BAB 2

KONSEP DASAR METODE MATRIX KEKAKUAN

2.1. Metode Matrix

Seperti telah diketahui, analisis struktur mencakup penentuan tanggap (respons) sistem struktur terhadap gaya maupun pengaruh luar yang bekerja pada sistem struktur tersebut. Akibat bekerjanya beban maupun pengaruh luar lainnya, respons pertama yang terjadi adalah adanya perubahan dari kedudukan (konfigurasi) awalnya, struktur berpindah ke kedudukan akhir di mana terjadi keseimbangan dalam pengaruh gaya luar. Dalam hal ini dihadapi medan perpindahan (*displacement field*) yang merupakan salah satu tanggap struktur terhadap beban atau pengaruh luar.

Perpindahan yang dialami struktur secara umum mencakup dua bagian. Yang pertama adalah perpindahan badan kaku (*rigid body displacement*) yang tidak menimbulkan reaksi dalam elemen, karena perpindahan ini tidak menimbulkan deformasi. Yang kedua adalah perpindahan yang menimbulkan deformasi. Perpindahan deformatif ini akan menimbulkan gaya reaksi dalam elemen struktur maupun perletakannya.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa tanggap struktur terhadap adanya gaya maupun pengaruh luar yang bekerja padanya dapat dibedakan menjadi dua yaitu : (a) **perpindahan** dan (b) **gaya dalam elemen struktur dan perletakan**. Dua aspek inilah yang dipelajari dan dikaji dalam analisis struktur, dimana perpindahan dan gaya dalam dihitung dengan memperhatikan kriteria keseimbangan (*equilibrium criteria*), keselarasan (*compatibility criteria*) dan hubungan gaya-perpindahan (*force-displacement relationship criteria*).

Analisis struktur dalam kebanyakan kasus yang dijumpai secara nyata di lapangan, pada umumnya terdiri dari banyak bagian yang tersusun secara komplex, sehingga analisis struktur statis tak tentu yang hanya didasarkan pada prinsip-pirinsip keseimbangan tidak mungkin lagi untuk diterapkan. Metode matrix merupakan konsep baru dalam analisis struktur yang memungkinkan langkah idealisasi struktur untuk menyusun persamaan-persamaan linear yang diperlukan dalam penentuan tanggap struktur, baik yang berupa **medan perpindahan** (translasi dan rotasi) maupun **medan gaya** (gaya aksial, gaya lintang, momen lentur dan torsi) pada titik-titik diskrit dalam suatu struktur. Keunggulan lain dari metode matrix adalah susunan persamaan linear dalam penentuan perpindahan dan gaya dalam yang terjadi dapat dijabarkan dalam bahasa program komputasi, sehingga akan mempercepat waktu dan meningkatkan ketelitian hasil perhitungan yang diperoleh. Dalam analisis metode matrix secara garis besar dapat dibedakan menjadi dua yaitu; **metode fleksibilitas** dan **metode kekakuan**. Selanjutnya pembahasan dalam diktat ini menitikberatkan analisis struktur dengan metode kekakuan.

2.2. Metode Kekakuan

Dengan metode kekakuan (*stiffness method*) ini sebenarnya dicari hubungan gaya dengan perpindahan, yang secara matematis dapat dinyatakan :

$$\{F\} = [K].\{D\} \tag{2.1}$$

di mana {F} menyatakan gaya-gaya yang timbul pada titik-titik diskrit akibat terjadinya perpindahan {D} pada titik-titik tersebut. Tentu saja gaya {F} merupakan gaya yang berhubungan (*corresponding*) dengan perpindahan {D}. Sedangkan [K] menyatakan kekakuan dari struktur.

Metode kekakuan ini juga disebut metode perpindahan (*displacement method*), karena analisis dimulai dengan menghitung perpindahan yang terjadi pada titik-titik diskrit. Secara garis besar metode kekakuan didasarkan pada tiga langkah utama yang merupakan prinsip dasar analisis struktur yaitu :

(a). Keselarasan Deformasi (*compatibility*); yaitu kriteria yang mengatur hubungan dari komponen perpindahan satu dengan yang lainnya, sedemikian hingga kontinuitas perpindahan terjamin di seluruh ataupun sebagian struktur. Dengan itu diperoleh suatu medan perpindahan yang secara kinematis memungkinkan (*kinematically admissible*). Tinjauan keselarasan deformasi ini didasarkan atas konsep geometri. Sebagai contoh, pada tumpuan jepit tidak akan terjadi rotasi dan translasi pada ujung batang. Contoh lain, dapat disebutkan bahwa rotasi dan translasi harus sama pada semua ujung batang yang bertemu pada satu titik simpul, di mana batang-batang dihubungkan secara kaku.

(b). Persamaan Hubungan Tegangan dan Regangan (*Stress-Strain Relationship*); yaitu mencari mencari besarnya gaya-gaya dalam yang timbul sebagai akibat terjadinya perpindahan/deformasi pada elemen-elemen struktur tersebut.

(c). Keseimbangan (*equilibrium*) sebagai langkah terakhir yang menyatakan hubungan antara gaya-gaya luar yang bekerja di titik diskrit dengan gaya-gaya dalam, atau mencari berapa besar gaya luar di ujung elemen yang tepat diimbangi oleh gaya-gaya dalam elemen di titik-titik diskrit.

Dengan menggabungkan ketiga prinsip dasar ini akan diperoleh hubungan antara gaya dan perpindahan, sebagaimana dinyatakan dalam Persamaan (2.1).

Perlu dicatat, karena dalam metode kekakuan ini analisis struktur dimulai dengan penghitungan besaran perpindahan, dilanjutkan dengan mencari hubungan antara perpindahan dengan gaya dalam yang terjadi pada titik diskrit, maka akan sangat menguntungkan metode ini digunakan untuk menganalisis suatu struktur di mana nilai derajat ketidak-tentuan kinematisnya (berhubungan erat dengan derajat kebebasan atau *degree of freedom*) adalah lebih kecil dari derajat ketidak-tentuan statisnya. Dengan demikian struktur-struktur statis tak tentu yang sering dijumpai pada kasus nyata di lapangan, akan lebih menguntungkan bila dianalisis dengan metode kekakuan ini, karena umumnya struktur-struktur ini memiliki derajat ketidak-tentuan statis yang besar.

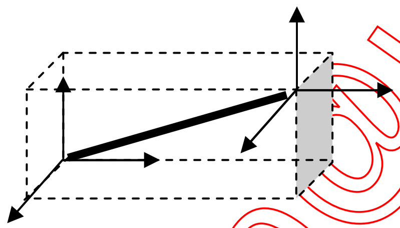
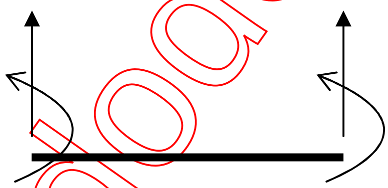
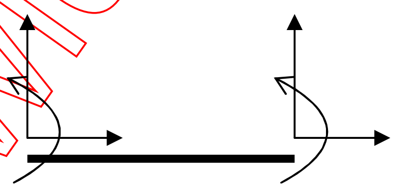
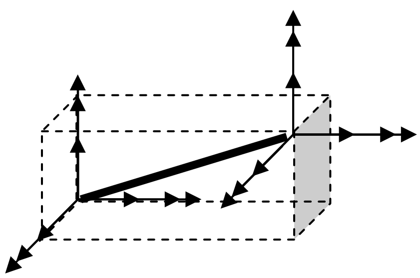
2.3. Derajat Ketidak-tentuan Kinematis

Sebagaimana telah dijelaskan pada bagian sebelumnya, dalam analisis struktur dengan mtode matrix kekakuan langkah pertama dilakukan dengan menghitung perpindahan di titik-titik diskrit sebagai sasaran/tujuan yang harus dihitung. Untuk mengetahui di mana harus dihitung besaran perpindahan yang terjadi, maka terlebih dahulu harus diketahui berapa derajat ketidak-tentuan kinematis atau *kinematic indeterminacy degree* (**KID**) atau derajat kebebasan pergerakan (*degree of freefom*) dari sistem struktur yang tidak terkekang.

Derajat ketidak-tentuan kinematis merupakan suatu besaran yang menyatakan jumlah komponen bebas dari perpindahan di titik diskrit yang mungkin terjadi sebagai akibat bekerjanya beban pada sistem struktur.

Pada struktur bidang/dua dimensi (2D) dengan perilaku titik simpul yang kaku sempurna (jepit), umumnya akan terjadi perpindahan berupa **translasi** (linear) dan **rotasi** (anguler) di titik-titik diskrit.

Tabel 2.1. Derajat Kebebasan Berbagai Jenis Struktur

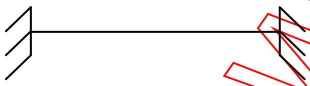
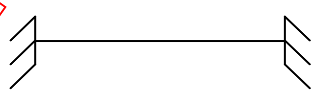
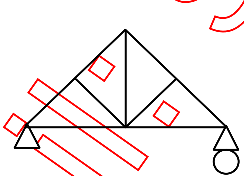
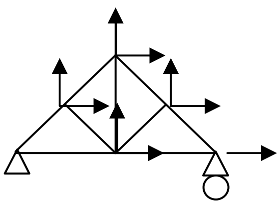
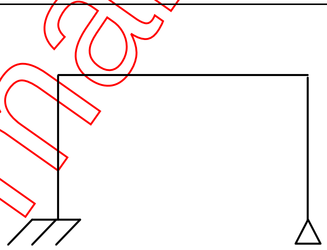
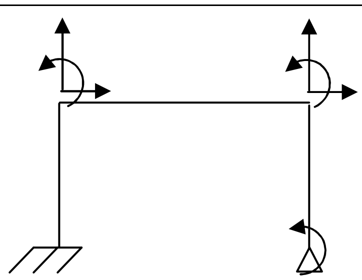
Jenis Struktur	**Komponen Perpindahan**	***Degree of Freedom*** **Setiap nodal**
Plane Truss (2D)		**2**
Space Truss (3D)		**3**
Balok (aksial diabaikan)		**2**
Plane Frame (2D)		**3**
Space Frame (3D)		**6**

Perpindahan yang berupa **translasi** selalu dapat dinyatakan dalam dua komponen yang saling tegak lurus, sedangkan komponen **rotasi** dinyatakan oleh satu komponen anguler. Dengan demikian pada satu titik simpul (nodal) secara lengkap akan terjadi tiga komponen perpindahan.

Untuk struktur ruang/tiga dimensi (3D) dengan titik simpul kaku sempurna (jepit), pada umumnya secara lengkap akan ada enam buah komponen perpindahan di setiap nodal, yang berupa tiga komponen translasi dan tiga komponen rotasi.

Pada bangunan rangka batang dengan perilaku sambungan sendi, maka dengan sendirinya komponen perpindahan rotasi tidak akan muncul. Selengkapnya derajat kebebasan pergerakan awal (*initial degree of freedom*) untuk satu buah titik simpul pada berbagai jenis struktur dapat dilihat pada Tabel 2.1. Suatu struktur dengan derajat ketidak-tentuan kinematis sama dengan nol disebut sebagai struktur kinematis tertentu.

Tabel 2.2. Contoh Perhitungan Derajat Ketidak-tentuan Kinematis

Struktur	Komponen Perpindahan Bebas	KID
		**0**
		**9**
		**7**

Analisis struktur dengan metode kekakuan dimulai dengan mengubah sistem struktur yang ada menjadi struktur yang tergolong kinematis tertentu, sehingga semua perpindahan yang tidak diketahui sama dengan nol. Agar perpindahan yang tidak diketahui (translasi dan rotasi pada titik simpul) sama dengan nol, maka titik simpul pada struktur harus dikekang (*restrained*) terhadap segala macam perpindahan yang mungkin terjadi. Struktur yang diperoleh dengan mengekang semua titik simpul struktur awal disebut **struktur terkekang** (*restrained structure*). Deformasi/perpindahan yang terjadi pada suatu titik simpul akibat bekerjanya beban besarnya sama dengan deformasi yang tidak diketahui pada struktur awal. Untuk mempermudah tinjauan terhadap struktur terkekang maka dilakukan analisis untuk setiap satu satuan perpindahan/deformasi. Besaran beban atau gaya luar yang dapat menimbulkan terjadinya satu satuan deformasi yang tak diketahui disebut sebagai **koefisien kekakuan** untuk struktur terkekang, besaran inilah yang akan digunakan sebagai dasar penyusunan **matrix kekakuan struktur**.

2.4. Prosedur Analisis Struktur

Tahapan-tahapan perhitungan dalam analisis struktur dengan metode matrix kekakuan dapat diuraikan secara detail, sebagai berikut :

(a). Tentukan model diskritisasi struktur yang akan digunakan untuk mempresentasikan struktur dalam analisis. Tetapkan jumlah elemen, titik simpul serta derajat kebebasan aktif (atau yang perlu diaktifkan untuk kekangan) struktur.

(b). Tetapkan jenis elemen yang perlu digunakan serta yang mampu memodelkan medan perpindahan struktur.

(c). Untuk masing-masing elemen, susun matrix kekakuan dalam tata sumbu lokal $[k_i]$, vektor beban ekivalen pada titik diskrit $[f_i]$, matrix transformasi $[T_i]$ serta vektor tujuan $\{D_s\}$.

(d). Rotasikan matrix kekakuan dan vektor beban ekivalen ke tata sumbu global.

$$[K_i] = [T_i]^T[k_i][T_i]$$

$$\{F_i^e\} = [T_i]^T\{f_i\} \tag{2.2}$$

(e). Rakitkan matrix kekakuan dan vektor beban ekivalen serta beban titik simpul ke dalam persamaan keseimbangan global, dengan rumus :

$$[K_s] = \sum[T_i]^T[k_i][T_i]$$

$$\{F_s\} = \{F_s^j\} + \sum[T_i]^T\{f_i\} \tag{2.3}$$

(f). Berdasarkan hasil tahapan (e), sistem persamaan keseimbangan dalam tata sumbu global dapat dinyatakan dalam :

$$[K_s]\{D_s\} = \{F_s\} \tag{2.4}$$

(g). Jika terdapat kekangan, modifikasikan Persamaan Keseimbangan (2.4) sesuai dengan kondisi batas yang ada, sehingga diperoleh :

$$[K_s^1]\{D_s\} = \{F_s^1\} \tag{2.5}$$

di mana $[K_s^1]$ dan $\{D_s\}$ merupakan matrix kekakuan dan vektor beban dalam tata sumbu global yang termodifikasi akibat adanya syarat pengekangan.

(h). Selesaikan Persamaan (2.5) untuk mendapatkan $\{D_s\}$, yang merupakan vektor perpindahan global yang memenuhi syarat keseimbangan struktur dan syarat kekangan (jika ada).

(i). Dengan telah diketahuinya medan perpindahan $\{D_s\}$, maka perpindahan setiap elemen dalam tata sumbu lokal dapat dihitung dengan :

$$\{d_i\} = [T_i]\{D_i\} \tag{2.6}$$

serta gaya dalam masing-masing elemen

$$\{f_i\} = [k_i]\{d_i\} - \{f_i^0\} \tag{2.7}$$

di mana $\{f_i^0\}$ merupakan vektor beban ekivalen di titik nodal.

dari urutan perhitungan di atas, analisis dapat dibagi menjadi 4 (empat) tahap utama, yaitu :

(a). Tahap data masukan dan pemodelan struktur.

(b). Tahap perakitan matrix kekakuan dan vektor gaya luar struktur dalam tingkat elemen.

(c). Tahap solusi untuk memperoleh vektor perpindahan.

(d). Tahap penghitungan gaya dalam elemen dan pencatatan data keluaran (*output*).