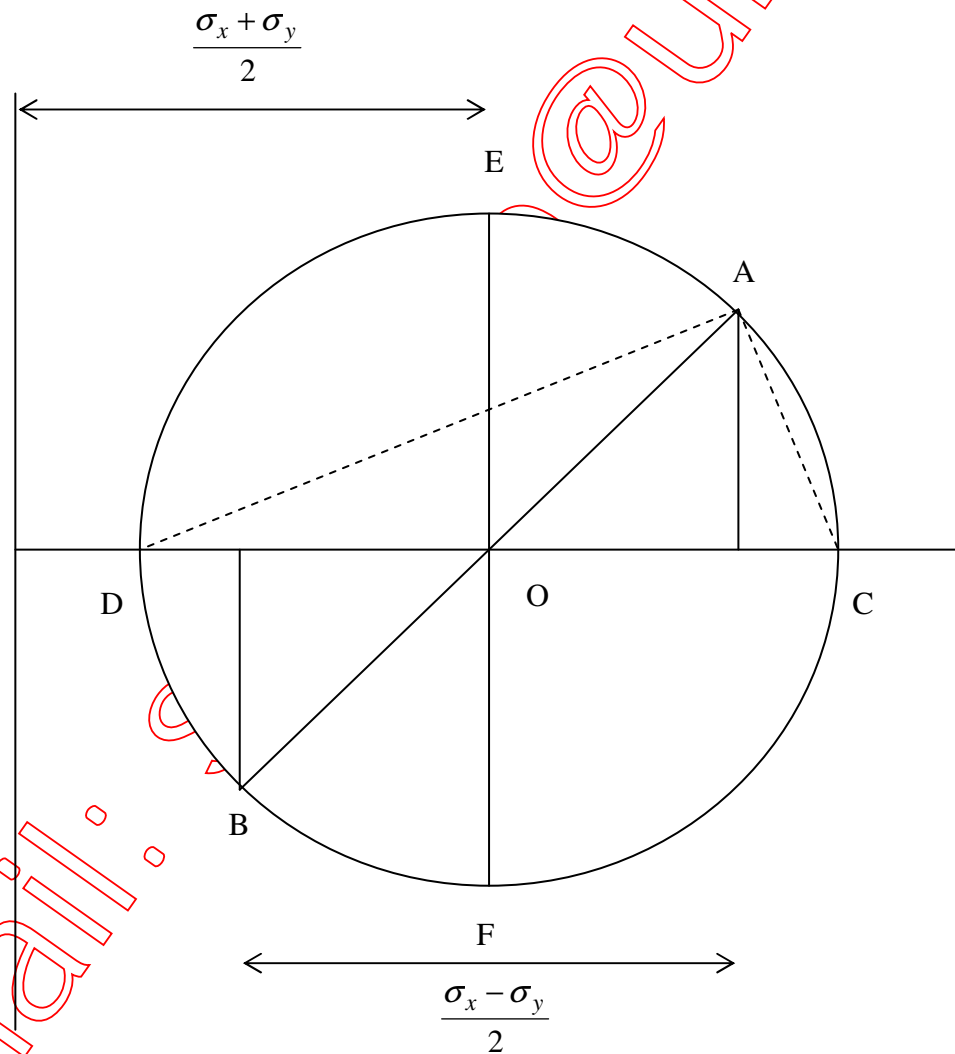
Gambar 2.12. Tanda Tegangan

Analisis tegangan selain dapat dilakukan dengan metode analitis seperti yang telah diuraikan di atas, juga dapat dilakukan secara grafis dengan metode Lingkaran Mohr. Adapun langkah-langkah analisis dengan cara Lingkaran Mohr adalah sebagai berikut :

- Tentukan suatu tata sumbu Kartesius dengan besaran σ_x dan σ_y diukurkan pada sumbu absis dan besaran τ_{xy} pada ordinat dengan skala yang tepat.
- Tentukan titik O sebagai pusat lingkaran dengan nilai $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ pada arah sumbu mendatar.
- Pada titik dengan absis σ_x dan σ_y , masing-masing diukurkan τ_{xy} sebagai ordinat, sehingga diperoleh titik A(σ_x, τ_{xy}) dan titik B($\sigma_y, -\tau_{xy}$).
- Gambarkan lingkaran dengan pusat titik O($(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0$) melalui titik A dan titik B. Jari-jari Lingkaran Mohr ini merupakan nilai tegangan geser maksimum yaitu :

$$\tau_{\max, \min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.19.)$$

- e.) Perpotongan lingkaran dengan sumbu absis memberikan nilai σ_x dan σ_y ekstrim (maksimum di sebelah kanan (C) dan minimum di sebelah kiri (A)).
- f.) Arah sumbu ekstrim φ_p untuk mendapatkan tegangan maksimum diberikan oleh setengah sudut AOC yang setara dengan besar sudut ADC, atau setengah sudut BOD. Arah sumbu ekstrim φ_s diberikan sebagai setengah sudut AOE atau setengah sudut BOF. Dalam hal ini perputaran sumbu dianggap positif jika searah dengan putaran jarum jam.



Keterangan :

A(σ_x, τ_{xy})

B($\sigma_y, -\tau_{xy}$)

C($\sigma_{x \text{ max}}, 0$)

D($\sigma_y \text{ min}$, 0)

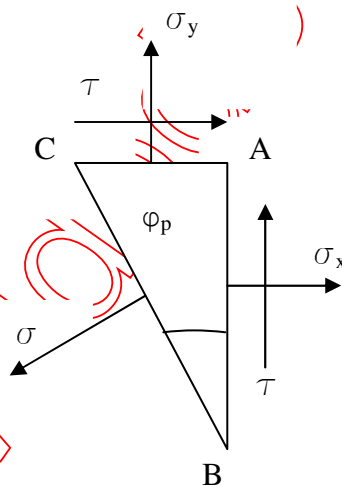
E(0, $\tau_{xy \text{ max}}$)

F(0, $\tau_{xy \text{ min}}$)

Gambar 2.13. Lingkaran Mohr untuk Analisis Tegangan

2.10. Analisis Tegangan Utama

Dalam kasus tegangan tegangan dua dimensi, akan dijumpai dua bidang yang saling tegak lurus, di mana nilai tegangan geser (τ_ϕ) bernilai nol dan tegangan normalnya mencapai nilai ekstrim. Kedua bidang yang saling tegak lurus tersebut dikenal sebagai bidang-bidang utama (*principal planes*) sedangkan tegangan yang bekerja pada bidang utama disebut tegangan utama (*principal stresses*). Pada irisan elemen yang tergambar (ABC) dianggap bidang BC merupakan bidang utama, sehingga sudut CBA merupakan sudut kemiringan utama (ϕ_p).



Gambar 2.14. Bidang Utama (*Principal Plane*)

Keseimbangan gaya dalam arah sumbu X dapat diuraikan dalam bentuk berikut ini :

$$\sigma \cdot BC \cdot \cos \phi_p = \sigma_x \cdot AB + \tau \cdot CA$$

$$\sigma = \sigma_x \cdot \frac{AB}{BC \cdot \cos \phi_p} + \tau \cdot \frac{CA}{BC \cdot \cos \phi_p}$$

$$\sigma = \sigma_x + \tau \cdot \tan \phi_p \quad (\text{a.})$$

Analog Persamaan di atas untuk penguraian gaya dalam arah sumbu Y diperoleh :

$$\begin{aligned}\sigma \cdot BC \sin \varphi_p &= \sigma_y \cdot CA + \tau \cdot AB \\ \sigma &= \sigma_y \cdot \frac{CA}{BC \cdot \sin \varphi_p} + \tau \cdot \frac{AB}{BC \cdot \sin \varphi_p} \\ \sigma &= \sigma_x + \tau \cdot \cot \varphi_p\end{aligned}\quad (b.)$$

Dengan menggunakan Persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$(\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y) = \tau^2 \quad (2.20.)$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma + (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau^2) = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau^2)}}{2 \cdot 1} \\ \sigma_{1,2} &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}\end{aligned}\quad (2.21.)$$

Karena pada semua bidang utama (*principal planes*) besarnya tegangan geser (*shear stress*) selalu sama dengan nol, maka besarnya sudut φ_p dapat dihitung dengan;

$$\begin{aligned}\tau_\varphi &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cdot \sin 2\varphi_p - \tau \cdot \cos 2\varphi_p \\ 0 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cdot \sin 2\varphi_p - \tau \cdot \cos 2\varphi_p \\ \tan 2\varphi_p &= \frac{2 \cdot \tau}{(\sigma_x - \sigma_y)}\end{aligned}\quad (2.22.)$$

atau dapat juga diperoleh dengan mencari turunan dari Persamaan 2.17 terhadap sudut φ

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi ; \quad \text{sehingga}$$

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot \cos 2\varphi = 0; \text{ maka}$$

$$\tan 2\varphi_p = \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (2.22.)$$

Besarnya tegangan geser maksimum (τ_{\max}) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan 2.19 ke dalam Persamaan 2.12, sehingga diperoleh :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{\max} \quad (a.)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{\max} \quad (b.)$$

Apabila Persamaan b dikurangkan terhadap Persamaan a, maka akan diperoleh besarnya tegangan geser maksimum adalah :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \cdot \tau_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \quad (2.23.)$$

Sudut potongan yang menyebabkan dicapai nilai tegangan geser maksimum diperoleh dengan menurunkan Persamaan 2.18.

$$\tau_\varphi = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \sin 2\varphi - \tau \cdot \cos 2\varphi; \quad \text{sehingga}$$

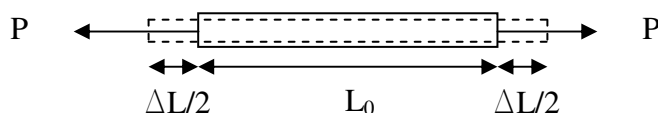
$$\frac{d\tau_\varphi}{d\varphi} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi = 0; \text{ maka}$$

$$\tan 2\varphi_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau} \quad (2.24.)$$

2.11. Contoh Penerapan

Contoh 2.1.: Suatu batang baja dengan penampang berupa lingkaran yang berdiameter 32 mm dan panjang 75 cm, nilai elastisitas dan angka poisson masing-masing 200 GPa dan 0,30 menerima beban tarik sebesar 170 kN. Hitung perubahan panjang dan luas tampang batang tersebut.

Penyelesaian :



Gambar 2.15. Kasus Tegangan Aksial
Luas tampang batang yang menerima beban yaitu :

$$A = 0,25 \cdot \pi \cdot d^2 = 0,25 \cdot \pi \cdot 32^2 = 804,25 \text{ mm}^2$$

Tegangan normal yang timbul pada penampang batang sebesar :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{170000}{804,25} = 211,377 \text{ MPa}$$

Besarnya regangan dalam arah longitudinal sebesar :

$$\varepsilon_{long} = \frac{\sigma}{E} = \frac{211,377}{200000} = 1,057 \cdot 10^{-3}$$

Perubahan panjang dalam arah longitudinal sebesar :

$$\Delta l = \varepsilon_{long} \cdot l_0 = 1,057 \cdot 10^{-3} \cdot 750 = 0,79 \text{ mm}$$

sehingga panjang batang yang baru menjadi sebesar :

$$l = l_0 + \Delta l = 750 + 0,79 = 750,79 \text{ mm}$$

Regangan yang terjadi dalam arah lateral yaitu :

$$\varepsilon_{lat} = -\nu \cdot \varepsilon_{long} = -0,30 \cdot 1,057 \cdot 10^{-3} = -3,171 \cdot 10^{-4}$$

Perubahan luas tampang yang terjadi :

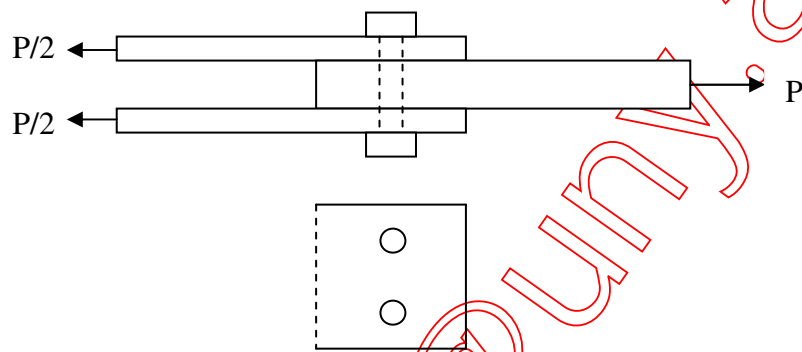
$$\Delta A = \varepsilon_{lat} \cdot A_0 = -3,171 \cdot 10^{-4} \cdot 804,25 = -0,283 \text{ mm}^2$$

Luas tampang yang baru menjadi :

$$A = A_0 + \Delta A = 804,25 - 0,283 = 803,967 \text{ mm}^2$$

Contoh 2.2. : Tiga buah pelat baja disambung menggunakan dua buah baut yang masing-masing berdiameter 16 mm dengan kekuatan geser 200

MPa, berapakah besarnya gaya aksial P yang dapat menyebabkan kegagalan geser pada alat sambung tersebut ?



Penyelesaian :

Luasan alat sambung

$$A_{baut} = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_{baut} = 2 \cdot \pi \cdot 8^2$$

$$A_{baut} = 402,124 \text{ mm}^2$$

Kekuatan maksimum alat sambung dalam menahan gaya geser

$$P = \sigma_{ijin} \times A_{baut}$$

$$P = 200 \times 402,124$$

$$P = 80424,77 \text{ N}$$

$$P = 80,425 \text{ kN}$$

Jadi beban aksial yang menyebabkan gagal geser pada alat sambung sebesar 80,425 kN

Contoh 2.3. : Pada suatu titik material dalam elemen struktur diketahui komponen tegangan meliputi $\sigma_x = 60$ MPa, $\sigma_y = 10$ MPa dan $\tau = 20$ MPa. Tentukan sudut potong bidang utama berikut komponen tegangannya dan tentukan juga besarnya tegangan geser maksimum berikut sudut potongnya.

Penyelesaian :

Perhitungan kemiringan sudut bidang utama

$$\begin{aligned}\tan 2\varphi_p &= \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)} \\ &= \frac{2 \cdot 20}{(60 - 10)} = 0,80\end{aligned}$$

$$2\varphi_p = 38^{\circ} 39' 35''$$

$$\varphi_p = 19^{\circ} 19' 48''$$

Perhitungan tegangan utama

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{(60 + 10)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 10}{2}\right)^2 + 20^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= 35 \text{ MPa} + 32,017 \text{ MPa} \\ &= 67,017 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= 35 \text{ MPa} - 32,017 \text{ MPa} \\ &= 2,984 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Perhitungan sudut bidang geser maksimum

$$\tan 2\varphi_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau} = -\frac{(60 - 10)}{2 \cdot 20} = -1,25$$

$$2\varphi_s = -51^{\circ} 20' 25''$$

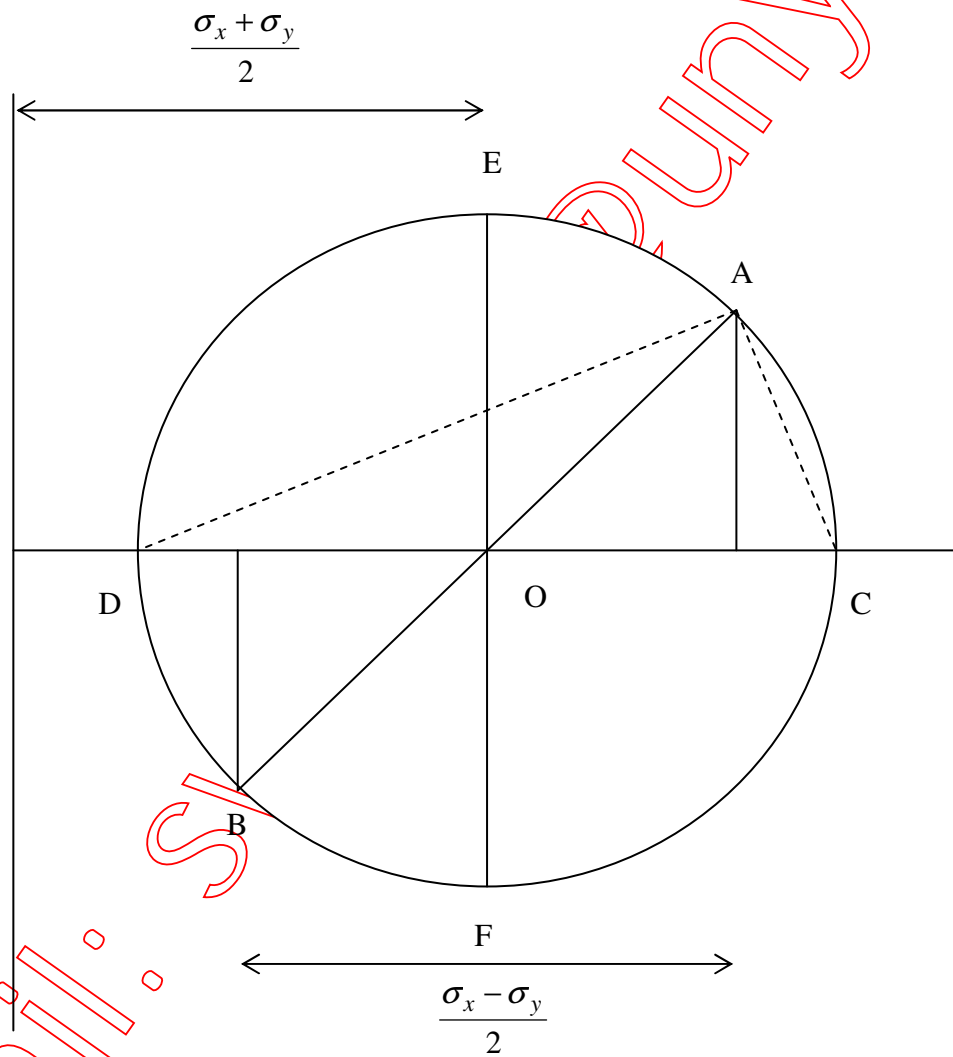
$$\varphi_s = -25^{\circ} 40' 12''$$

Perhitungan tegangan geser maksimum

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{(67,017 - 2,984)}{2} = 32,017 \text{ MPa}$$

Analisis tegangan dengan lingkaran Mohr



Gambar 2.16. Lingkaran Mohr

a.) Besarnya tegangan maksimum pada terletak di titik C sedangkan tegangan minimum terletak di titik D, maka

$$\sigma_{\max} = 67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = 3 \text{ MPa}$$

- b.) Besarnya sudut putar untuk mendapatkan tegangan maksimum pada titik C dapat diukur menurut sudut AOC

$$2 \cdot \varphi_p = 38^\circ$$

$$\varphi_p = 19^\circ$$

- c.) Besarnya tegangan geser maksimum pada titik E dapat diukur menurut jari-jari lingkaran Mohr, atau sebesar

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{67 - 3}{2}$$

$$= 32 \text{ MPa}$$

- d.) Besarnya sudut putar untuk mendapatkan tegangan geser maksimum pada titik E dapat diukur menurut sudut AOE

$$2 \cdot \varphi_s = 52^\circ$$

$$\varphi_s = 26^\circ$$

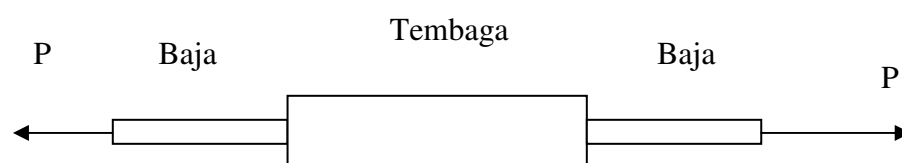
Soal Latihan

- 2.1. Sebuah batang komposit tersambung secara kaku dan konsentris, terdiri dari dua batang baja masing-masing berdiameter 20 mm dan panjang 100 mm dan sebatang tembaga berdiameter 50 mm dengan panjang 200 mm. Jika diketahui Elastisitas Baja (E_s) sebesar 210 GPa dan Elastisitas Tembaga (E_c) sebesar 120 GPa,

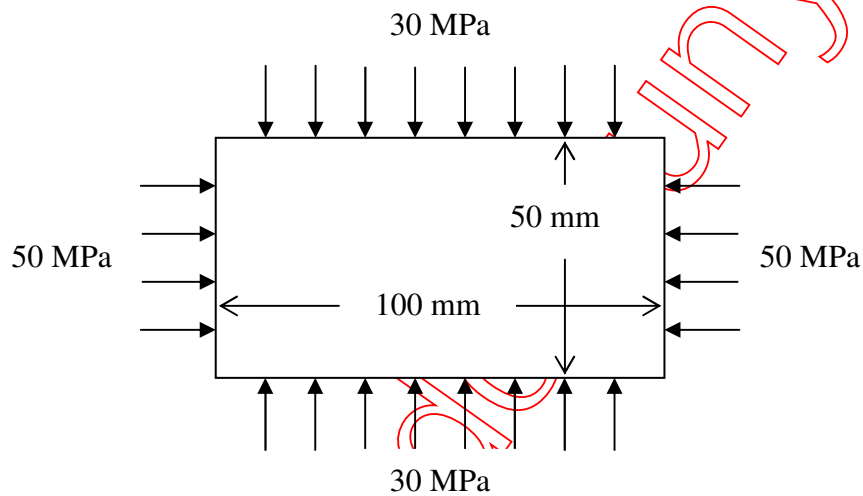
a. Hitung beban aksial sentris P yang menyebabkan terjadinya perubahan panjang sebesar 0,5 mm.

b. Hitung tegangan yang terjadi pada masing-masing batang.

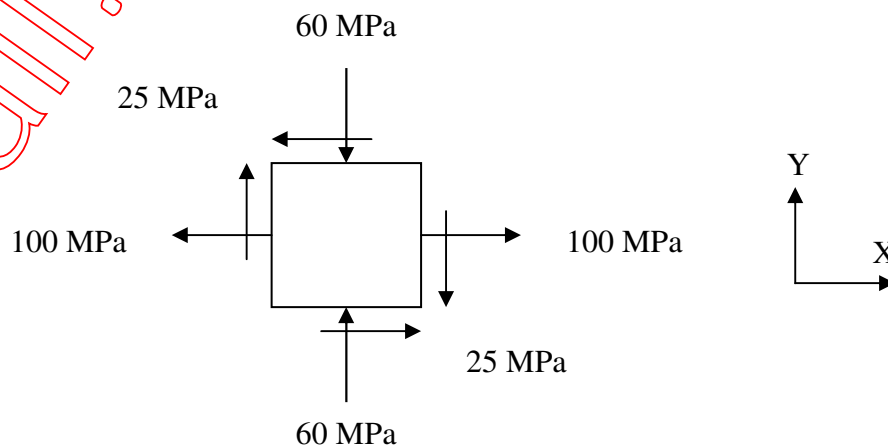
c. Hitung perubahan luas tampang baja dan tembaga jika angka poisson baja $\nu_s = 0,3$ dan angka poisson tembaga $\nu_c = 0,28$



- 2.2. Sebuah plat baja dengan panjang 100 mm dan lebar 50 mm menerima beban yang bekerja ke arah sumbu X dan sumbu Y, sehingga timbul tegangan biaksial. Hitung perubahan luas plat, jika diketahui nilai elastisitas baja (E) 200 GPa dan besarnya angka Poisson (ν) adalah 0,28.



- 2.3. Pada suatu potongan penampang bekerja sistem tegangan biaksial seperti ditunjukkan gambar di bawah ini.
- Tentukan besar dan arah tegangan-tegangan utama yang bekerja pada penampang tersebut !
 - Hitung komponen tegangan pada penampang yang diputar dengan sudut 30° !



E-mail: Swidodo@uny.ac.id