BAB 1

ALJABAR MATRIX

Dalam pokok bahasan ini akan disajikan dasar-dasar operasi aljabar matrix yang berhubungan dengan analisis struktur dengan menggunakan metode matrix kekakuan (*stiffness method*).

1.1. Pengertian Matrix

Matrix merupakan suatu kumpulan bilangan sejumlah m x n yang disusun menjadi m baris dan n kolom. Persamaan (1.1) menunjukkan contoh sebuah matrix dengan m baris dan n kolom.

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Jika $m \neq n$ maka matrix yang ditunjukkan pada Persamaan (1.1) disebut sebagai **matrix persegi (*rectangular*)**. Jika m = 1 dan n > 1, maka elemen pada Persamaan (1.1) tersusun dalam satu baris angka yang disebut **matrix baris**. Jika m > 1 dan n = 1 maka akan tersusun bilangan dalam satu kolom yang disebut sebagai **matrix kolom**. Jika $m = n$, maka susunan bilangan yang terbentuk disebut sebagai **matrix bujur sangkar (*square*)**. Penulisan matrix baris, persegi dan bujur sangkar dinotasikan menggunakan tanda kurung akolade [ ], sedangkan matrix kolom dinotasikan dalam tanda kurung kurawal { }. Untuk memudahkan penulisan matrix (baris, kolom, persegi maupun bujur sangkar) sering dinotasikan dalam bentuk sebuah variabel dengan garis di bawahnya atau sebuah variabel yang dikelilingi tanda kurung akolade ataupun kurung kurawal. Penggunaan matrix selanjutnya disesuaikan dengan kebutuhan para pemakainya misalnya; matrix gaya (*forces*) dan perpindahan (*displacements*) dalam analisis struktur disusun dalam bentuk matrix kolom, sedangkan matrix kekakuan (*stiffness matrix*) disusun dalam bentuk matrix bujur sangkar.

Identifikasi elemen dalam sebuah matrix $\underset{-}{a}$, direpresentasikan dengan notasi a_{ij}, di mana *subscript* i dan j menunjukkan jumlah baris dan kolom pada matrix $\underset{-}{a}$. Berikut disajikan beberapa alternatif notasi matrix

$$\underset{-}{a} = [\mathrm{a}] = \lfloor a_{ij} \rfloor \tag{1.2}$$

Contoh numeris dari berbagai jenis matrix disajikan pada Persamaan (1.3) sampai (1.6). Contoh matrix $\underset{-}{a}$ yang tergolong matrix persegi

$$\underset{-}{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

di mana matrix $\underset{-}{a}$ tersusun dalam 3 baris dan 2 kolom. Jika matrix $\underset{-}{a}$ dalam Persamaan (1.1) hanya terdiri dari satu baris (m = 1), maka akan dihasilkan matrix baris seperti berikut :

$$\underset{-}{a} = [2 \quad 3 \quad 4 \quad -1] \tag{1.4}$$

Jika n = 1 maka Persamaan (1.1) akan menghasilkan matrix kolom, misalnya :

$$\underset{-}{a} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

Jika $m = n$ maka Persamaan (1.1) akan menghasilkan matrix bujur sangkar sebagai berikut :

$$\underset{-}{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Matrix dan notasinya sering digunakan untuk mengekspresikan Persamaan Aljabar dalam bentuk ringkas yang sering ditemui dalam analisis struktur dengan metode matrix kekakuan karena dalam penggunaannya akan sangat membantu dalam menyelesaikan suatu permasalahan numeris.

1.2. Operasi Matrix

Sub pokok bahasan ini menyajikan berbagai operasi matrix yang sering digunakan dalam analisis struktur.

Perkalian Matrix dan Bilangan Skalar

Jika kita mempunyai sebuah bilangan skalar k dan suatu matrx $\underline{c}$, maka matrix $\underline{a} = k.\underline{c}$ dapat dihasilkan dari Persamaan

$$\underline{a}_{ij} = k.\underline{c}_{ij} \qquad (1.7)$$

di mana setiap elemen dalam matrix $\underline{c}$ dikalikan dengan bilangan skalar k, sebagaimana dalam contoh berikut :

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad k = 4$$

menghasilkan matrix $\underline{a} = k.\underline{c}$

$$\underline{a} = 4.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Perlu dicatat bahwa matrix $\underline{c}$ yang berordo m x n akan menghasilkan matrix $\underline{a}$ yang berordo m x n.

Penjumlahan Matrix

Matrix yang memiliki ukuran ordo yang sama dapat saling dijumlahkan untuk masing-masing elemen yang memiliki "alamat" sama, aturan ini juga berlaku untuk operasi pengurangan matrix. Matrix-matrix dengan ordo yang sama dapat dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan, di mana untuk operasi penjumlahan akan mengikuti ketentuan hukum *komutatif* dan *asosiatif*.

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \qquad \text{(komutatif)} \qquad (1.8)$$

$$\underline{d} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \left(\underline{a} + \underline{b}\right) + \underline{c} \qquad \text{(asosiatif)}$$

atau dalam bentuk notasi ber-*index* dapat dinyatakan :

$$\lfloor c_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor + \lfloor b_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor + \lfloor a_{ij} \rfloor \qquad \text{(komutatif)} \qquad (1.9)$$

$$\lfloor d_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor + \lfloor b_{ij} \rfloor + \lfloor c_{ij} \rfloor = \left(\lfloor a_{ij} \rfloor + \lfloor b_{ij} \rfloor\right) + \lfloor c_{ij} \rfloor \qquad \text{(asosiatif)}$$

sebagai contoh numerik dapat dilihat operasi matrix berikut :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

maka hasil penjumlahan $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ diperoleh :

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Perlu dicatat bahwa matrix $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ harus memiliki ukuran ordo yang sama, misalnya matrix berordo 2 x 2 tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan matrix yang berordo 3 x 3.

Perkalian Matrix

Operasi perkalian antara dua matrix $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ sebagaimana ditunjukkan pada Persamaan (1.10), hanya dapat dilakukan jika jumlah kolom pada matrix $\underline{a}$ sama dengan jumlah baris pada matrix $\underline{b}$, sebagai contoh :

$$\underline{c} = \underline{a}\,\underline{b} \qquad (1.10)$$

Jika $\underline{a}$ adalah sebuah matrix berordo *m* x *n*, maka matrix $\underline{b}$ harus memiliki *n* buah baris. Dengan notasi *subscript* dapat dituliskan hasil perkalian matrix $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ sebagai :

$$\left[c_{ij}\right] = \sum_{e=1}^{n} a_{ie} b_{ej} \qquad (1.11)$$

Di mana *n* merupakan jumlah keseluruhan kolom pada matrix $\underline{a}$ atau baris pada matrix $\underline{b}$. Untuk matrix $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ yang berordo 2 x 2, dalam operasi perkaliannya akan dihasilkan :

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Perhatikan contoh berikut :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

hasil perkalian $\underline{a}.\underline{b}$ diperoleh :

$$\underline{a}\,\underline{b} = \begin{bmatrix} 2(1) + 1(2) & 2(-1) + 1(0) \\ 3(1) + 2(2) & (3(-1) + 2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Pada umumnya operasi perkalian matrix tidak mengikuti hukum komutatif, di mana

$$\underline{a}\,\underline{b} \neq \underline{b}\,\underline{a} \qquad (1.13)$$

Validitas/kebenaran hasil perkalian antara dua buah matrix $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ dapat diilustrasikan sebagai berikut :

$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{c}$$

$$(ixe)(exj) = (ixj) \qquad (1.14)$$

di mana matrix $\underline{c}$ yang dihasilkan akan berordo i x j; dengan jumlah baris sama dengan baris pada matrix $\underline{a}$ dan jumlah kolom sama dengan kolom pada matrix $\underline{b}$.

Dalam operasi perkalian matrix terdapat beberapa sifat penting, antara lain :

(a). $\underline{a}\left(\underline{b}+\underline{c}\right)=\underline{a}\,\underline{b}+\underline{a}\,\underline{c}$ (distributif) (1.15)

(b). $\left(\underline{a}+\underline{b}\right)\underline{c}=\underline{a}\,\underline{c}+\underline{b}\,\underline{c}$ (distributif)

(c). $\underline{a}\left(\underline{b}\,\underline{c}\right)=\left(\underline{a}\,\underline{b}\right)\underline{c}$ (asosiatif)

Matrix Transpose

Pada semua jenis matrix, baik yang berupa baris, kolom, persegi maupun bujur sangkar dapat dilakukan operasi transpose. Operasi ini sering digunakan dalam menyelesaikan permasalahan analisis struktur dengan metode matrix kekakuan. Transpose dari suatu matrix $\underline{a}$ dilambangkan sebagai $\underline{a}^T$. Transpose dari suatu matrix diperoleh dengan cara menukarkan elemen baris dan kolom, sehingga elemen-elemen pada baris pertama akan menempati kolom pertama; baris kedua menjadi kolom kedua dan seterusnya. Operasi transpose dari matrix $\underline{a}$,

$$\left[a_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right]^T \qquad (1.16)$$

contoh :

$$[a]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

maka

$$[a]^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

di mana kita telah menukarkan elemen elemen baris dengan kolom untuk mendapatkan matrix transpose.

Perlu diketahui bahwa terdapat hubungan yang penting dalam operasi transpose matrix :

$$\left(\underline{a}.\underline{b}\right)^T = \underline{b}^T.\underline{a}^T \tag{1.17}$$

Persamaan (1.16) menunjukkan transpose dari sebuah matrix yang merupakan hasil perkalian antara matrix $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ sama dengan hasil perkalian antara transpose matrix $\underline{b}$ dikalikan dengan transpose matrix $\underline{a}$.

Ketentuan ini berlaku secara umum berapapun jumlah matrix yang dioperasikan, sehingga :

$$\left(\underline{a}.\underline{b}.\underline{c}...\underline{k}\right)^T = \underline{k}^T...\underline{c}^T.\underline{b}^T.\underline{a}^T \tag{1.18}$$

Transpose dari sebuah matrix kolom akan menghasilkan matrix baris.

Contoh kasus dari Persamaan (1.17) dapat dilihat di bawah ini :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

maka

$$\underline{a}.\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17 \\ 39 \end{Bmatrix}$$

selanjutnya

$$\left(\underline{a}.\underline{b}\right)^T = [17 \quad 39] \tag{1.19}$$

Cara lain dilakukan dengan operasi transpose matrix dan hasilnya akan dikalikan :

$$\underline{b}^T.\underline{a}^T = [5 \quad 6].\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = [17 \quad 39] \tag{1.20}$$

Hasil dari Persamaan (1.18) dan (1.19) menunjukkan kebenaran dari Persamaan (1.17).

Matrix Simetris

Jika sebuah matrix sama dengan transpose-nya, maka matrix tersebut dapat dikategorikan sebagai matrix simetris; atau jika :

$$\underline{a} = \underline{a}^T \tag{1.21}$$

misalnya matrix berikut ini :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrix di atas tergolong matrix yang simetris karena setiap elemen $\underline{a}_{ij}$ sama dengan elemen $\underline{a}_{ji}$ untuk $i \neq j$. Pada contoh di atas terlihat diagonal utama dari arah sudut kiri atas ke arah sudut kanan bawah merupakan garis simetri pada matrix tersebut. Perlu dicatat bahwa hanya matrix bujur sangkar yang dapat digolongkan dalam matrix simetris.

Matrix Satuan

Matrix satuan yang juga disebut matrix identitas lazim dilambangkan sebagai matrix $\underline{I}$, di mana :

$$\underline{a}.\underline{I} = \underline{I}.\underline{a} = \underline{a} \tag{1.22}$$

Matrix satuan selalu berupa matrix bujur sangkar di mana semua elemennya bernilai nol kecuali pada diagonal utama selalu bernilai satu. Apabila matrix satuan dikalikan dengan suatu matrix tertentu akan menghasilkan matrix itu sendiri.

Contoh matrix satuan yang berordo 3 x 3 :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan

Determinan matrix bujur sangkar dapat dihitung dengan persamaan di bawah ini :

$[A]_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; maka Determinan $[A] = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$[A]_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; maka

$$|A| = a_{11}.(b_{22}.b_{33} - b_{23\cdot 32}) - a_{12}.(b_{21}.b_{33} - b_{23\cdot 31}) + a_{13}.(b_{21}.b_{32} - b_{22\cdot 31})$$

Untuk matrix yang berordo lebih besar dapat digunakan persamaan berikut :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} \qquad (1.23)$$

di mana $c_{ik} = (-1)^{i+k}|M_{ik}|$ merupakan *cofactor* a_{ik}

dengan $|M_{ik}|$ merupakan *minor* a_{ik}

Perlu diketahui *minor* merupakan determinan dari bagian matrix $[A]$ di luar baris *ke-i* dan kolom *ke-k*.

Matrix Inverse

Matrix inverse adalah suatu matrix yang jika dikalikan dengan matrix "asal"-nya akan menghasilkan matrix identitas. Dalam bentuk persamaan matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\underline{a}^{-1}.\underline{a} = \underline{a}.\underline{a}^{-1} = \underline{I} \qquad (1.24)$$

Sebuah matrix akan mempunyai matrix inverse jika matrix tersebut berbentuk bujur sangkar. Matrix inverse dapat diperoleh dengan beberapa cara di antaranya; metode *cofactor* atau *adjoint* dan metode *Gauss-Jordan*.

Metode *adjoint* atau *cofactor* dapat digunakan untuk menghitung inverse dari sebuah matrix bujur sangkar, berdasarkan persamaan berikut ini :

$$\underline{a} = \frac{\underline{C}^T}{\left|\underline{a}\right|} \tag{1.25}$$

di mana $\underline{C}$ merupakan matrix *cofactor*

$\underline{C}^T$ merupakan transpose dari matrix *cofactor* yang disebut sebagai matrix *adjoint*.

Berikut ini diberikan contoh penghitungan matrix inverse dari matrix $\underline{a}$, jika diketahui :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

cofactor dari matrix $\underline{a}$ dapat dihitung dengan :

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Analog cara di atas diperoleh, $c_{31} = -2$; $c_{32} = -2$; $c_{33} = -2$

maka didapatkan *cofactor* matrix $\underline{a}$:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -12 & -2 & 8 \\ -11 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditentukan *adjoint* matrix

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} -12 & -11 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

selanjutnya determinan matrix $\underline{a}$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

$$|A| = (-1)(-12) + (3)(-2) + (-2)(8) = -10$$

maka matrix inverse $\underline{a}^{-1}$ diperoleh :

$$\underline{a}^{-1} = \frac{\underline{c}^T}{|A|} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -12 & -11 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

selanjutnya dapat diperiksa bahwa :

$$\underline{a}\,\underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cara lain yang juga sering digunakan untuk menghitung inverse dari suatu matrix adalah **Metode Gauss-Jordan**. Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari inverse dari matrix $\underline{a}$ dengan ordo n x n dengan metode Gauss-Jordan adalah sebagai berikut :

(a). Tentukan matrix satuan $\underline{I}$ dengan ordo *n* x *n*.

(b). Dengan cara operasi baris, ubahlah matrix $\underline{a}$ menjadi matrix satuan $\underline{I}$ dengan tahapan sebagai berikut :

(i). Bagilah baris ke-*i* dengan a_{11}, sehingga nilai a_{11} bernilai sama dengan *satu*.

(ii). Jumlahkan baris ke-2 dengan baris ke-*1* yang telah diperkalikan dengan (-a_{21}), sehingga nilai a_{21} sekarang berubah menjadi *nol*.

(iii). Ulangi langkah (ii) untuk baris ke-*3,4,5,...,n*, sehingga semua elemen pada kolom ke-*1* bernilai dama dengan *nol*, kecuali elemen a_{11} yang bernilai sama dengan *satu*.

(iv). Ulangi langkah (i), (ii), (iii) untuk baris kedua, dimulai dengan membuat nilai $a_{22} = 1$, dan elemen lainnya pada kolom ke-2 bernilai sama dengan *nol* ($a_{12} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{42} = 0$, ..., $a_{n2} = 0$).

(v). Ulangi langkah (iv) untuk baris ke-*3, 4, 5, ..., n*.

(vi). Proses selesai.

(c). Proses (b) sekaligus juga dilakukan terhadap marix $\underline{I}$ sekaligus, sehingga setelah proses selesai matrix $\underline{I}$ telah berubah menjadi matrix $\underline{a}^{-1}$ yang merupakan inverse dari matrix $\underline{a}$.

(d). Proses keseluruhan dapat dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\left[\underline{a} \;:\; \underline{I}\right] \xrightarrow{\textit{operasi baris}} \left[\underline{I} \;:\; \underline{a}^{-1}\right] \tag{1.26}$$

Contoh :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari inverse dari matrix $\underline{a}$ dengan metode Gauss-Jordan, dilakukan operasi baris dengan notasi $H_{ik}^{(p)}$ yang menunjukkan penjumlahan pada baris ke-*i* dengan baris ke-*k* yang telah diperkalikan dengan *p*, misalnya : $H_{21}^{(2)}$ menunjukkan baris ke-2 dijumlahkan dengan *2 kali* baris ke-*1*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{31}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh $\underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Suatu matrix yang memiliki matrix inverse disebut sebagai **matrix non-singular** sedangkan matrix yang tidak memiliki inverse disebut **matrix singular**, yang ditandai dengan nilai determinan sama dengan nol.

1.3. Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Inversi Matrix

Dalam analisis struktur dengan metode matrix akan banyak dijumpai bentuk-bentuk susunan persamaan linear, yang secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$[A]\{X\}=\{B\} \tag{1.27}$$

di mana :

$[A]$ = Matrix bujur sangkar yang menunjukkan koefisien persamaan linear yang dimaksud.

$[X]$ = Matrix kolom dari bilangan "*unknown*".

$[B]$ = Matrix kolom dari "konstanta".

Jika Persamaan (1.27) dikalikan dengan matrix $[A]^{-1}$, maka :

$$[A]^{-1}[A]\{X\}=[A]^{-1}\{B\}$$

$$[I]\{X\}=[A]^{-1}\{B\}$$

$$\{X\}=[A]^{-1}\{B\} \tag{1.28}$$

Contoh : diketahui suatu susunan persamaan linear sebagai berikut;

x	+	3y	+	3z	=	-2
x	+	4y	+	3z	=	0
x	+	3y	+	4z	=	1

Persamaan di atas dapat disusun dalam bentuk matrix

$$[A]\{X\}=\{B\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

maka

$$\{X\}=[A]^{-1}\{B\}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$