

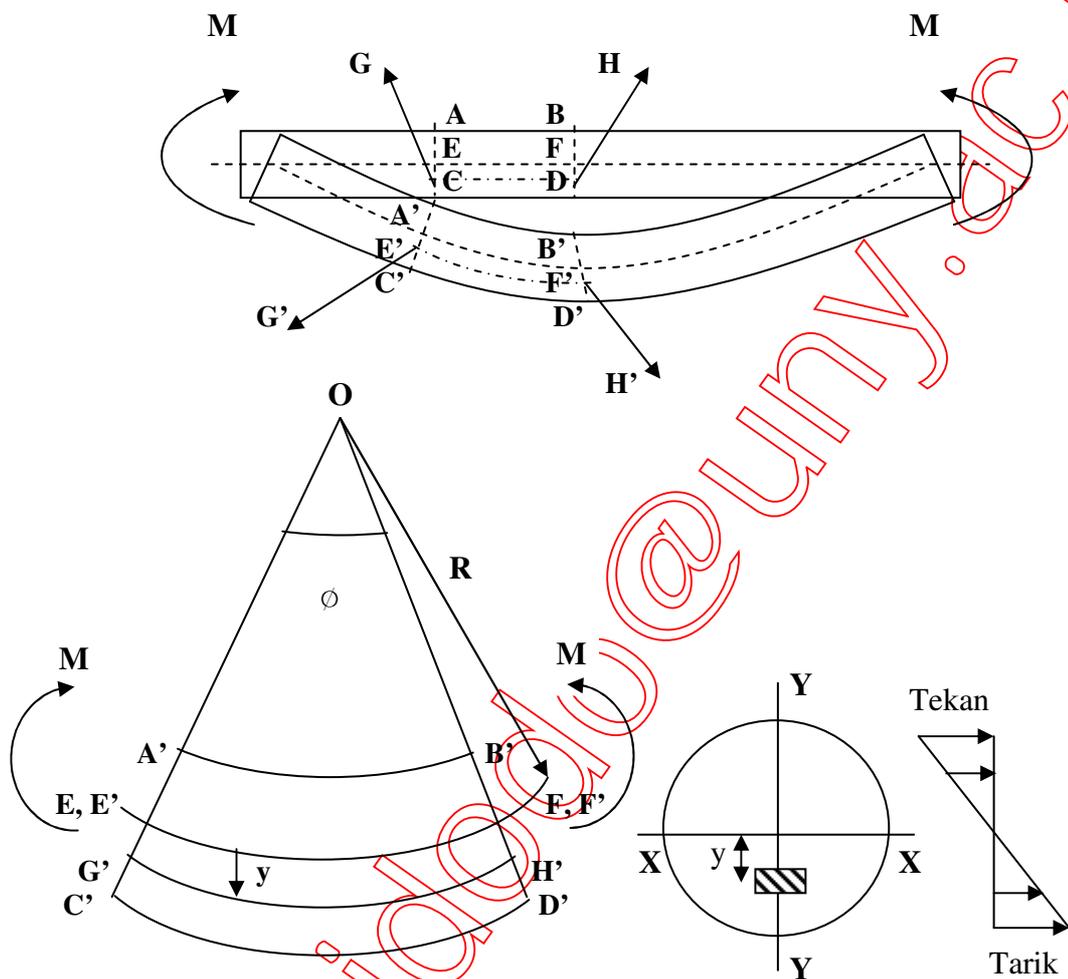
ANALISIS KASUS LENTUR DAN GESER PADA BALOK ELASTIS

3.1. Formulasi Lentur

Suatu elemen balok dikatakan dalam kondisi lentur murni, jika balok tersebut menerima beban yang berupa momen lentur secara konstan tanpa adanya pengaruh gaya geser. Teori yang dibahas dalam bab ini ditujukan untuk balok lurus yang menerima beban lentur murni, persamaan yang dihasilkan nantinya cukup akurat digunakan meskipun terjadi momen lentur yang besarnya bervariasi di sepanjang bentangan balok. Beberapa asumsi dasar yang digunakan dalam analisis ini meliputi :

- a.) Penampang melintang balok yang semula merupakan bidang datar akan tetap berupa bidang datar setelah bekerjanya momen lentur.
- b.) Bentangan balok yang pada awalnya berbentuk garis lurus, akan melentur membentuk busur lingkaran di mana semua serat dalam arah longitudinal memiliki besaran jari-jari yang sama.
- c.) Jari-jari lingkaran yang terbentuk jauh lebih besar jika dibandingkan dengan dimensi transversalnya.
- d.) Tegangan yang timbul akibat bekerjanya momen lentur hanya terjadi dalam arah longitudinal, tidak ada tegangan dalam arah lateral.
- e.) Modulus elastisitas dalam material pembentuk balok memiliki nilai yang sama dalam kondisi tertekan maupun tertarik.

Pada Gambar 3.1 terlihat balok sederhana yang menerima beban berupa momen M sehingga menimbulkan momen lentur murni pada balok tersebut. Momen lentur murni yang terjadi menyebabkan serat-serat pada bagian atas garis netral menerima tegangan tekan sedangkan bagian di bawah garis netral menerima tegangan tarik. Tegangan dalam arah longitudinal yang terjadi pada serat-serat bahan yang ada di sepanjang garis netral besarnya sama dengan nol.



Gambar 3.1. Peristiwa Lentur Murni Balok Elastis

Balok sederhana yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 ditinjau pada potongan ABCD, pada bagian potongan tersebut terjadi deformasi yang disebabkan adanya momen lentur. Secara keseluruhan di sepanjang bentangan balok juga terjadi lendutan yang membentuk kurva dengan jari-jari sebesar R . Pada Gambar 3.1 juga terlihat panjang potongan AB berkurang menjadi $A'B'$ dan panjang potongan CD bertambah menjadi $C'D'$ sedangkan potongan EF yang terletak pada garis netral panjangnya tidak berubah. Lendutan elemen ABCD membentuk sudut sebesar ϕ pada titik pusat O . Selanjutnya tinjauan dilakukan terhadap serat GH yang berjarak y dari garis netral, letak serat ini bisa ditentukan secara acak dan besarnya tegangan longitudinal yang terjadi dapat dianalisis dengan cara berikut :

Regangan yang terjadi pada serat GH adalah $\frac{G'H'-GH}{GH}$

Panjang serat setelah berdefomasi $G'H' = (R + y)\phi$

Panjang awal serat $GH = EF = R\phi$

Regangan serat GH dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\varepsilon = \frac{(R + y)\phi - R\phi}{R\phi} = \frac{y}{R} \quad (3.1)$$

Menurut Hukum Hooke hubungan antara tegangan normal akibat momen lentur

(σ) dengan regangan (ε) adalah $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

Maka dapat diketahui bahwa $\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R}$

atau $\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \quad (3.2)$

Persamaan 6.2 menunjukkan bahwa tegangan normal (σ) berbanding lurus dengan jarak serat terhadap garis netral (y), sedangkan besarnya E/R konstan tergantung pada elemen balok dan beban yang diberikan sebagaimana terlihat pada distribusi tegangan normal (Gambar 3.1.).

Selanjutnya prinsip keseimbangan gaya dapat diterapkan pada irisan bidang seluas dA , di mana jumlah gaya normal yang bekerja selalu harus sama dengan nol, sehingga

$$\int \sigma \cdot dA = 0$$

Substitusi nilai σ dari Persamaan 3.2, dapat diperoleh

$$\frac{E}{R} \int y \cdot dA = 0$$

Karena E/R bernilai tidak sama dengan nol, maka

$$\int y \cdot dA = 0$$

Persamaan ini menunjukkan garis netral dalam arah sumbu X berimpit dengan pusat berat tampang.

Keseimbangan momen pada penampang balok

$$M = \int \sigma \cdot y \cdot dA$$

$$M = \int \frac{E}{R} \cdot y^2 \cdot dA$$

$$M = \frac{E}{R} \int y^2 \cdot dA$$

Pada Persamaan di atas ditemui besaran $\int y^2 \cdot dA$ yang merupakan momen inersia tampang (I), sehingga diperoleh Persamaan berikut

$$M = \frac{E}{R} \cdot I$$

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \quad (3.3.)$$

Berdasarkan Persamaan 3.2 dan 3.3 maka diperoleh

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad (3.4.)$$

- a.) Besarnya momen lentur yang dapat ditanggung oleh penampang balok untuk nilai tegangan normal maksimum yang diijinkan disebut sebagai tahanan momen, yang dapat dihitung dengan

$$M = \sigma_{\max} \cdot \frac{I}{y_{\max}}$$

$$M = \sigma_{\max} \cdot Z \quad (3.5.)$$

di mana σ_{\max} adalah tegangan maksimum yang terjadi pada serat terluar dari penampang balok.

dan $Z = \frac{I}{y_{\max}}$ merupakan modulus tampang.

- b.) Prinsip keseimbangan pada tampang balok akibat fenomena lentur murni mensyaratkan jumlah momen tahanan internal pada saat terjadi tegangan sebesar σ pada arah potongan sumbu YY harus sama dengan nol untuk kasus di mana balok menerima momen lentur M pada bidang XY, sehingga

$$\int (\sigma \cdot dA) \cdot x = 0$$

$$\int \left(\frac{E}{R} \cdot y \cdot dA \right) \cdot x = 0$$

$$\text{atau } \int x \cdot y \cdot dA = 0$$

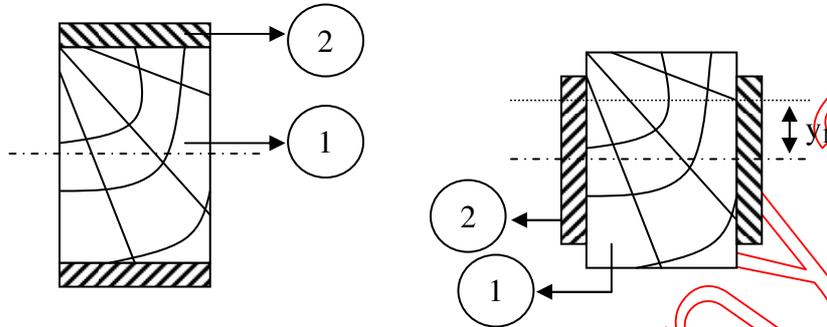
di mana $\int x \cdot y \cdot dA$ merupakan momen inersia sentrifugal.

Hal ini menunjukkan bahwa teori lentur murni hanya berlaku untuk sumbu utama (*principal axes*) pada tampang melintang, yang merupakan sepasang sumbu saling tegak lurus dengan nilai inersia sentrifugal sama dengan nol.

- c.) Tegangan longitudinal, σ yang timbul sebagai akibat bekerjanya momen lentur juga mengakibatkan terjadinya regangan dalam arah lateral sebagai akibat *poisson effect*, yang menimbulkan perubahan ukuran tampang melintang. Bagian penampang balok yang menerima tekanan akan berkurang luas penampangnya, sedangkan bagian yang menerima tarik akan bertambah luasnya. Perilaku semacam ini disebut *antielastic curvature*, meskipun demikian deformasi yang terjadi sangat kecil sehingga tidak mempengaruhi hasil perhitungan teori lentur murni.

3.2. Balok Komposit

Dalam perencanaan struktur bangunan, pada suatu saat sangat dimungkinkan adanya kebutuhan untuk menggunakan elemen struktur yang penampangnya merupakan gabungan dari dua jenis material yang berbeda. Metode ini dilaksanakan dengan tujuan utama memperkuat bahan penyusun utama yang lebih lemah tetapi memiliki nilai ekonomis yang lebih murah, atau dengan pertimbangan berat sendiri struktur di mana bahan utama yang lebih ringan tetapi memiliki karakteristik yang lemah diperkuat dengan material yang lebih kuat tetapi juga memiliki berat jenis yang lebih besar. Jenis struktur semacam ini sering disebut sebagai struktur komposit. Contoh kasus yang sering dijumpai dalam struktur bangunan adalah penggunaan struktur beton bertulang dan perkuatan balok kayu menggunakan plat baja yang disambung secara kaku, sebagaimana terlihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Penampang Balok Komposit

Pada penampang balok komposit yang menggunakan dua jenis material yang berbeda yang ditandai sebagai bahan 1 dan 2, disambungkan secara kaku maka regangan yang terjadi di setiap bagian luasan tampang akan bernilai sama. Hubungan ini dapat dinyatakan dalam Persamaan berikut :

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad (\text{a.})$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan Lentur, sebagaimana ditunjukkan pada Persamaan 3.4, tahanan momen pada masing-masing material yang digunakan adalah :

$$M = \frac{\sigma \cdot I}{y}$$

$$M_1 = \frac{\sigma_1 \cdot I_1}{y}, \text{ dan}$$

$$M_2 = \frac{\sigma_2 \cdot I_2}{y}$$

di mana y adalah jarak serat yang ditinjau terhadap garis netral.

Maka tahanan momen total pada balok komposit;

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\sigma_1 \cdot I_1}{y} + \frac{\sigma_2 \cdot I_2}{y} \quad (\text{b.})$$

Dengan mensubstitusikan nilai σ_2 dalam Persamaan (a) ke dalam (b),

$$M = \frac{\sigma_1 \cdot I_1}{y} + \left(\sigma_1 \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \cdot \frac{I_2}{y} = \frac{\sigma_1}{y} \cdot \left(I_1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot I_2 \right), \text{ atau}$$

$$M = \frac{\sigma_1}{y} \cdot I_{eq} \quad (3.6.)$$

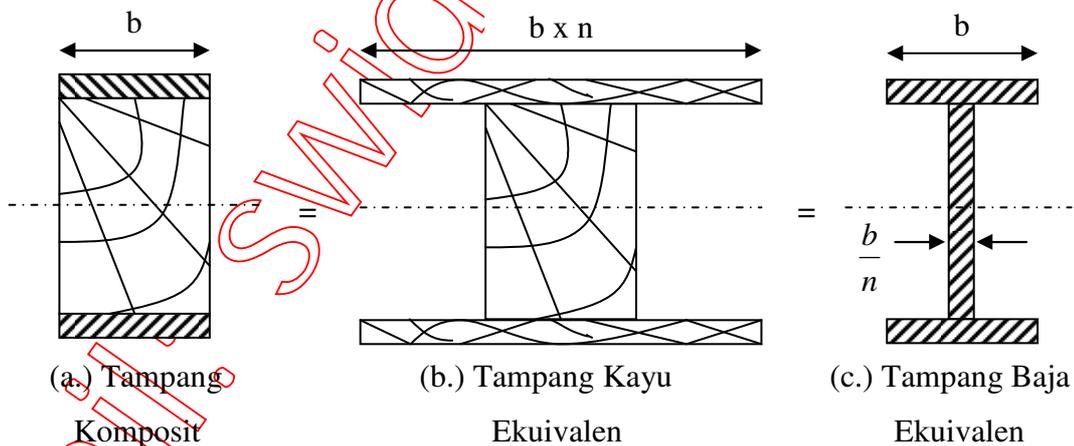
di mana $I_{eq} = I_1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot I_2$ merupakan momen inersia ekuivalen dari balok

komposit terhadap material “1”. Jika $\frac{E_2}{E_1} = n$, yang disebut sebagai angka perbandingan modulus (*modular ratio*), maka

$$I_{eq1} = I_1 + n \cdot I_2 \quad (3.7.a.)$$

Analog cara di atas, momen inersia ekuivalen dari balok komposit terhadap material “2” dapat dihitung dengan

$$I_{eq2} = I_2 + \left(\frac{1}{n} \right) \cdot I_1 \quad (3.7.b.)$$



Gambar 3.3. Ekuivalensi Luasan Tampang Balok Komposit

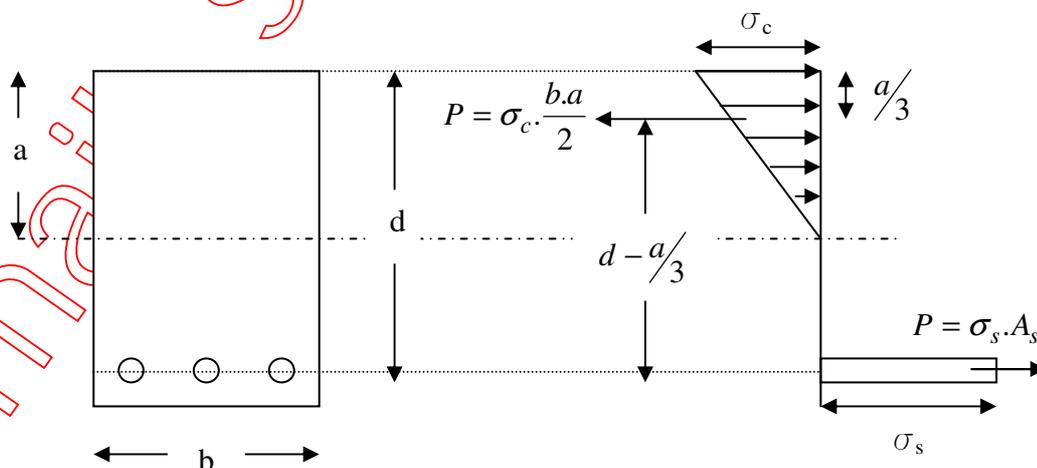
Persamaan 3.7 menunjukkan cara yang sangat mudah untuk melakukan analisis tegangan akibat lentur murni pada penampang komposit. Luasan ekuivalen untuk satu jenis material (material “2”) terhadap material yang lain

(material “1”) diperoleh dengan mengalikan lebar material “2” (dimensi yang sejajar dengan sumbu netral) dengan nilai “n”. Sebagai contoh penampang komposit yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.a di mana material “1” berupa kayu dan material “2” berupa baja, Gambar 3.3.b menunjukkan ekuivalensi luasan komposit terhadap tampang kayu sedangkan pada Gambar 3.3.c luasan tampang komposit diekuivalensikan dengan tampang baja.

3.3. Balok Beton Bertulang

Jenis struktur komposit yang paling sering digunakan di bidang teknik sipil adalah beton bertulang, di mana baja tulangan digunakan untuk memperkuat beton yang lemah terhadap tarik. Untuk mendapatkan hubungan tegangan beton bertulang pada elemen struktur balok digunakan beberapa asumsi dasar sebagai berikut :

- Beton hanya efektif menahan tegangan tekan, sehingga kekuatan beton tidak diperhitungkan pada bagian penampang yang menerima tegangan tarik.
- Tampang komposit yang terdiri dari beton dan baja tulangan dianggap mengikuti Hukum Hooke secara sempurna, di mana tegangan berbanding lurus dengan regangan.
- Besarnya tegangan yang terjadi di setiap titik pada penampang balok sebanding dengan jarak titik tinjau terhadap garis netral. Hal ini berarti beton dan baja dianggap monolit dan tidak terjadi *slip*.



Gambar 3.4. Analisis Tegangan Beton Bertulang

Pada Gambar 3.4 ditunjukkan cara analisis tegangan pada balok beton bertulang dengan σ_c merupakan kuat tekan beton dan σ_s adalah tegangan tarik baja. Berdasarkan anggapan bahwa regangan yang terjadi sebanding dengan jarak serat terhadap garis netral dan mengikuti Hukum Hooke, maka

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{E_s \cdot (d - a)}{E_c \cdot a}$$
$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = n \cdot \frac{(d - a)}{a} \quad (3.8.)$$

di mana $n = \frac{E_s}{E_c}$

Menurut Hukum Keseimbangan gaya,

$$\sigma_s \cdot A_s + \frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot A_c = 0$$

di mana A_c merupakan luasan beton pada sisi tekan dan A_s adalah luas total baja tulangan.

atau $\sigma_s \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot A_c = P$

$$P = \sigma_s \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot b \cdot a \quad (3.9.)$$

Selanjutnya tahanan momen "M" dapat dihitung dengan

$$M = P \cdot \left(d - \frac{a}{3} \right)$$

Substitusi nilai P dari Persamaan 3.9 maka diperoleh

$$M = \sigma_s \cdot A_s \cdot \left(d - \frac{a}{3} \right) \quad (3.10.)$$

$$M = \left(\frac{\sigma_c}{2} \cdot b \cdot a \right) \cdot \left(d - \frac{a}{3} \right) \quad (3.11.)$$

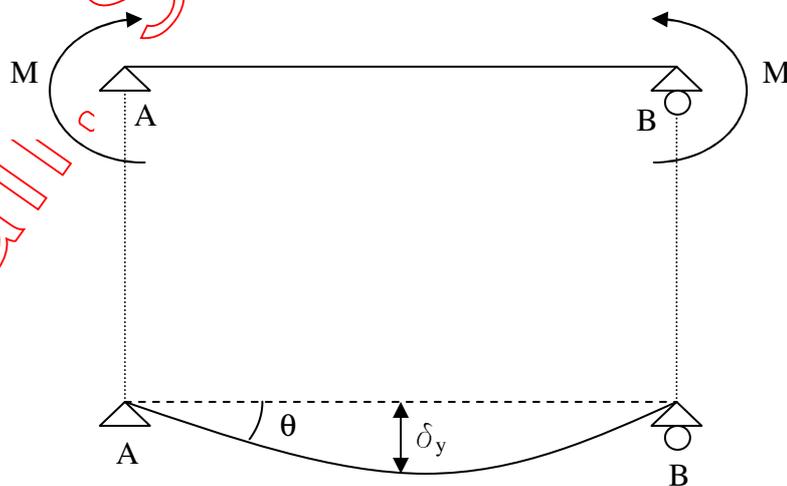
Luasan tampang baja tulangan yang diperlukan dapat dihitung menggunakan Persamaan 3.9, sedangkan untuk menentukan lokasi pemasangannya dapat digunakan Persamaan 3.8. Ukuran tampang balok dan

tulangan dapat dihubungkan dengan momen lentur yang bekerja menggunakan Persamaan 3.10 dan 3.11.

3.4. Lendutan

Apabila suatu balok menerima beban dalam arah transversal, maka sumbu longitudinal elemen balok tersebut akan berpindah dari posisi semula. Pada setiap bagian balok akan berpindah dalam arah transversal, perpindahan ini sering disebut sebagai lendutan atau defleksi. Seiring terjadinya lendutan juga terjadi deformasi lain dalam bentuk perputaran sumbu balok yang biasa disebut sebagai rotasi atau *slope*. Deformasi yang terjadi pada balok sederhana yang menerima beban berupa momen lentur dapat dilihat pada Gambar 3.5. Lendutan atau defleksi pada balok terjadi karena bekerjanya momen lentur dan gaya geser, tetapi pada umumnya yang diperhitungkan hanyalah lendutan akibat momen lentur sedangkan lendutan akibat gaya geser sering diabaikan, karena nilainya yang relatif kecil pada balok yang memiliki dimensi longitudinal yang jauh lebih besar daripada dimensi lateralnya.

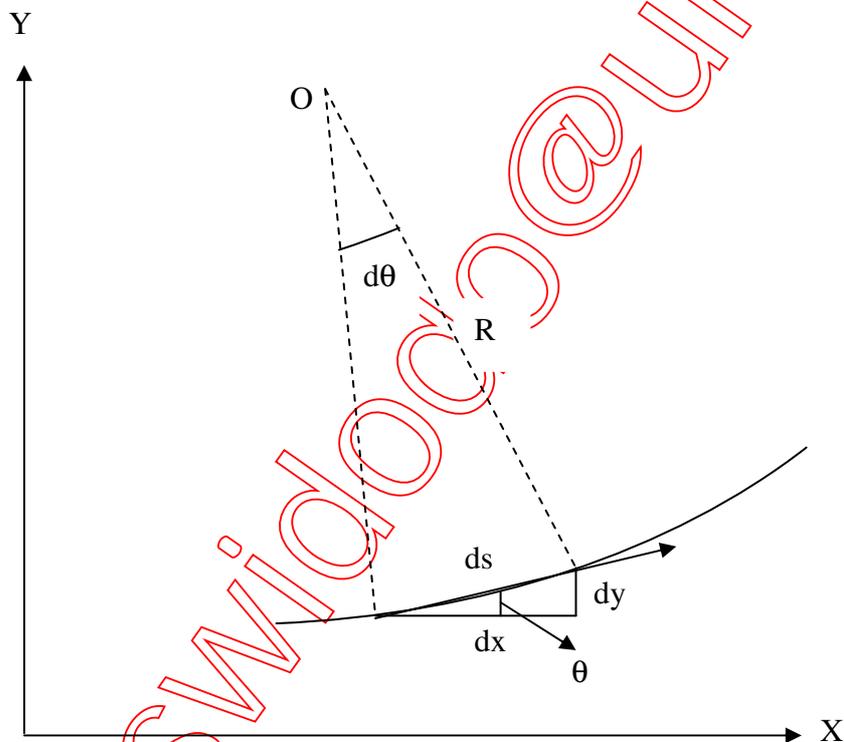
Lendutan pada elemen struktur sangat penting untuk diketahui karena meskipun dalam perancangannya faktor kekuatan yang dibutuhkan telah terpenuhi, tetapi jika terjadi lendutan secara berlebihan akan menyebabkan terjadinya *misalignment* dan bahkan memberikan efek psikologis yang merugikan, misalnya terjadinya lendutan yang besar pada suatu plat lantai bangunan akan menimbulkan rasa tidak aman bagi penghuninya.



Gambar 3.5. Deformasi Balok Sederhana Akibat Momen Lentur

3.5. Perhitungan Lentutan Menurut Hubungan Kurva Regangan-Momen

Gambar 3.6 menunjukkan sebagian bentuk kurva lengkung pada garis netral yang terjadi akibat bekerjanya momen lentur pada balok, kurva ini disebut sebagai kurva elastis. Pada umumnya titik awal ditetapkan pada ujung sebelah kiri dan lendutan vertikal ke atas diberi tanda positif.



Gambar 3.6. Kurva Elastis

Pada potongan kecil kurva sepanjang busur ds dengan sudut “ θ ” yang dibentuk oleh nilai tangen kurva pada titik tinjau dimana sumbu x merupakan sumbu batang dan R merupakan jari-jari kurva elastis.

Kemiringan balok sepanjang $ds = \frac{dy}{dx} = \tan \theta$

Turunan dari Persamaan di atas

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx} \\ &= \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}\end{aligned}$$

Suku $\frac{d\theta}{ds}$ dalam Persamaan di atas memiliki arti geometris yang jelas, dengan

bantuan Gambar 3.6 terlihat bahwa $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$, maka

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \sec^2 \theta \cdot \frac{1}{R} \cdot \sec \theta \\ &= \sec^3 \theta \cdot \frac{1}{R}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sec^3 \theta} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\pm [1 + \tan^2 \theta]^{3/2}} \\ &= \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\end{aligned} \quad (3.12.)$$

Karena dalam kenyataan yang ada nilai $\frac{dy}{dx}$ sangat kecil, maka nilai $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ dapat

diabaikan dalam perbandingannya terhadap “1” dan sudut kemiringan θ diasumsikan sama dengan nilai $\tan \theta$, sehingga

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

Pada Persamaan 3.3 telah diketahui bahwa nilai $\frac{M}{E.I} = \frac{1}{R}$, maka

$$\frac{M}{E.I} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\pm M = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.13.)$$

Tanda yang digunakan pada Persamaan 3.13 tergantung pada asumsi yang disepakati, dalam hal ini digunakan momen lentur bertanda positif dan y dalam arah vertikal ke atas juga bertanda positif, sehingga diperoleh

$$M = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.14.)$$

Persamaan 3.14 disebut Persamaan Hubungan Kurva Regangan-Momen (*Curvature-Moment Relationship*) dengan EI sebagai angka kekakuan lentur (*flexural rigidity*). Dengan dua kali integrasi Persamaan 3.14, maka

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int M \cdot dx + A \quad (3.15.)$$

$$EI \cdot y = \int dx \int M \cdot dx + A \cdot x + B \quad (3.16.)$$

di mana A dan B adalah konstanta integrasi, selanjutnya $\frac{dy}{dx}$ yang merupakan sudut kemiringan θ dan ' y ' merupakan lendutan ke arah vertikal 3.15 dan 3.16.

Hubungan-hubungan antara beban terpakai, gaya geser dan momen lentur dapat dirangkum dalam Persamaan berikut :

$y =$ defleksi kurva elastis

$\theta = \frac{dy}{dx} =$ kemiringan kurva elastis

$$M = E.I. \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.17.)$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left(E.I. \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

$$q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left(E.I. \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

Kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan integrasi Persamaan Hubungan Kurva Regangan-Momen didasarkan pada kondisi titik simpul, yang dapat dijabarkan sebagai berikut :

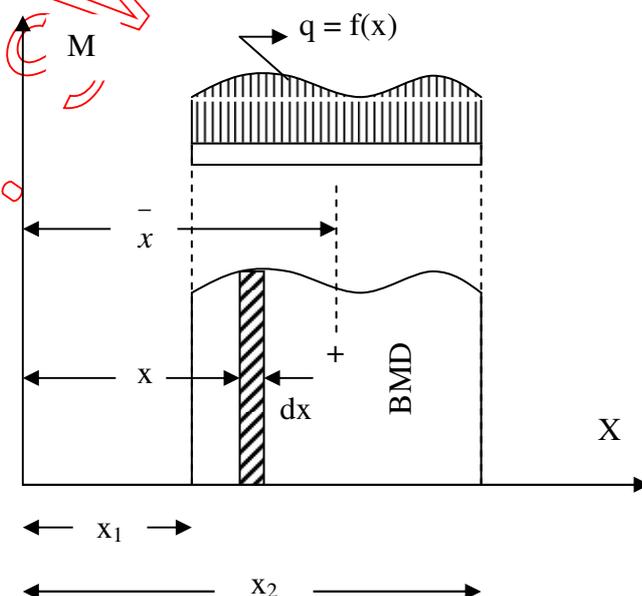
- a.) Ujung Bebas

- (i). Momen lentur = $M = 0$
- (ii). Gaya geser = $V = 0$
- b.) Tumpuan Sederhana yang berupa Sendi dan Rol
 - (i). Lendutan = $y = 0$
 - (ii). Momen lentur = $M = E.I. \frac{d^2y}{dx^2} = 0$
- c.) Tumpuan Jepit
 - (i). Lendutan = $y = 0$
 - (ii). Sudut Kemiringan = $\theta = \frac{dy}{dx} = 0$

3.6. Perhitungan Lendutan dengan Metode Luasan Momen

Metode ini merupakan cara semi-grafis yang dapat memberikan penyelesaian masalah kemiringan sudut dan lendutan dengan lebih cepat pada kasus-kasus berikut :

- a.) Balok kantilever dengan kemiringan sudut yang bernilai nol pada tumpuan jepit.
- b.) Balok sederhana bertumpuan sendi-rol dengan beban terbagi rata dan kemiringan sudut yang bernilai nol pada tengah bentang.
- c.) Balok dengan tampang melintang yang bervariasi.



Gambar 3.7. Pendekatan Metode Luasan Momen

Pada Gambar 3.7 ditunjukkan gambar bidang momen (*BMD*) untuk kasus beban yang nilainya berubah-ubah pada balok *AB*, dengan menganggap pusat berat dari luasan bidang momen “*A*” berjarak \bar{x} terhadap sumbu vertikal “*M*” dapat dianalisis bagian kecil balok dengan panjang dx di mana *BM* dapat diasumsikan konstan sebesar *M*. Dengan menggunakan persamaan hubungan kurva regangan-momen,

$$E.I. \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (3.18.)$$

atau

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

Integrasi persamaan di atas dengan batas x_1 dan x_2 ,

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot dx}{E.I}$$

atau

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{E} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot dx}{I}$$

Jika nilai *I* konstan sepanjang bentangan balok, maka

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{E.I} \cdot \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dx = \frac{A}{E.I} \quad (3.19.)$$

Persamaan di atas mengandung pengertian bahwa penambahan kemiringan sudut antara dua titik dapat dihitung dengan luas bersih gambar bidang momen (*BMD*) antara keduanya dibagi dengan angka kekakuan lentur balok (*E.I*).

Selanjutnya dengan mengalikan kedua sisi pada persamaan hubungan kurva regangan-momen dengan *x*,

$$E.I. \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x = M \cdot x$$

Integrasi antara batas x_1 dan x_2 dengan asumsi *I* bernilai konstan,

$$E.I. \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot x \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} M \cdot x \cdot dx$$

atau

$$E.I. \left(x \cdot \frac{dy}{dx} - y \right)_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (M \cdot dx) \cdot x$$

di mana

$$\int_{x_1}^{x_2} (M \cdot dx) \cdot x = \bar{A} \cdot \bar{x} \quad , \text{ maka}$$

$$\left(x \cdot \frac{dy}{dx} - y \right)_{x_1}^{x_2} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{x}}{E.I}$$

atau

$$(x_2 \cdot \theta_2 - y_2) - (x_1 \cdot \theta_1 - y_1) = \frac{\bar{A} \cdot \bar{x}}{E.I}$$

atau

$$(y_1 - y_2) + (x_2 \cdot \theta_2 - x_1 \cdot \theta_1) = \frac{\bar{A} \cdot \bar{x}}{E.I} \quad (3.20.)$$

jika (i.) titik “1” dianggap sebagai titik awal ($x_1 = 0$)

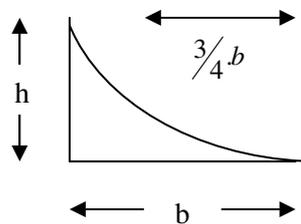
dan (ii.) titik “2” merupakan titik dengan sudut kemiringan nol ($\theta_2 = 0$).

maka

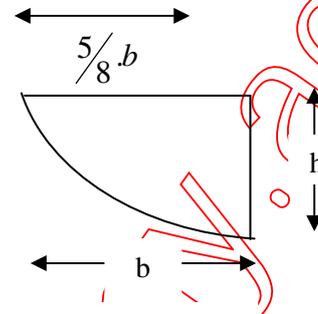
$$(y_1 - y_2) = \frac{\bar{A} \cdot \bar{x}}{E.I} \quad (3.21.)$$

Persamaan di atas mengandung pengertian bahwa lendutan (defleksi) yang terjadi antara dua titik pada balok dengan batasan tertentu ($x_1 = 0, \theta_2 = 0$) dapat dihitung dengan mengalikan luas bersih bidang momen antara kedua titik dan jarak pusat berat, kemudian dibagi dengan angka kekakuan lentur balok.

Pada kasus beban terbagi rata gambar bidang momen (*BMD*) selalu berbentuk parabola, maka data yang diperlukan untuk luas dan posisi pusat beratnya adalah :



$$A = \frac{1}{3} \cdot b \cdot h$$



$$A = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h$$

Gambar 3.8. *BMD* untuk Kasus Beban Terbagi Rata

3.7. Hubungan Gaya Geser dan Momen Lentur

Balok merupakan jenis elemen struktur yang memiliki ukuran dalam arah longitudinal jauh lebih besar jika dibandingkan dengan ukuran transversalnya, dengan fungsi utama menahan bekerjanya gaya lintang dan momen lentur. Dalam bab 4 yang membahas masalah lentur murni hanya diperhitungkan besarnya tegangan normal yang diakibatkan bekerjanya momen lentur tetapi dalam kenyataan yang sesungguhnya, apabila pada elemen balok bekerja gaya lintang maka akan timbul tegangan normal dan tegangan geser secara simultan, yang masing-masing terjadi karena adanya gaya dalam yang berupa momen lentur (*BMD*) dan gaya geser (*SFD*).

Pada Gambar 3.9.a dapat dilihat sebuah balok sederhana yang didukung oleh tumpuan sendi-rol, dibebani dengan berbagai jenis beban yang meliputi W_1 , W_2 , W_3 dan W_4 . Reaksi tumpuan sendi-rol ditunjukkan sebagai R_A dan R_B . Selanjutnya dengan menganggap balok tersebut dipotong pada potongan X-X dengan jarak x dari tumpuan A, maka diagram *free-body* dari kedua bagian dapat ditunjukkan pada Gambar 3.9.b dan 3.9.c. Pada balok ini gaya dalam yang berupa gaya geser V dan momen lentur M dapat diterapkan pada kedua potongan dengan menggunakan prinsip keseimbangan gaya pada masing-masing bagian,

$$F_L = V \tag{a.}$$

$$F_R = V \tag{b.}$$

di mana F_L dan F_R merupakan resultan gaya vertikal pada potongan sebelah kiri dan sebelah kanan. Berdasarkan Persamaan (a) dan (b), maka diperoleh

$$V = F_L = F_R$$

Persamaan ini dapat memberikan definisi gaya geser sebagai berikut :

Gaya geser pada setiap bagian balok merupakan jumlah aljabar dari gaya lintang yang bekerja pada masing-masing sisi potongan.

Analog dengan cara di atas, maka keseimbangan momen lentur dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$M_L = M \tag{a.}$$

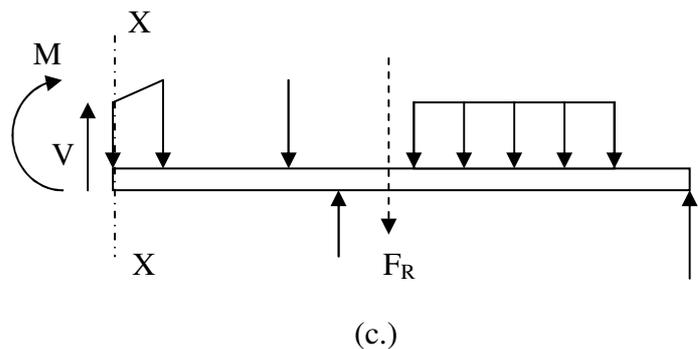
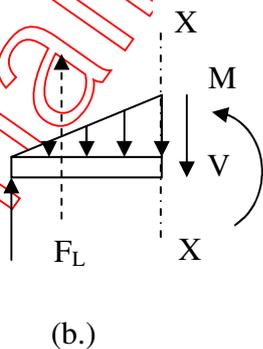
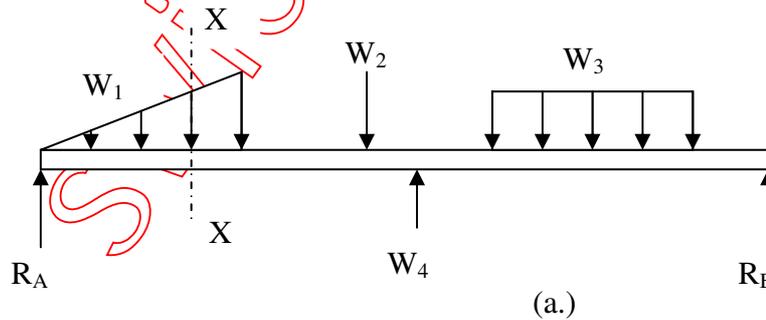
$$M_R = M \tag{b.}$$

di mana M_L dan M_R merupakan resultan momen lentur akibat bekerjanya gaya lintang pada potongan sebelah kiri dan sebelah kanan. Berdasarkan Persamaan (a) dan (b), maka diperoleh

$$M = M_L = M_R$$

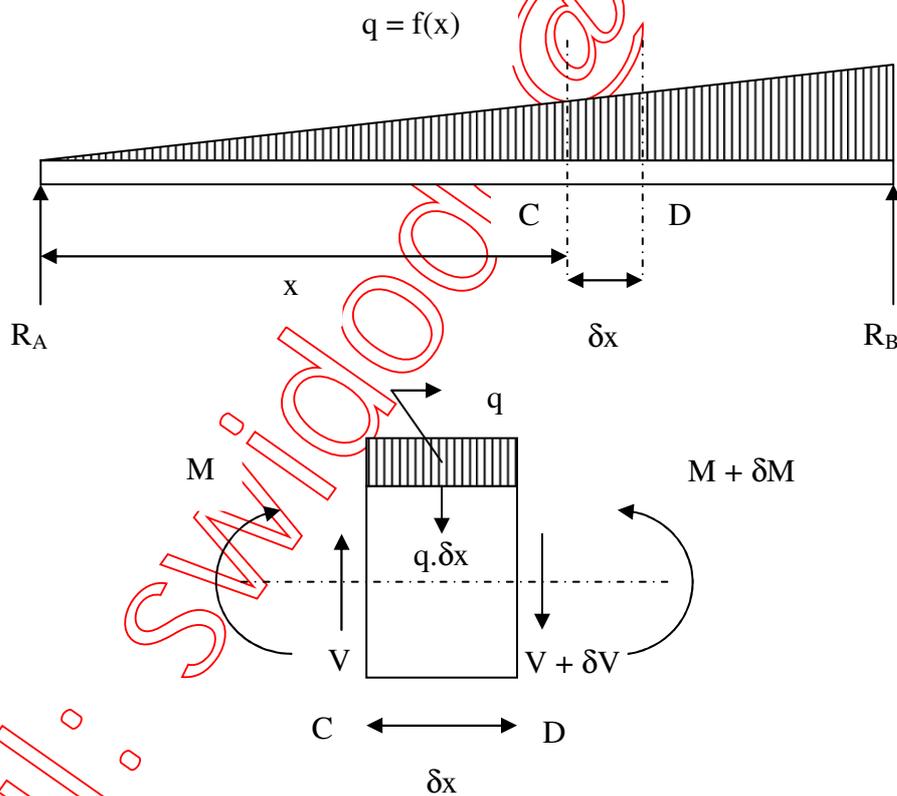
Persamaan ini dapat memberikan definisi gaya geser sebagai berikut :

Momen lentur pada setiap titik yang ada pada elemen balok merupakan jumlah aljabar momen akibat bekerjanya gaya lintang pada kedua sisi potongan



Gambar 3.9. Gaya Dalam pada Elemen Balok

Gambar 3.10 menunjukkan sebuah balok yang menanggung beban yang terdistribusi di sepanjang batang (q), dengan nilai yang bervariasi dan merupakan fungsi kontinu dari x . Potongan CD merupakan bagian dari balok tersebut dengan panjang δx , yang terletak sejauh x dari tumpuan. Karena nilai δx yang sangat kecil maka beban “ q ” yang ada di atasnya dapat dianggap terbagi rata. Berbagai gaya dan momen yang bekerja dalam potongan tersebut juga ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10. Hubungan Gaya Geser dan Momen Lentur

Memenuhi prinsip keseimbangan gaya pada potongan balok di atas, jumlah gaya vertikal dan momen pada setiap titik, misalnya D , harus sama dengan nol, maka

$$V - q \cdot \delta x - (V + \delta V) = 0 \quad (a.)$$

$$M + V \cdot \delta x - q \cdot \delta x \cdot \frac{\delta x}{2} - (M + \delta M) = 0 \quad (b.)$$

Berdasarkan Persamaan (a) maka diperoleh

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad (3.22.)$$

Menurut Persamaan (b), dengan mengabaikan nilai $q \cdot \delta x \cdot \frac{\delta x}{2}$ yang sangat kecil maka diperoleh

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (3.23.)$$

Berdasarkan Persamaan 3.22 dan 3.23 dapat dilihat bahwa jika q adalah beban yang merupakan fungsi kontinu dari x , gaya geser dan momen lentur dapat ditentukan dengan cara integrasi.

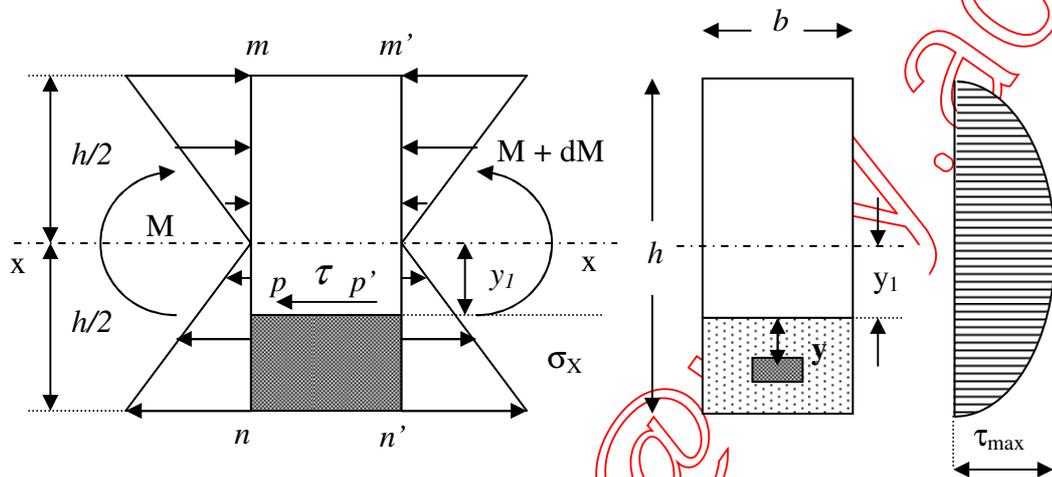
3.8. Distribusi Tegangan Geser

Asumsi-asumsi yang digunakan sebagai dasar analisis tegangan geser pada elemen balok meliputi :

- a.) Bahan yang digunakan bersifat elastis, homogen dan isotropis.
- b.) Modulus elastisitas bahan bernilai sama, baik dalam kondisi tarik maupun tekan.
- c.) Tegangan geser yang terjadi, memiliki nilai konstan sebarang tampang yang digunakan.
- d.) Timbulnya tegangan geser tidak mempengaruhi distribusi tegangan normal akibat adanya momen lentur.

Analisis tegangan geser dapat dilakukan dengan meninjau keseimbangan gaya pada sebuah elemen $p-p'-n'-n$, yang merupakan potongan dari sebuah balok dengan dua penampang yaitu $m-n$ dan $m'-n'$ dengan jarak dx . Permukaan bawah elemen ($n-n'$) adalah permukaan terbawah dari penampang balok, sedangkan permukaan atasnya ($p-p'$) sejajar dengan garis netral dengan jarak y_1 . Pada permukaan atas ($p-p'$) bekerja tegangan geser τ , sedangkan pada kedua

permukaan ($m-n$ dan $m'-n'$) bekerja tegangan lentur normal σ_x , seperti terlihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11. Analisis Tegangan Geser pada Balok

Pada umumnya struktur balok akan memiliki nilai momen lentur yang berbeda-beda menurut fungsi jaraknya, sehingga pada Gambar 3.11 ditunjukkan momen lentur “M” pada tampang $m-n$ dan sebesar “M + dM” pada tampang $m'-n'$. Dengan meninjau bagian elemen seluas dA berjarak y dari garis netral, apabila elemen luasan ini terletak di sebelah kiri $p-n$ maka besarnya gaya normal yang bekerja adalah :

$$\sigma_x \cdot dA = \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

Penjumlahan gaya-gaya elemen yang bekerja melalui luas tampang $p-n$ memberikan gaya total F_1 , yang dapat dihitung dengan :

$$F_1 = \int \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

Integrasi Persamaan di atas dilakukan dengan batasan $y = y_1$ sampai dengan $y = h/2$. Analog dengan cara di atas maka dapat dihitung besarnya gaya total di sebelah kanan permukaan $p'-n'$ menggunakan Persamaan berikut :

$$F_2 = \int \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA$$

Berikutnya dapat dihitung besarnya gaya horisontal yang bekerja di atas permukaan $p-p'$, yang besarnya adalah :

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dx \quad (a.)$$

di mana b merupakan lebar balok dan dx merupakan panjang potongan dalam arah longitudinal.

Gaya-gaya F_1 , F_2 dan F_3 harus memenuhi prinsip keseimbangan gaya, sehingga keseimbangan gaya dalam arah horisontal dapat dinyatakan dalam Persamaan :

$$F_1 = F_2 - F_3 \quad (b.)$$

atau

$$\tau \cdot b \cdot dx = \int \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA - \int \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA ; \text{ sehingga diperoleh ;}$$

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \left(\frac{1}{I \cdot b} \right) \cdot \int y \cdot dA$$

substitusikan $V = \frac{dM}{dx}$ dari Persamaan (3.23.) dan $S_x = M_x^1 = \int_A y \cdot dA$ dari

Persamaan (2.3.a.), maka tegangan geser dapat dihitung dengan

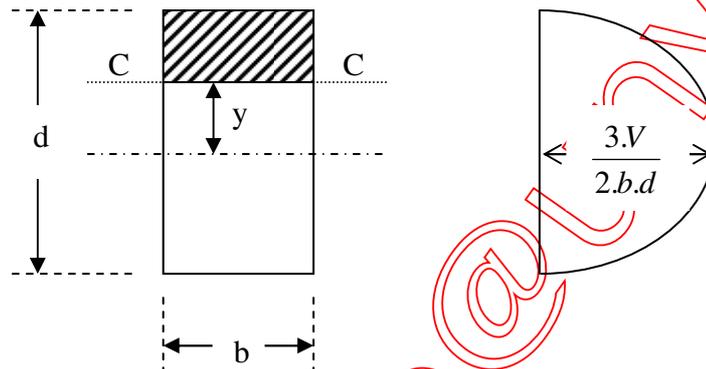
$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} \quad (3.24.)$$

Harus diingat bahwa pada Persamaan (3.24.) di atas, nilai “ τ ” mewakili tegangan geser pada arah longitudinal (x) dan transversal (b yang searah sumbu z), maka besarnya gaya geser per satuan panjang yang terjadi dalam arah longitudinal dapat dihitung dengan :

$$\begin{aligned} f &= \tau \cdot b \\ &= \frac{V \cdot S}{I \cdot b} \cdot b \\ f &= \frac{V \cdot S}{I} \end{aligned} \quad (3.25.)$$

Gaya geser per satuan panjang yang sering disebut sebagai aliran geser (*shear flow*) pada Persamaan (3.25.) dapat digunakan untuk menentukan konfigurasi penghubung geser (*shear connector*) pada balok laminasi.

3.9. Tegangan Geser pada Penampang Balok Berbentuk Persegi Panjang



Gambar 3.12. Tegangan Geser pada Penampang Balok Persegi

Tegangan geser yang terjadi pada penampang balok di atas dapat dihitung dengan Persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{V.S}{I.b} \\ &= \frac{V.A.\bar{y}}{I.b}\end{aligned}$$

Untuk perhitungan tegangan geser “ τ ” pada potongan C-C, maka

$$b = b$$

$$A = b \cdot \left(\frac{d}{2} - y \right)$$

$$\bar{y} = y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + y \right)$$

$$I = \frac{b.d^3}{12}$$

$$\tau = \frac{V}{\frac{b.d^3}{12}} \left[b \cdot \left(\frac{d}{2} - y \right) \right] \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + y \right) \right]$$

$$\tau = \frac{6.V}{b.d^3} \left[\frac{d^2}{4} - y^2 \right] \quad (3.26.)$$

Tegangan geser “ τ ” mencapai nilai maksimum pada pusat berat, sehingga dengan memasukkan nilai $y = 0$ diperoleh :

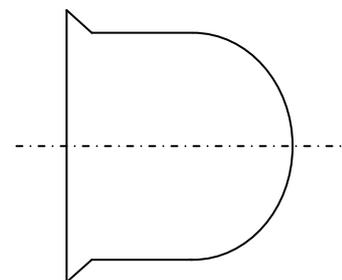
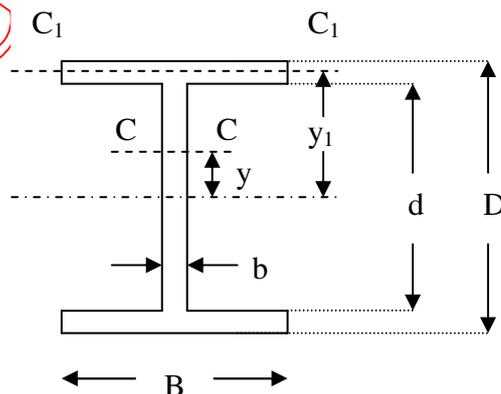
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{6.V}{b.d^3} \cdot \frac{d^2}{4} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b.d} \\ \tau_{\max} &= \frac{3}{2} \cdot \tau_{av} \end{aligned} \quad (3.27.)$$

di mana $\tau_{av} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b.d}$; merupakan nilai tegangan geser rata-rata.

3.10. Tegangan Geser pada Penampang Balok dengan Sayap

Bentuk tampang semacam ini banyak digunakan pada struktur bangunan seperti; profil “I” atau profil “T”. Bentuk-bentuk semacam ini memiliki ketahanan yang sama handalnya untuk memikul tegangan normal maupun tegangan geser, di mana bagian sayap dominan menahan lentur sedangkan bagian sayap dominan menahan geser. Distribusi tegangan geser pada bentuk-bentuk tampang yang memiliki sayap lebih rumit daripada distribusi tegangan geser pada tampang persegi. Analisis tegangan geser pada tampang semacam ini dapat dibedakan menjadi dua bagian yaitu tegangan geser dalam arah vertikal (τ_{xy}) dan tegangan geser dalam arah horisontal (τ_{xz}).

- a.) **Tegangan geser vertikal (τ_{xy})**, untuk mempermudah analisis tegangan geser pada profil “I” seperti yang terlihat pada Gambar 3.13, τ_{xy} akan ditulis sebagai τ , kecuali ada penjelasan lebih lanjut.



Gambar 3.13. Tegangan Geser pada Profil I

(i.) Potongan C-C pada bagian badan

$$\begin{aligned}
 A \cdot \bar{y} &= \left\{ B \cdot \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \right\} \cdot \left\{ \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2} \right) \right\} + \left\{ b \cdot \left(\frac{d}{2} - y \right) \right\} \cdot \left\{ y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} - y \right) \right\} \\
 &= \frac{B}{2} \cdot \left[\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4} \right] + \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{d^2}{4} - y^2 \right] \\
 \tau &= \frac{V}{b \cdot I} \cdot \frac{B}{2} \cdot \left[\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4} \right] + \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{d^2}{4} - y^2 \right] \quad (3.28.)
 \end{aligned}$$

Tegangan geser maksimum terjadi pada serat di mana $y = 0$

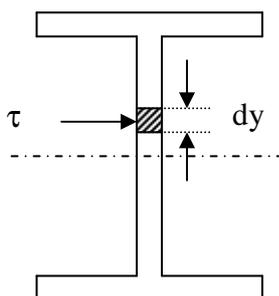
$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= \frac{V}{b \cdot I} \cdot \left[\frac{B}{2} \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right) + \frac{b \cdot d^2}{8} \right] \\
 &= \frac{V}{8 \cdot b \cdot I} \cdot [B \cdot (D^2 - d^2) + b \cdot d^2] \quad (3.29.)
 \end{aligned}$$

(ii.) Potongan C₁-C₁ pada bagian sayap

$$\begin{aligned}
 A \cdot \bar{y} &= \left\{ B \cdot \left(\frac{D}{2} - y_1 \right) \right\} \cdot \left\{ y_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{D}{2} - y_1 \right) \right\} = \frac{B}{2} \cdot \left[\frac{D^2}{4} - y_1^2 \right] \\
 \tau &= \frac{V}{B \cdot I} \cdot \left[\frac{B}{2} \cdot \left(\frac{D^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \\
 \tau &= \frac{V}{2 \cdot I} \cdot \left(\frac{D^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (3.30.)
 \end{aligned}$$

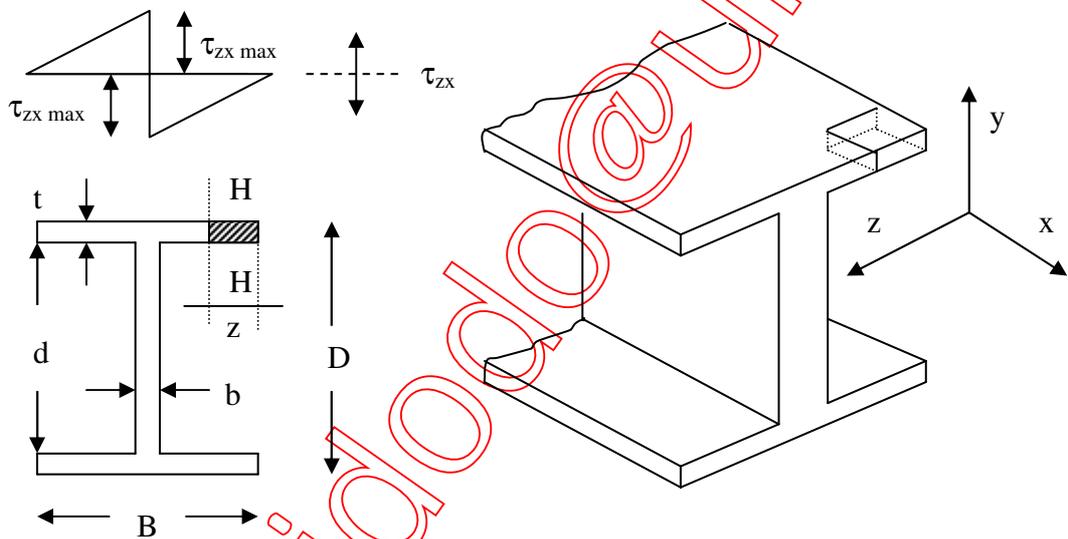
Besarnya gaya geser yang bekerja pada bagian badan dapat dihitung dengan Persamaan berikut :

$$V_w = \int_{-d/2}^{+d/2} \tau \cdot b \cdot dy = 2 \int_0^{d/2} \tau \cdot b \cdot dy \quad (3.31.)$$

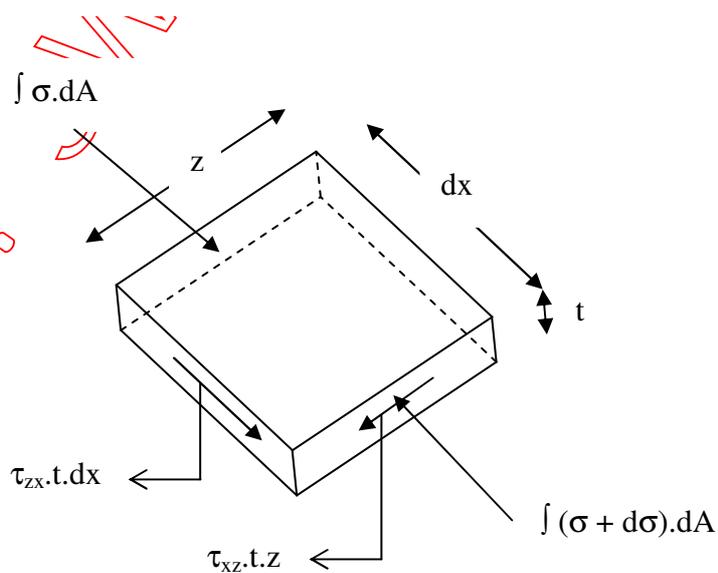


Gambar 3.14. Gaya Geser pada Bagian Badan

b.) **Tegangan geser horisontal (τ_{xz})**, untuk menghitung tegangan geser τ_{zx} atau τ_{xz} pada potongan H-H di bagian sayap digunakan jarak z yang diukur dari ujung bebas sayap (Gambar 3.15), selanjutnya keseimbangan gaya dalam arah x pada potongan sayap seperti pada Gambar 3.16, dapat dihitung dengan :



Gambar 3.15. Analisis Tegangan Geser Bagian



Gambar 3.16. Keseimbangan Gaya pada Potongan Sayap

$$\begin{aligned}
\tau_{zx}.t.dx &= \int(\sigma + d\sigma).dA - \int\sigma.dA \\
&= \int d\sigma.dA = \int \frac{dM.y}{I}.dA \\
\tau_{zx} &= \frac{1}{t.I} \int \frac{dM}{dx}.y.dA \\
\tau_{zx} &= \frac{V}{t.I} \int y.dA \\
\tau_{zx} &= \frac{V.S}{t.I} \tag{3.32.}
\end{aligned}$$

untuk menghitung besarnya aliran geser pada bagian sayap dapat digunakan Persamaan berikut :

$$f_x = \frac{V.S}{I} \tag{3.33.}$$

Dapat dilihat bahwa Persamaan 3.32 dan 3.33 mirip dengan Persamaan 3.24 dan 3.25, di mana lebar badan “b” dalam arah z digantikan dengan tebal sayap “t” dalam arah sumbu y.

Besarnya statis momen potongan sayap pada profil “I” dapat dihitung dengan;

$$S = A.\bar{y} = (z.t).\left(\frac{D-t}{2}\right)$$

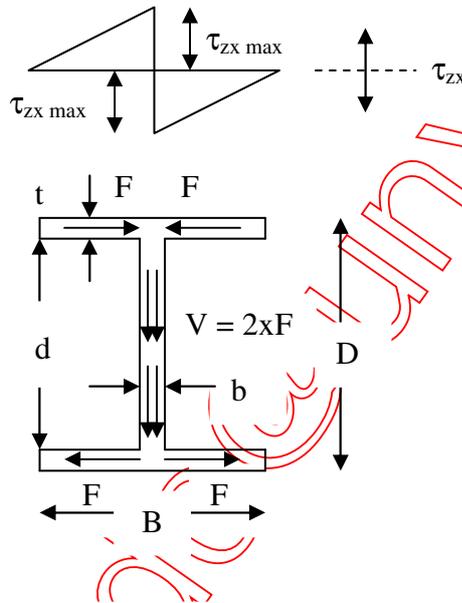
maka besarnya tegangan geser yang terjadi pada bagian sayap dapat dihitung dengan :

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{V.\left(\frac{z.t}{2}\right).(D-t)}{t.I} = \frac{V}{2.I}.z.(D-t) \tag{3.34.}$$

Nilai tegangan geser tersebut bervariasi secara linear menurut besarnya jarak z, di mana nilai tegangan geser maksimum dicapai di tengah-tengah bagian sayap, sehingga :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{B}{2} \\
\tau_{xz_max} &= \frac{V}{2.I}.\left(\frac{B}{2}\right).(D-t)
\end{aligned}$$

$$= \frac{V \cdot B}{4 \cdot I} \cdot (D - t) \quad (3.35.)$$



Gambar 3.17. Analisis Gaya Geser pada Profil I

Dengan melakukan integrasi tegangan geser τ_{zx} yang bekerja di setengah bagian sayap, seperti yang terlihat pada Gambar 3.17, maka diperoleh gaya geser horisontal V_f , yang diperoleh dengan Persamaan berikut :

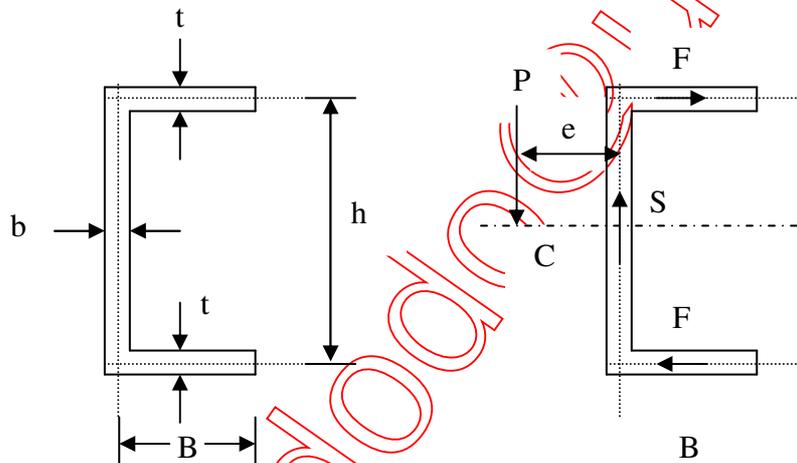
$$\begin{aligned} V_f &= \frac{\tau_{zx_max}}{2} \cdot \left(\frac{B \cdot t}{2} \right) \\ &= \frac{f_{xz_max}}{2} \cdot \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (3.36.)$$

Aliran geser arah horisontal yang terdapat pada sayap bagian atas berlaku dalam arah yang berlawanan, yang kemudian menyatu di bagian badan dengan arah ke bawah dan selanjutnya menyebar lagi di sayap bagian bawah. Karena nilai gaya geser V_f adalah sama namun dengan arah yang selalu berlawanan maka gaya ini tidak akan memberikan pengaruh terhadap penampang "I". Gaya geser yang bekerja dalam arah vertikal memiliki nilai dua kali gaya geser horisontal, sehingga dapat dikatakan bahwa gaya geser secara dominan ditanggung oleh bagian badan.

Untuk kasus profil “T”, jalannya analisis yang dilakukan adalah sama dengan profil “I”, tetapi harus ditentukan terlebih dahulu posisi garis netralnya.

3.11. Pusat Geser

Pusat geser (*shear center*) merupakan suatu titik di mana jika terdapat gaya lintang yang bekerja melalui titik tersebut maka tidak akan terjadi puntiran pada balok. Pusat geser untuk setiap potongan penampang selalu terletak dalam garis membujur yang sejajar dengan sumbu balok.



Gambar 3.18. Penentuan Pusat Geser pada Profil Kanal

Pada penampang berdinging tipis yang tidak memiliki sumbu simetri berarah vertikal, misalnya profil kanal seperti terlihat pada Gambar 3.18. Maka gaya geser vertikal yang bekerja di bagian badan dapat dihitung dengan :

$$S = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau \cdot b \cdot dy$$

Sedangkan gaya geser horisontal V pada setiap bagian sayap dapat dihitung dengan :

$$F = \left(\frac{\tau_{xz \max}}{2} \right) \cdot B \cdot t = \frac{S \cdot \left(B \cdot t \cdot \frac{h}{2} \right)}{t \cdot I} \times \frac{B \cdot t}{2} \quad (\text{di mana } P = S)$$

$$= \frac{S \cdot B^2 \cdot t \cdot h}{4 \cdot I} \quad (3.37.)$$

Gaya geser vertikal S memenuhi prinsip keseimbangan dengan beban P , tetapi gaya geser horisontal F membentuk kopel sebesar $F \cdot h$, yang harus ditiadakan untuk menghindari puntiran. Cara yang dapat dilakukan adalah menempatkan beban P dengan jarak “ e ” dari bagian badan, sehingga :

$$P \cdot e = F \cdot h$$

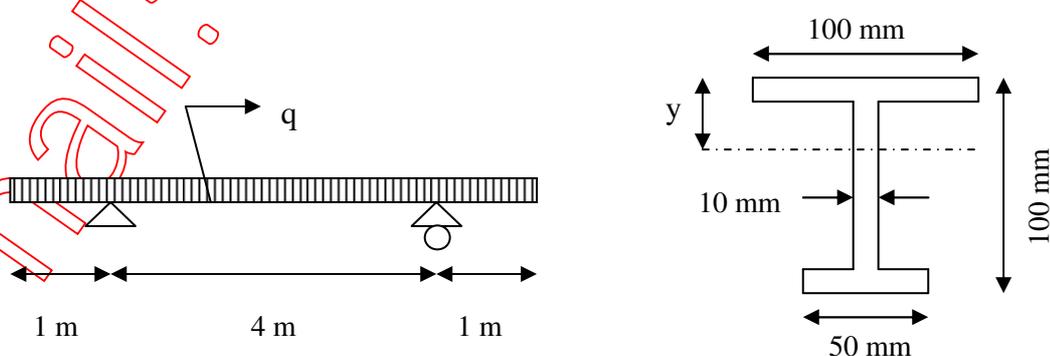
$$S \cdot e = \frac{S \cdot B^2 \cdot t \cdot h}{4 \cdot I} \cdot h$$

$$e = \frac{b^2 \cdot t \cdot h^2}{4 \cdot I} \quad (3.38.)$$

Karena profil kanal memiliki sumbu simetri dalam arah horisontal, maka perpotongannya dengan garis pada eksentrisitas “ e ” dari pusat badan dapat ditetapkan sebagai *pusat geser* di mana beban harus diletakkan untuk menghindari puntiran.

3.12. Contoh Penerapan

Contoh 3.1. : Sebuah balok sederhana dengan bentuk dan ukuran potongan penampang melintang yang ditunjukkan pada Gambar 3.19. Jika material yang digunakan memiliki kuat tarik batas 50 MPa dan kuat tekan batas 20 MPa, hitung beban terbagi rata yang boleh dikerjakan di atas balok tersebut.



Gambar 3.19. Kasus Lentur pada Balok Sederhana

Penyelesaian :

Perhitungan momen lentur maksimum

Pada kasus ini momen lentur maksimum akan terjadi di tengah bentang karena balok tersebut menerima beban terbagi rata di sepanjang bentang.

Reaksi pada Tumpuan A,

$$R_A = \frac{wx6}{2} = 3.w \text{ kN}$$

Momen lentur maksimum pada tengah bentang,

$$M_C = 3.wx2 - \frac{1}{2}.w.3^2$$

$$M_C = 6.w - 4,5.w = 1,5.w \text{ kN.m}$$

Perhitungan sifat tampang datar

a. Perhitungan sifat tampang dengan acuan sumbu X

| Bagian | Luas A (mm ²) | y (mm) | Sx (mm ³) | dy (mm) | Ix ⁰ (mm ⁴) | A.dy ² (mm ⁴) |
|--------|---------------------------|--------|-----------------------|---------|------------------------------------|--------------------------------------|
| I | 1000 | 95,00 | 95000,00 | 35,22 | 83333,33 | 1240448,40 |
| II | 800 | 50,00 | 40000,00 | -9,78 | 426666,67 | 76518,72 |
| III | 500 | 5,00 | 2500,00 | -54,78 | 4166,67 | 1500424,20 |
| | 2300 | - | 137500,00 | - | 514166,67 | 2817391,32 |

$$Y = \frac{\Sigma Sx}{\Sigma A} = \frac{137500}{2300} = 59,78 \text{ mm}$$

$$I_X = I_X^0 + A.dy^2 = 514166,67 + 2817391,32 = 3331557,99 \text{ mm}^4$$

b. Perhitungan sifat tampang dengan acuan sumbu Y

| Bagian | Luas A (mm ²) | x (mm) | Sy (mm ³) | dx (mm) | Iy ⁰ (mm ⁴) | A.dx ² (mm ⁴) |
|--------|---------------------------|--------|-----------------------|---------|------------------------------------|--------------------------------------|
| I | 1000 | 50 | 50000 | 0 | 833333,33 | 0 |
| II | 800 | 50 | 40000 | 0 | 104166,67 | 0 |

| | | | | | | |
|-----|------|----|--------|---|--------|---|
| III | 500 | 50 | 25000 | 0 | 0 | 0 |
| | 2300 | - | 115000 | - | 937500 | 0 |

$$X = \frac{\Sigma Sy}{\Sigma A} = \frac{115000}{2300} = 50 \text{ mm}$$

$$I_Y = I_Y^0 + A.dx^2 = 937500,00 + 0,00 = 937500,00 \text{ mm}^4$$

c. Perhitungan momen inersia sentrifugal

| Bagian | Luas A (cm ²) | x (cm) | y (cm) | dy (cm) | dx (cm) | A.dx.dy (cm ⁴) |
|--------|---------------------------|--------|--------|---------|---------|----------------------------|
| I | 1000 | 50 | 95,00 | 35,22 | 0 | 0 |
| II | 800 | 50 | 50,00 | -9,78 | 0 | 0 |
| III | 500 | 50 | 5,00 | -54,78 | 0 | 0 |
| | 3450 | - | - | - | 0 | 0 |

$$I_{XY} = \Sigma A.dx.dy = 0 \text{ cm}^4 \quad (\text{Garis Netral Tegak lurus terhadap Sumbu Utama})$$

d. Perhitungan tegangan tarik dan tekan maksimum

Tegangan Tarik Maksimum terjadi pada serat tepi bawah, sehingga

$$\sigma_t = \frac{M.y}{I} = \frac{(1,5.w \times 10^6) \times 59,78}{3331557,99}$$

$$\sigma_t = 26,92.w \text{ MPa}$$

Tegangan Tekan Maksimum terjadi pada serat tepi atas, sehingga

$$\sigma_c = \frac{M.y}{I} = \frac{(1,5.w \times 10^6) \times (100 - 59,78)}{3331557,99}$$

$$\sigma_c = 18,11.w \text{ MPa}$$

e. Perhitungan beban maksimum

Menurut batasan kekuatan yang diberikan, tegangan tarik maksimum 50 MPa

$$26,92.w = 50$$

$$w = 1,857 \text{ kN/m}$$

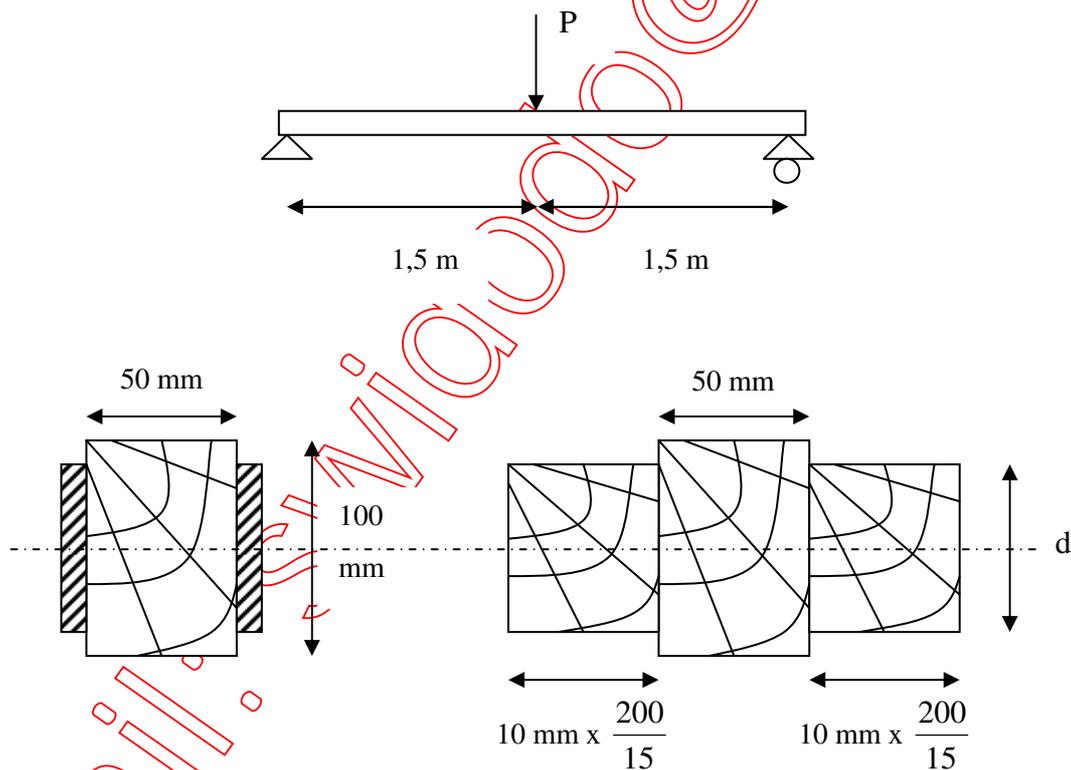
Tegangan tekan maksimum 20 MPa

$$18,11.w = 20$$

$$w = 1,104 \text{ kN/m}$$

Maka beban maksimum yang diijinkan sebesar 1,104 kN/m

Contoh 3.2. : Sebuah balok kayu berbentuk persegi panjang dengan lebar 50 mm dan tinggi 100 mm, diperkuat dengan plat baja setebal 10 mm pada kedua sisinya. Balok komposit ini didukung dengan tumpuan sendi-rol dengan jarak 3 m dan di atasnya bekerja beban titik sebesar 5 kN tepat di tengah bentang. Hitung tinggi plat baja yang dibutuhkan jika tegangan maksimum yang diijinkan pada material kayu adalah 15 MPa. Tentukan tegangan maksimum yang terjadi pada plat baja. $E_{\text{baja}} = 200 \text{ GPa}$ dan $E_{\text{kayu}} = 15 \text{ GPa}$.



Gambar 3.20. Kasus Balok Komposit

Penyelesaian :

Perhitungan momen inersia

Momen inersia dihitung dengan ekuivalensi tampang komposit terhadap tampang kayu, sehingga diperoleh

$$I_{eq} = \left[\frac{2x \left(10x \frac{200}{15} \right) x (d^3)}{12} \right] + \left[50x \frac{100^3}{12} \right]$$

$$I_{eq} = 22,222.d^3 + 4,167x10^6 \text{ mm}^4$$

Perhitungan momen maksimum

$$M = \frac{PxL}{4} = \frac{(5x10^3)x3000}{4}$$

$$M = 3,75x10^6 \text{ N.mm}$$

Perhitungan tinggi plat baja

Tegangan Maksimum pada kayu,

$$\sigma_{kayu} = \frac{3,75x10^6 x 50}{22,222.d^3 + 4,167x10^6}$$

$$\sigma_{kayu} = \frac{1,875x10^8}{22,222.d^3 + 4,167x10^6} = 15 \text{ MPa}$$

$$d^3 = 374988,75$$

$$d = 72,11 \text{ mm}$$

Digunakan plat baja dengan tinggi 75 mm.

Perhitungan tegangan maksimum plat baja

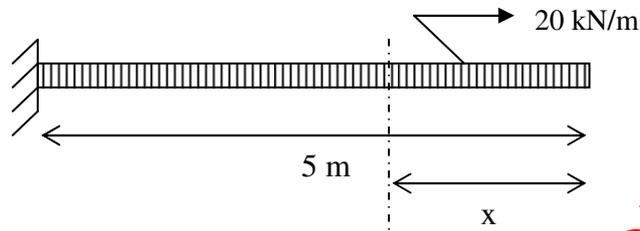
$$\sigma_{baja} = \sigma_{kayu} x \frac{E_{baja}}{E_{kayu}} x \frac{y_{baja}}{y_{kayu}}$$

$$= 15 x \frac{200}{15} x \frac{75/2}{100/2}$$

$$= 150 \text{ MPa}$$

Contoh 3.3. : Sebuah balok sederhana terbuat dari baja sepanjang 5 m dengan tumpuan jepit-bebas menanggung beban terbagi rata sebesar 20 kN/m. Hitung lendutan maksimum yang terjadi, jika baja yang

digunakan memiliki nilai elastisitas 210 GPa dan momen inersia $1,37 \times 10^9 \text{ mm}^4$.



Gambar 3.21. Kasus Defleksi pada Balok Sederhana

Persamaan momen lentur pada titik x

$$M_x = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$

Penentuan persamaan kurva elastis

$$E.I. \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x$$

$$E.I. \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$E.I. \frac{dy}{dx} = -\frac{q \cdot x^3}{6} + A$$

$$E.I. y = -\frac{q \cdot x^4}{24} + A \cdot x + B$$

Penerapan Kondisi Batas

$$\frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{pada saat } x = L$$

$$0 = -\frac{q \cdot L^3}{6} + A$$

$$A = \frac{q \cdot L^3}{6}$$

$$y = 0; \quad \text{pada saat } x = L$$

$$0 = -\frac{q \cdot L^4}{24} + \frac{q \cdot L^3}{6} \cdot L + B$$

$$B = -\frac{q \cdot L^4}{8}$$

$$E.I.y = -\frac{q.x^4}{24} + \frac{q.L^3}{6}.x - \frac{q.L^4}{8}$$

$$y = \frac{q}{E.I} \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{L^3.x}{6} - \frac{L^4}{8} \right]$$

Penentuan lendutan maksimum

Lendutan maksimum terjadi pada saat $x = 0$;

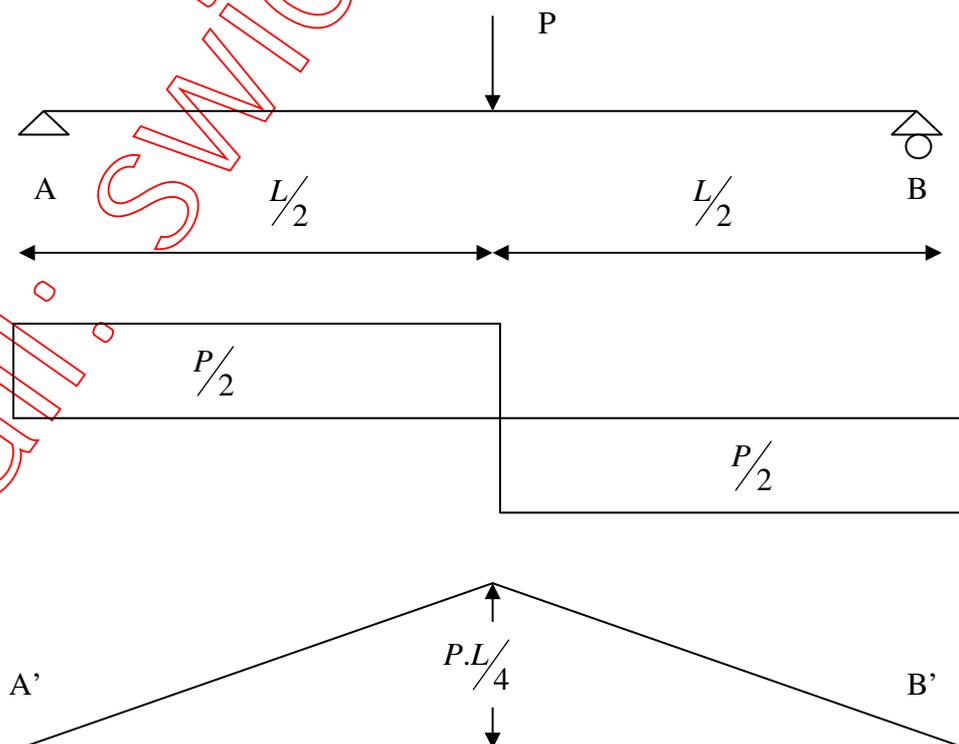
$$y_{\max} = \frac{q}{E.I} \left[-\frac{L^4}{8} \right]$$

$$= -\frac{q.L^4}{8.E.I}$$

$$= -\frac{20 \times 5000^4}{8 \times 210000 \times 1,37 \times 10^9}$$

$$= 5,34 \text{ mm (ke bawah)}$$

Contoh 3.4. : Balok sederhana bertumpuan sendi-rol terbuat dari baja sepanjang 6 m menanggung beban terpusat tepat di tengah bentang sebesar 150 kN. Hitung lendutan maksimum yang terjadi, jika nilai elastisitas baja 210 GPa dengan momen inersia $1,37 \times 10^9 \text{ mm}^4$.



Gambar 3.22. Kasus Defleksi pada Balok Bertumpuan Sendi-Rol

Dengan menganggap luasan bidang momen (BMD) = $F = \frac{P.L^2}{8}$, sebagai

beban yang bekerja pada balok $A'B'$.

Beban ini akan menimbulkan reaksi di tumpuan A' dan B' sebesar:

$$R_A = \frac{P.L^2}{16}$$

$$R_B = \frac{P.L^2}{16}$$

Besarnya gaya lintang (reaksi) tersebut jika dibagi angka kekakuan $E.I$ akan bernilai sama dengan θ_A dan θ_B , sehingga

$$\theta_A = \frac{P.L^2}{16.E.I}$$

$$\theta_B = \frac{P.L^2}{16.E.I}$$

Selanjutnya momen lentur akibat beban yang berupa BMD pada suatu titik X dapat dihitung dengan :

$$\begin{aligned} M'_x &= R_A \cdot x - F \cdot \frac{x}{3} \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) \cdot x - \left(\frac{P \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{x}{3} \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) \cdot x - \frac{P \cdot x^3}{12} \end{aligned}$$

sedangkan gaya lintang akibat beban yang berupa BMD pada titik X dapat dihitung dengan :

$$\begin{aligned} V'_x &= R_A - F \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) - \left(\frac{P \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) - \left(\frac{P.x^2}{4} \right)$$

Karena beban terpusat berada di tengah bentang maka lendutan maksimum terjadi di tengah bentang, sehingga

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{M'_x}{E.I} \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16.E.I} \right).x - \frac{P.x^3}{12.E.I} \\ &= \left(\frac{P.L^3}{32.E.I} \right) - \left(\frac{P.L^3}{96.E.I} \right) = \frac{P.L^3}{48.E.I} \\ &= \frac{150000 \times 6000^3}{48 \times 210000 \times 1,37 \times 10^9} \\ &= 2,35 \text{ mm (ke bawah)} \end{aligned}$$

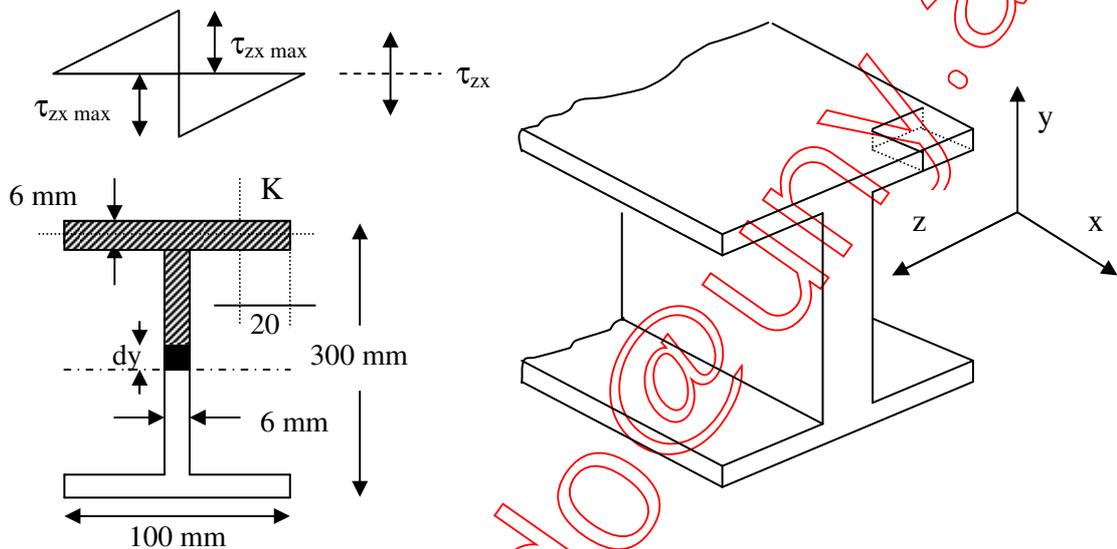
sedangkan kemiringan sudut di tengah bentang adalah :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{V'_x}{E.I} \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) - \left(\frac{P.x^2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{P.L^2}{16} \right) - \left(\frac{P.L^2}{16} \right) \\ &= 0 \text{ radian} \end{aligned}$$

Contoh 3.5. : Sebuah balok dengan bentuk dan ukuran penampang yang ditunjukkan pada Gambar 3.23, menerima gaya lintang sebesar 120 kN. Hitung

- (a.) Tegangan geser pada sisi atas bagian badan dan tepat pada garis netral.
- (b.) Persentase gaya geser yang ditanggung bagian badan.

(c.) Besarnya gaya geser yang bekerja pada titik K di bagian sayap.



Gambar 3.23. Contoh Kasus Tegangan Geser

Penyelesaian :

(a.) $\tau = \frac{V.S}{I.b}$

Besarnya momen inersia; $I = \frac{100 \times 300^3}{12} - \frac{94 \times 288^3}{12}$
 $= 3,78 \times 10^7 \text{ mm}^4$

Bagian Badan, $b = 6 \text{ mm}$

Besarnya statis momen; $S = A \cdot \bar{y}$
 $= 100 \times 6 \times 147 + 6 \times (144 - y) \cdot \left(y + \frac{144 - y}{2} \right)$
 $= 88200 + 3 \cdot (144^2 - y^2) = 150408 - 3 \cdot y^2$

Besarnya gaya lintang; $V = 120 \times 10^3 \text{ N}$

maka besarnya tegangan geser; $\tau = \frac{120 \times 10^3 \cdot (150408 - 3 \cdot y^2)}{6 \times 3,78 \times 10^7}$
 $= 79,581 - (1,587 \times 10^{-3} \cdot y^2) \text{ MPa}$

(i.) Tepat pada garis netral, besarnya tegangan geser dengan nilai $y = 0$

$$\tau = 79,581 - 0$$

$$\tau = 79,581 \text{ MPa}$$

(ii.) Pada tepi atas bagian badan dengan nilai $y = 144 \text{ mm}$, maka:

$$\tau = 79,581 - (1,587 \times 10^{-3} \cdot 144^2) \text{ MPa}$$

$$\tau = 79,581 - 32,914$$

$$\tau = 46,667 \text{ MPa}$$

(b.) Gaya geser yang bekerja pada potongan badan dengan tebal 6 mm dan tinggi dy ;

$$\begin{aligned} V_w &= 2 \int_0^{d/2} \tau \cdot b \cdot dy \\ &= 2 \int_0^{d/2} [6 \times 79,581 - 6 \times (1,587 \times 10^{-3} \cdot y^2)] dy \\ &= 2 \cdot [477,486 \cdot y - 3,174 \times 10^{-3} \cdot y^3]_0^{144} \\ &= 2 \times 477,486 \times 144 - 2 \times 3,174 \times 10^{-3} \times 144^3 \\ &= 118560,942 \text{ N} \end{aligned}$$

maka persentase gaya lintang yang ditanggung oleh bagian badan adalah :

$$\begin{aligned} &= \frac{118560,942}{120000} \times 100\% \\ &= 98,80\% \end{aligned}$$

(c.) Gaya geser vertikal yang bekerja pada potongan sayap dengan tebal 6 mm dan panjang 20 mm (titik K);

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{V \cdot S}{b \cdot I} \\ \tau_{xy} &= \frac{\{120 \times 10^3\} \times \left\{ (100 \times 3) \cdot \left(\frac{300}{2} - 1,5 \right) \right\}}{\{100 \times 3,78 \times 10^7\}} \\ \tau_{xy} &= \frac{\{120 \times 10^3\} \cdot \{44550\}}{100 \times \{3,78 \times 10^7\}} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 1,414 \text{ MPa}$$

Tegangan geser horisontal pada titik K ($z = 20 \text{ mm}$);

$$\tau_{xz} = \frac{V.S}{t.I}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\{120 \times 10^3\} \times \{(20 \times 6) \times (150 - 1,5)\}}{6 \times (3,78 \times 10^7)}$$

$$\tau_{xz} = 9,429 \text{ MPa}$$

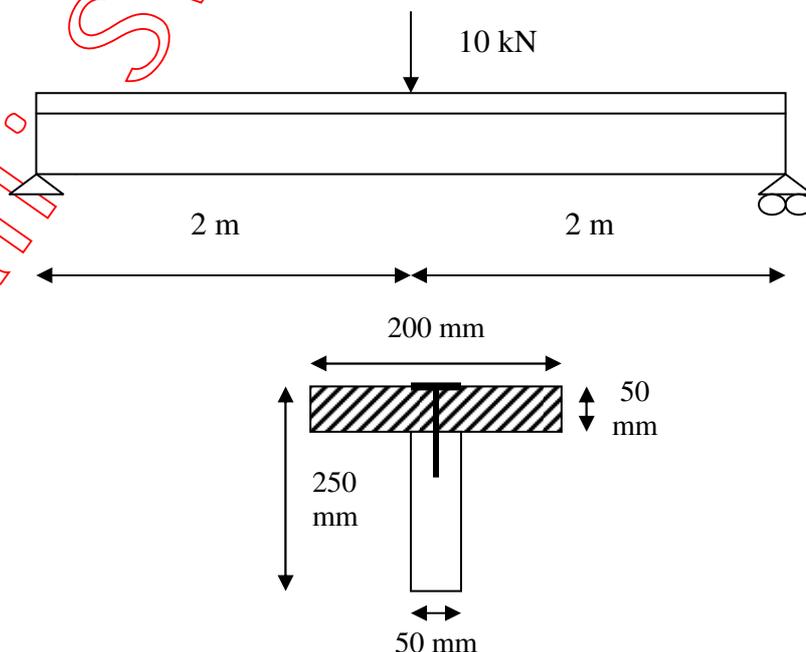
maka tegangan geser total pada titik K adalah :

$$\tau = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2}$$

$$\tau = \sqrt{(9,429)^2 + (1,414)^2}$$

$$\tau = 9,534 \text{ MPa}$$

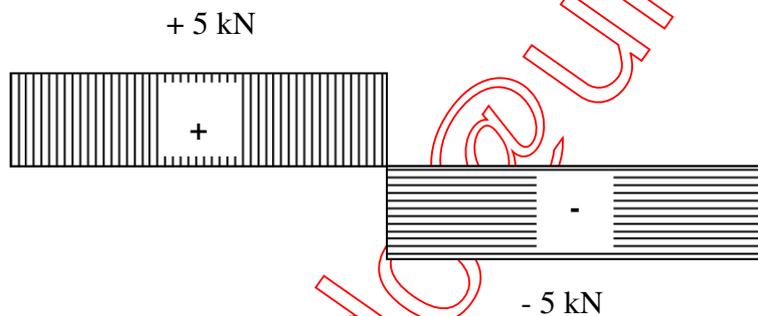
Contoh 3.6 : Sebuah balok sederhana tersusun dari dua papan kayu yang membentuk profil "T" dengan bentuk dan ukuran penampang yang ditunjukkan pada Gambar 3.24, menerima beban terpusat 10 kN tepat di tengah bentang. Jika digunakan paku dengan kuat geser 1000 N, hitung jarak antar paku yang diperlukan.



Gambar 3.24. Kasus Tegangan Geser pada Balok T

Penyelesaian :

Besarnya gaya geser yang bekerja pada balok “T”



Penentuan pusat berat tampang

$$y = \frac{\sum Sx}{\sum A}$$

$$y = \frac{(50 \times 200) \times 100 + (200 \times 50) \times 225}{(50 \times 200) + (200 \times 50)} = 162,5 \text{ mm}$$

Penentuan momen inersia tampang

$$I_X = (I_{X1}^0 + A_1 \cdot y_1^2) + (I_{X2}^0 + A_2 \cdot y_2^2)$$

$$I_X = \left\{ \frac{50 \times 200^3}{12} + (50 \times 200) \times (100 - 162,5)^2 \right\} + \left\{ \frac{200 \times 50^3}{12} + (200 \times 50) \times (225 - 162,5)^2 \right\}$$

$$I_X = 1,135 \times 10^8 \text{ mm}^4 = 1,135 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Penghitungan statis momen luasan di atas bidang sambungan

$$S = A \cdot y$$

$$S = (200 \times 50) \times (225 - 162,5) = 6,25 \times 10^5 \text{ mm}^3 = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Penghitungan aliran geser pada bidang sambungan

$$f = \frac{V.S}{I}$$

$$f = \frac{(5000) \times (6,25 \times 10^{-4})}{(1,135 \times 10^{-4})} = 27488,987 \text{ N/m}$$

Penghitungan jarak paku

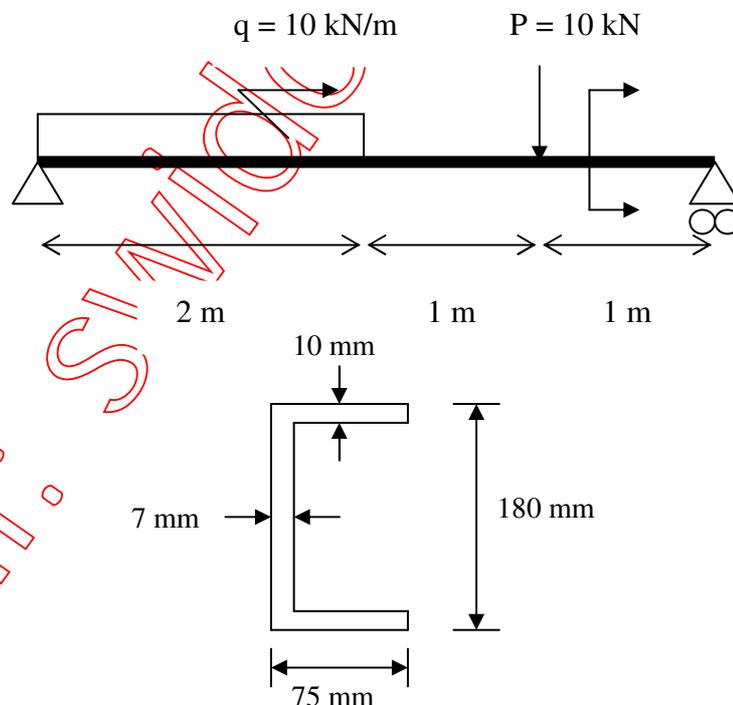
$$d_x = \frac{F}{f}$$

$$d_x = \frac{1000}{27499,987} = 0,0364 \text{ m}$$

Jadi paku dipasang dengan jarak masing-masing sebesar 3,5 cm.

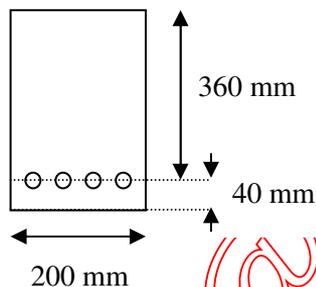
Soal Latihan

- 3.1. Profil baja berbentuk kanal digunakan pada sebuah struktur balok sederhana seperti terlihat pada gambar di bawah ini

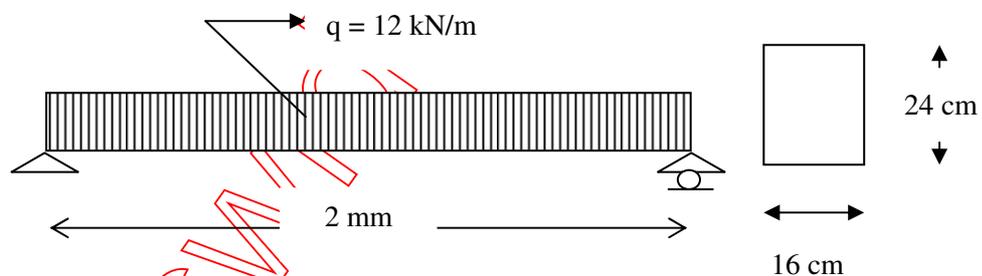


- Gambarkan diagram tegangan normal pada daerah momen maksimum !
- Tentukan besarnya lendutan maksimum !

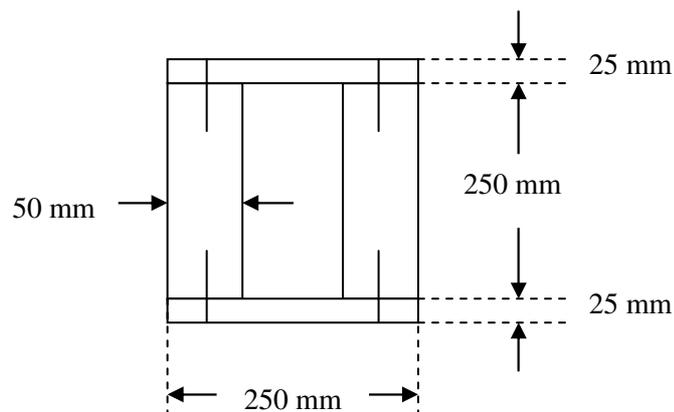
- 3.2. Sebuah balok beton bertulang dengan tinggi 400 mm dan lebar 200 mm diberikan tulangan baja sejumlah 4D19, di mana pusat berat tulangan berjarak 40 mm dari tepi bawah. Jika kuat tekan beton diketahui sebesar 20 MPa dan nilai rasio modulus elastisitas (n) adalah 15, hitung kapasitas momen balok dan besarnya tegangan pada baja tulangan.



- 3.3. Hitunglah tegangan geser maksimum (τ_{max}) dalam sebuah balok kayu sederhana yang memikul beban terbagi rata sebesar 12 kN/m (termasuk berat sendiri), jika bentangan balok sepanjang 2 m dan penampangnya berbentuk persegi dengan tinggi 24 cm dan lebar 16 cm.



- 3.4. Sebuah balok kayu dikonstruksi dari dua buah papan yang masing-masing berukuran 50 mm x 250 mm yang dihubungkan dengan dua papan berukuran 25 mm x 250 mm. Papan-papan tersebut disambung menggunakan paku berkekuatan geser (F) 1250 N berjarak 100 mm dalam arah longitudinal, berapakah gaya lintang (V) maksimum yang diijinkan ?



- 3.5. Sebuah balok T dengan bentuk dan ukuran penampang yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, menerima gaya lintang sebesar 100 kN. Hitung
- Tegangan geser pada sisi atas bagian badan dan tepat pada garis netral.
 - Persentase gaya geser yang ditanggung bagian badan.

