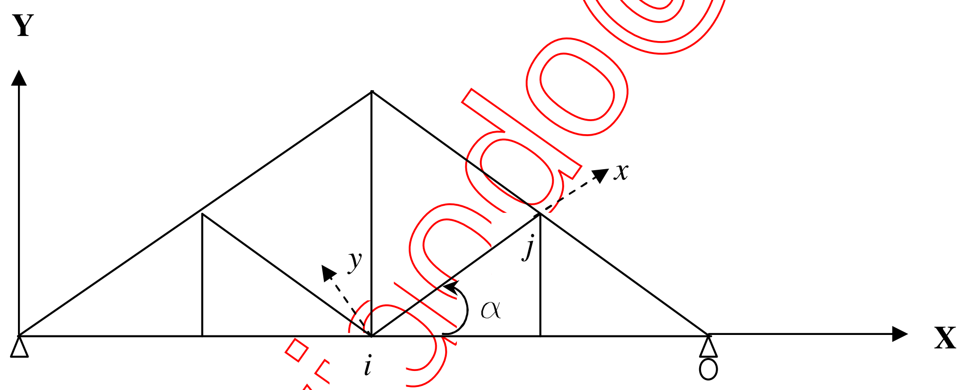
BAB 3

ANALISIS STRUKTUR RANGKA BATANG BIDANG

3.1. Kekakuan Rangka batang Bidang (*Plane Truss*)

Struktur *plane truss* merupakan suatu sistem struktur yang merupakan gabungan dari sejumlah elemen (batang) di mana pada setiap titik simpulnya dianggap berperilaku sebagai sendi dan setiap elemennya hanya dapat menerima gaya berupa gaya aksial (tarik ataupun tekan).



Gambar 3.1. Struktur *Plane Truss*

Sumbu **X-Y** adalah sistem koordinat global struktur, yang nantinya diacu semua elemen. Sedangkan sumbu **Z** tegak lurus terhadap bidang gambar (mengarah pembaca) mengikuti kaidah tangan kanan, sehingga terbentuk sistem koordinat yang mengikuti *right-handed rule*. Sumbu *x-y* merupakan sistem koordinat lokal elemen, yang hanya berlaku untuk satu elemen tertentu saja, yang orientasinya disesuaikan dengan arah elemen yang bersangkutan.

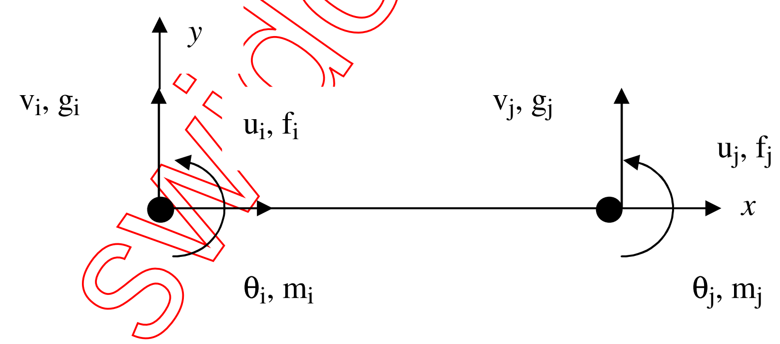
Setiap elemen *plane truss* selalu memiliki dua nodal (titik simpul) ujung. Ujung awal elemen diberi notasi nodal *i* sedangkan ujung lainnya diberi notasi *j*. Pusat sumbu lokal elemen adalah nodal *i* , dan arah sumbu

x lokal positif selalu dibuat dari nodal i ke nodal j dari elemen tersebut. Sumbu y lokal dibuat tegak lurus sumbu x, sedangkan sumbu lokal arah z dibuat searah dengan sumbu **Z** global dan tegak lurus terhadap bidang struktur (bidang **X-Y**).

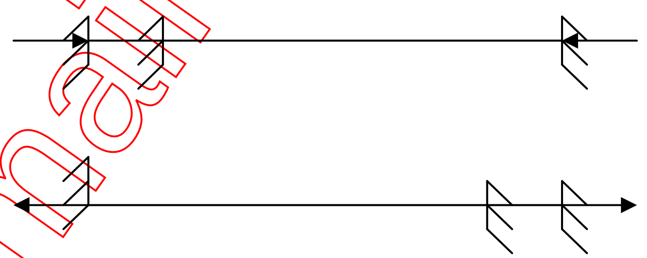
Orientasi elemen secara global dapat dikenali berdasarkan sudut α, yang dibuat oleh sumbu x lokal dari elemen yang ditinjau dengan sumbu **X** global dari struktur. Sudut α diberi tanda positif berdasarkan kaidah tangan kanan (*right-handed rule*), yaitu diukur dari sumbu **X** global berputar menuju sumbu x lokal dengan poros sumbu **Z** positif, sehingga pada gambar 3.1 sudut α akan bernilai positif jika perputaran berlawanan dengan arah putaran jarum jam.

Hubungan antara aksi dan deformasi pada elemen *plane truss* secara umum dapat diformulasikan dengan orientasi sumbu lokalnya sebagai berikut :

Konvensi Arah Tanda Positif



Translasi Arah Aksial (satu satuan)



$$f_i = -f_j = \frac{AE}{L}$$

$$f_i = -f_j = -\frac{AE}{L}$$

Gambar 3.2. Hubungan Aksi-Deformasi pada Elemen *Plane Truss*

Persamaan hubungan antara aksi dan deformasi elemen dalam sistem koordinat lokal yang diperoleh berdasarkan prinsip superposisi dapat diuraikan sebagai berikut :

$$f_i = \frac{AE}{L}u_i + 0.v_i - \frac{AE}{L}u_j + 0.v_j$$

$$g_i = 0.u_i + 0.v_i + 0.u_j + 0.v_j$$

$$f_j = -\frac{AE}{L}u_i + 0.v_i + \frac{AE}{L}u_j + 0.v_j$$

$$g_j = 0.u_i + 0.v_i + 0.u_j + 0.v_j \qquad (3.1)$$

di mana :

x : sumbu batang

x, y : sistem koordinat lokal (elemen)

u_i : *displacement* aksial pada titik nodal i

v_i : *displacement* arah tegak lurus sumbu batang pada nodal i

f_i : gaya aksial pada titik nodal i yang sesuai dengan u_i

g_i : gaya tegak lurus sumbu batang pada titik nodal i yang sesuai dengan v_i

Persamaan hubungan aksi-deformasi yang ditunjukkan Persamaan (3.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matrix :

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ g_i \\ f_j \\ g_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (3.2)$$

dengan :

A : Luas tampang batang

E : Modulus elastisitas batang

L : Panjang batang

Persamaan keseimbangan elemen dalam sistem koordinat lokal adalah

$$\{f_i\} = [k_i]\{d_i\} \qquad (3.3)$$

di mana :

$\{f_i\}$: vektor gaya dalam sistem koordinat lokal

$[k_i]$: matrix kekakuan elemen *plane truss* dalam sistem koordinat lokal

$\{d_i\}$: vektor *displacement* dalam sistem koordinat lokal.

Subscript i menunjukkan nomor elemen yang bersangkutan.

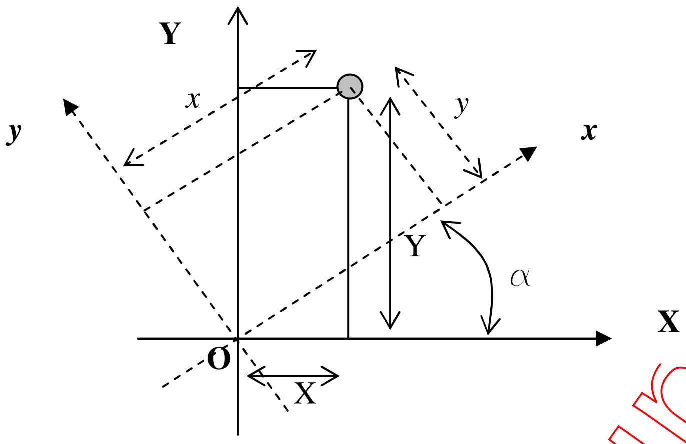
Selanjutnya matrix kekakuan elemen *plane truss* dalam sistem koordinat lokal dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[k_i] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

3.2. Transformasi Sumbu

Dalam analisis struktur yang dilakukan pada kebanyakan kasus, perlu dilakukan penyesuaian antara matrix kekakuan elemen struktur lokal (yang mengacu sumbu lokal secara individual) ke dalam matrix kekakuan elemen struktur global (mengacu pada sistem struktur global yang dianut semua elemen struktur.

Penyesuaian tersebut dapat dilakukan dengan memandang titik nodal awal *i* dan nodal akhir *j* dalam bidang **X-**Y (global) dari elemen mengalami perpindahan ke nodal *i′* dan *j′* dalam bidang *x-y* (lokal), sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Transformasi Sumbu Kartesian

Berdasarkan Gambar 3.3 ditunjukkan perputaran sumbu Kartesian dari sumbu global **X-Y** menuju sumbu lokal *x-y* dengan kemiringan sudut α, sehingga dapat diperoleh Persamaan Transformasi Sumbu yang menunjukkan perubahan posisi suatu titik nodal dalam bentuk berikut :

$$x = \mathrm{X}.\cos\alpha + Y.\sin\alpha \qquad (3.5.a.)$$

$$y = -X.\sin\alpha + Y.\cos\alpha \qquad (3.5.b.)$$

Persamaan di atas jika diubah dalam bentuk matrix, dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \qquad (3.6.)$$

Analog dengan cara di atas, transformasi koordinat untuk suatu elemen struktur yang dibatasi oleh dua buah titik nodal (*i* dan *j*) dapat ditunjukkan dengan persamaan berikut :

$$x_i = X_i.Cos\alpha + Y_i.Sin\alpha$$

$$y_i = -X_i.Sin\alpha + Y_i.Cos\alpha$$

$$xj = X_j.Cos\alpha + Y_j.Sin\alpha$$

$$y_j = -X_j.Sin\alpha + Y_j.Cos\alpha \qquad (3.7.)$$

Atau dalam bentuk matrix dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \qquad (3.8)$$

analog di atas untuk vektor *displacement* diperoleh

$$\begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dx_j \\ dy_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DX_i \\ DY_i \\ DX_j \\ DY_j \end{Bmatrix} \qquad (3.9.a)$$

atau

$$\{d_i\} = [T_i]\{D_i\} \qquad (3.9.b)$$

sedangkan untuk transformasi gaya diperoleh :

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ g_i \\ f_j \\ g_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ G_i \\ F_j \\ G_j \end{Bmatrix} \qquad (3.10.a)$$

atau

$$\{f_i\} = [T_i]\{F_i\} \qquad (3.10.b)$$

di mana;

$\{f_i\}$: vektor gaya pada koordinat lokal

$\{F_i\}$: vektor gaya pada koordinat global

$\{d_i\}$: vektor *displacement* pada koordinat lokal

$\{D_i\}$: vektor *displacement* pada koordinat global

$[T_i]$: matrix transformasi

3.3. Matrix Kekakuan Elemen dalam Koordinat Global

Sistem Persamaan Kekakuan Struktur Elemen dalam orientasi sumbu lokal dapat ditunjukkan pada persamaan di bawah ini :

$$\{f_i\} = [k_i]\{d_i\} \tag{3.11}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.9) dan (3.10) ke dalam Persamaan (3.11) maka diperoleh :

$$[T_i]\{F_i\} = [k_i][T_i]\{D_i\} \tag{3.12}$$

selanjutnya dengan mempra-kalikan (*premultiplied*) ruas kiri dan ruas kanan Persamaan (3.12) dengan matrix $[T_i]^{-1}$, dapat diperoleh :

$$[T_i]^{-1}[T_i]\{F_i\} = [T_i]^{-1}[k_i][T_i]\{D_i\}$$

dan mengingat $[T_i]^{-1}[T_i] = 1$, dan $[T_i]^{-1} = [T_i]^T$, maka

$$[F_i] = [T_i]^T[k_i][T_i]\{D_i\} \tag{3.13}$$

atau

$$\{F_i\} = [K_i]\{D_i\} \tag{3.14}$$

yang merupakan Persamaan Keseimbangan Elemen dalam Sistem Koordinat Global, dengan :

$$[K_i] = [T_i]^T[k_i][T_i] \tag{3.15}$$

di mana; $[K_i]$ merupakan matrix kekakuan elemen dalam sistem koordinat global.

atau

$$[K_i] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & s.c & -c^2 & -s.c \\ s.c & s^2 & -s.c & -s^2 \\ -c^2 & -s.c & c^2 & s.c \\ -s.c & -s^2 & s.c & s^2 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

di mana; s : $\sin\alpha$

c : $\cos\alpha$

Langkah berikutnya adalah menyusun **matrix kekakuan struktur global** $[K_s]$, berdasarkan prinsip kompatibilitas di mana terdapat keselarasan perpindahan di antara elemen-elemen struktur yang ada. Matrix kekakuan struktur global $[K_s]$ dapat disusun dengan metode kekakuan langsung (*direct stiffness method*) berdasarkan **matrix kekakuan elemen dalam koordinat global** $[K_i]$, yang telah diperoleh pada tahapan sebelumnya. Pembentukan matrix kekakuan struktur global dapat dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$[K_s] = \sum_{i=1}^{n} [K_i] \tag{3.17}$$

di mana; $[K_s]$: matrix kekakuan struktur global

$[K_i]$: matrix kekakuan elemen global

Analog dengan cara di atas, setiap vektor gaya pada titik nodal masing-masing elemen dapat dijumlahkan untuk membentuk vektor gaya total;

$$[F_s] = \sum_{i=1}^{n} [F_i] \tag{3.18}$$

di mana; $[F_s]$: vektor gaya pada sistem struktur global

$[F_i]$: vektor gaya elemen pada koordinat global

3.4. Perhitungan Tegangan pada Elemen Struktur *Plane Truss*

Untuk keperluan penghitungan tegangan pada elemen struktur *plane truss*, terlebih dahulu harus disusun sistem persamaan keseimbangan elemen pada sumbu lokal sebagai berikut :

$$\{f_i\} = [k_i]\{d_i\} \; ;$$

atau

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Tegangan aksial tarik yang terjadi pada elemen batang dapat dihitung dengan :

$$\sigma = \frac{f_{2x}}{A} \tag{3.20}$$

di mana f_{2x} merupakan gaya aksial yang bekerja pada nodal akhir suatu elemen, yang dapat dihitung dengan cara :

$$f_{2x} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x} \\ d_{2x}\end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

dengan menggabungkan Persamaan (3.20) dan (3.21) diperoleh :

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_{1x} \\ d_{2x}\end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

atau

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}[T]\{D\} \tag{3.23}$$

yang dapat disederhanakan dalam bentuk :

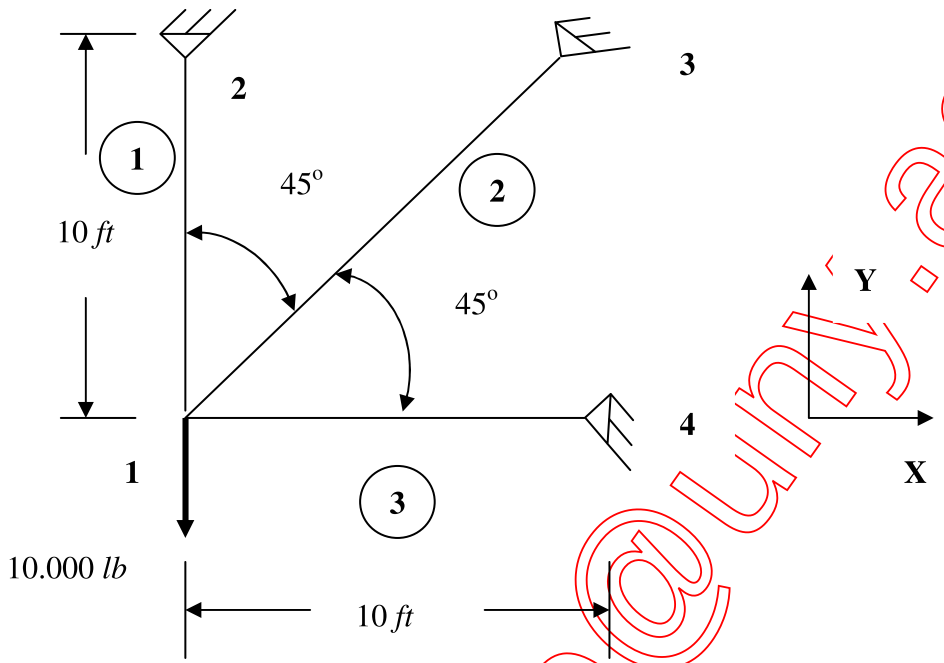
$$\{\sigma\} = [C']\{D\} \tag{3.24}$$

di mana;

$$[C'] = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S\end{bmatrix} \tag{3.25}$$

3.5. Contoh Penerapan

Contoh 3.1 : Suatu struktur *plane truss* tersusun dari tiga elemen batang, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.4, menerima beban searah gravitasi sebesar 10.000 *lb* tepat pada nodal **1**. Tentukan besarnya *displacement* ke arah **X** dan **Y** dan tegangan pada masing-masing elemen, jika diketahui nilai Elastisitas (E) = 3x10[6] *psi* dan luas tampang (A) = 2 *in*[2].



Gambar 3.4.

Penyelesaian :

Langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk matrix kekakuan elemen dalam orientasi sumbu global, sehingga perlu diketahui besaran sudut transformasi (α) dari sumbu global ke sumbu lokal masing-masing elemen, seperti ditunjukkan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Data Elemen Struktur pada Gambar 3.4.

Elemen	α^o	C	S	C^2	S^2	CS
1.	90^o	0	1	0	1	0
2.	45^o	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	½	½
3.	0^o	1	0	1	0	0

Matrix kekakuan untuk masing-masing elemen dalam orientasi sumbu global dapat dihitung dengan cara berikut :

Elemen **1** yang berawal dari nodal **1** menuju nodal **2**, menghasilkan :

$$[K_1] = \frac{(2)(30x10^6)}{120} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.26}$$

Elemen **2** yang berawal dari nodal **1** menuju nodal **3**, menghasilkan :

$$[K_2] = \frac{(2)(30x10^6)}{120\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{3x} & D_{3y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.27}$$

Elemen **3** yang berawal dari nodal **1** menuju nodal **4**, menghasilkan :

$$[K_3] = \frac{(2)(30x10^6)}{120} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{4x} & D_{4y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.28}$$

Selanjutnya ketiga matrix kekakuan elemen dalam sumbu global tersebut digunakan untuk menyusun matrix kekakuan struktur total, dalam kasus ini karena struktur yang dihitung terdiri dari empat titik nodal dan masing-masing nodal mempunyai dua derajat kebebasan pergerakan (*d.o.f*), maka matrix kekakuan struktur yang terbentuk nantinya akan berukuran 8 x 8.

Pembentukan matrix kekakuan struktur total ($\underline{K_s}$) dapat dilakukan dengan cara menambahkan bagian-bagian matrix kekakuan elemen global ($\underline{K_i}$) ke dalam matrix kekakuan struktur total sesuai dengan lokasi baris dan kolomnya, sehingga diperoleh :

$$[K_s]=\frac{(2)(30x10^6)}{120}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} & D_{3x} & D_{3y} & D_{4x} & D_{4y}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0 & -0{,}354 & -0{,}354 & -1 & 0\\ 0{,}354 & 1{,}354 & 0 & -1 & -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{3.29}$$

atau

$$[K_s]=(500.000)\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} & D_{3x} & D_{3y} & D_{4x} & D_{4y}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0 & -0{,}354 & -0{,}354 & -1 & 0\\ 0{,}354 & 1{,}354 & 0 & -1 & -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Matrix kekakuan struktur global pada Persamaan (3.29), selanjutnya dihubungkan dengan vektor gaya dan displacement dalam sumbu global, sehingga diperoleh sistem persamaan kekakuan struktur total :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x}\\ F_{1y}\\ F_{2x}\\ F_{2y}\\ F_{3x}\\ F_{3y}\\ F_{4x}\\ F_{4y}\end{Bmatrix}=(500.000)\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} & D_{3x} & D_{3y} & D_{4x} & D_{4y}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0 & -0{,}354 & -0{,}354 & -1 & 0\\ 0{,}354 & 1{,}354 & 0 & -1 & -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -0{,}354 & -0{,}354 & 0 & 0 & 0{,}354 & 0{,}354 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{Bmatrix} D_{1x}\\ D_{1y}\\ D_{2x}\\ D_{2y}\\ D_{3x}\\ D_{3y}\\ D_{4x}\\ D_{4y}\end{Bmatrix} \tag{3.30}$$

Sistem Persamaan di atas selanjutnya direduksi sesuai dengan kondisi batas (tumpuan) yang ada dalam sistem struktur. Karena pada nodal nomor **2, 3** dan **4** merupakan tumpuan sendi, maka hanya dimungkinkan terjadinya pergerakan pada nodal **1** ke arah **X** dan **Y** (D_{1x} dan D_{1y}). Selanjutnya dapat dibentuk sistem persamaan kekakuan struktur yang telah direduksi :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10.000 \end{Bmatrix} = (500.000)\begin{bmatrix} 1{,}354 & 0{,}354 \\ 0{,}354 & 1{,}354 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

Persamaan (3.31) dapat diselesaikan dengan metode inversi matrix :

$$\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}585x10^{-6} & -4{,}14x10^{-7} \\ -4{,}14x10^{-7} & 1{,}585x10^{-6} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10.000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}414x10^{-2}\,inchi \\ -1{,}59x10^{-2}\,inchi \end{Bmatrix}$$

Tanda minus (-) pada arah D_{1y} menunjukkan bahwa komponen *displacement* pada nodal **1** dalam arah **Y**, hasilnya berkebalikan dengan arah **Y** posistif, dengan kata lain perpindahan terjadi menuju ke bawah.

Perhitungan tegangan pada elemen batang dapat dilakukan dengan menggunakan Persamaan (3.23) dan memanfaatkan Tabel (3.1), sehingga untuk masing-masing elemen didapatkan :

Elemen 1 :

$$\sigma_1 = \frac{30x10^6}{120}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = 0{,}414x10^{-2} \\ D_{1y} = -1{,}59x10^{-2} \\ D_{2x} = 0 \\ D_{2y} = 0 \end{Bmatrix} = 3965 \quad psi$$

Elemen 2 :

$$\sigma_2 = \frac{30x10^6}{120\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = 0{,}414x10^{-2} \\ D_{1y} = -1{,}59x10^{-2} \\ D_{3x} = 0 \\ D_{3y} = 0 \end{Bmatrix} = 1471 \quad psi$$

Elemen 3 :

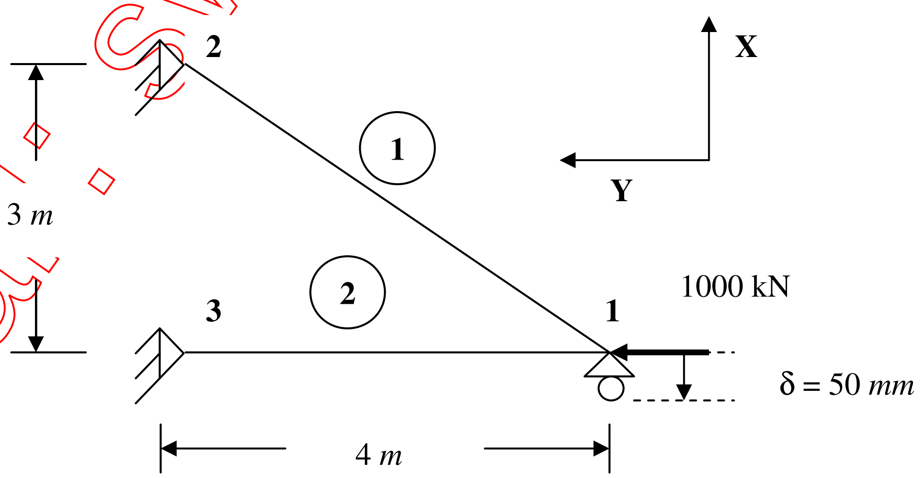
$$\sigma_3 = \frac{30x10^6}{120}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = 0{,}414x10^{-2} \\ D_{1y} = -1{,}59x10^{-2} \\ D_{4x} = 0 \\ D_{4y} = 0 \end{Bmatrix} = -1035 \quad psi$$

Kebenaran hasil perhitungan di atas dapat diperiksa dengan cara berikut :

$$\sum F_x = 0 \qquad (1471 \quad psi)(2 \quad in^2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (1035 \quad psi)(2 \quad in^2) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (3965 \quad psi)(2 \quad in^2) + (1471 \quad psi)(2 \quad in^2)\frac{\sqrt{2}}{2} - 10.000 = 0$$

Contoh 3.2 : Suatu struktur *plane truss* tersusun dari dua elemen batang, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.5, menerima beban horisontal sebesar 1000 *kN* tepat pada nodal **1**. Selain itu pada nodal **1** juga terjadi penurunan (*vertical settlement*) sebesar δ = 50 *mm*. Tentukan besarnya *displacement* nodal **1** ke arah sumbu **Y** dan gaya aksial pada masing-masing elemen, jika diketahui nilai Elastisitas (E) = 210 *GPa* dan luas tampang (A) = 6 cm^2.



Gambar 3.5

Penyelesaian :

Data Geometri Struktur

Tabel 3.2. Data Elemen Struktur pada Gambar 3.5.

Elemen	α^{o}	C	S	C^2	S^2	CS
1.	90^{o}	0	1	0	1	0
2.	53^{o}	0,60	0,80	0,36	0,64	0,48

Penyusunan Matrix Kekakuan Elemen Global ;

Elemen 1 :

$$[K_1] = \frac{(6x10^{-4}\,m^2)(210x10^6\,kN/m^2)}{5m} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} \end{array}$$

atau;

$$[K_1] = (25.200) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.32)$$

Elemen 2 :

$$[K_2] = \frac{(6x10^{-4}\,m^2)(210x10^6\,kN/m^2)}{4m} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_{1x} & D_{1y} & D_{3x} & D_{3y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

atau;

$$[K_2] = (25.200)\begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1x} & D_{1y} & D_{3x} & D_{3y} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,25 & 0 & 1,25 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.33}$$

Penyusunan <u>Matrix Kekakuan Struktur Global</u> :

$$[K_s] = (25.200)\begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} & D_{3x} & D_{3y} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 1,89 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1,25 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 & 0 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,25 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.34}$$

Penyusunan <u>Sistem Persamaan Kekakuan Struktur Total</u> :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = (25.200)\begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1x} & D_{1y} & D_{2x} & D_{2y} & D_{3x} & D_{3y} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 1,89 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1,25 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 & 0 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,25 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ D_{3x} \\ D_{3y} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

Penyusunan <u>Sistem Persamaan Kekakuan Struktur yang Telah Direduksi</u> :

Kasus di atas memiliki kondisi batas (*boundary conditions*) sebagai berikut;

$D_{1x} = \delta$; $D_{2x} = 0$; $D_{2y} = 0$; $D_{3x} = 0$; $D_{3y} = 0$

Sehingga diperoleh Persamaan :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = (25.200)\begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,48 & 1,89 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = \delta = -0,05m \\ D_{1y} \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

$$P = 25.200(0,48\delta + 1,89D_{1y})$$

$$1000 = (-604,8) + 47628D_{1y}$$

$$D_{1y} = \frac{(1000 + 604{,}8)}{47628} = 0{,}0337 \quad m$$

Penghitungan Gaya Aksial masing-masing elemen;

Elemen *1* :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix}$$

atau

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = (25.200)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}80 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = -0{,}05 \\ D_{1y} = 0{,}0337 \\ D_{2x} = 0 \\ D_{2y} = 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.37)$$

maka diperoleh :

f_{1x} = -76,6 kN dan f_{1y} = 76,6 kN

atau pada elemen *1* menerima gaya aksial tarik sebesar *76,6 kN*.

Elemen *2* :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = (31.500)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{1x} = -0{,}05 \\ D_{1y} = 0{,}0337 \\ D_{3x} = 0 \\ D_{3y} = 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.38)$$

maka diperoleh :

f_{1x} = 1061 kN dan f_{1y} = -1061 kN

atau pada elemen *1* menerima gaya aksial tekan sebesar *1061 kN*.