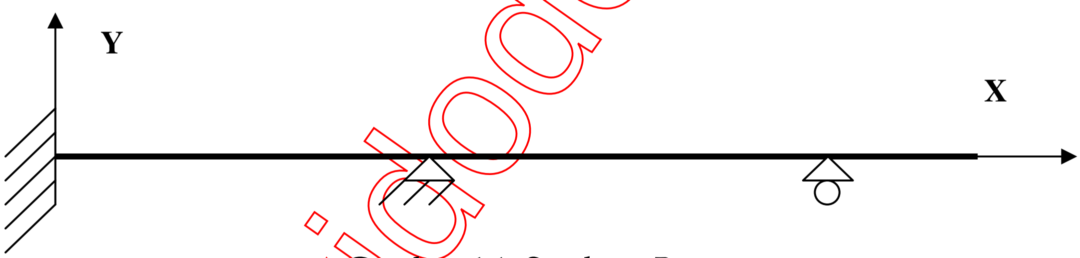
BAB 4

ANALISIS STRUKTUR BALOK

4.1. Kekakuan Balok (*Beam*)

Struktur *beam* merupakan suatu sistem struktur yang merupakan gabungan dari sejumlah elemen (batang) yang lurus ($\alpha = 0$) di mana pada setiap titik simpulnya dianggap berperilaku sebagai jepit dan setiap elemennya dapat menerima gaya berupa gaya aksial, geser dan momen lentur. Pembahasan dalam bab ini hanya dipelajari struktur balok yang tidak menerima pengaruh (beban) aksial.



Gambar 4.1. Struktur *Beam*

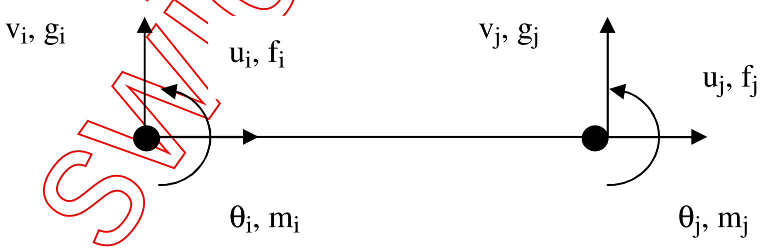
Sumbu **X-Y** adalah sistem koordinat global struktur, yang nantinya diacu semua elemen. Sedangkan sumbu **Z** tegak lurus terhadap bidang gambar (mengarah pembaca) mengikuti kaidah tangan kanan, sehingga terbentuk sistem koordinat yang mengikuti *right-handed rule*. Sumbu *x-y* merupakan sistem koordinat lokal elemen, yang hanya berlaku untuk satu elemen tertentu saja, yang orientasinya disesuaikan dengan arah elemen yang bersangkutan.

Setiap elemen balok selalu memiliki dua nodal (titik simpul) ujung. Ujung awal elemen diberi notasi nodal *i* sedangkan ujung lainnya diberi notasi *j*. Pusat sumbu lokal elemen adalah nodal *i* , dan arah sumbu *x* lokal positif selalu dibuat dari nodal *i* ke nodal *j* dari elemen tersebut. Sumbu *y* lokal dibuat tegak lurus sumbu *x*, sedangkan sumbu lokal arah *z* dibuat searah dengan sumbu **Z** global dan tegak lurus terhadap bidang struktur (bidang **X-Y**).

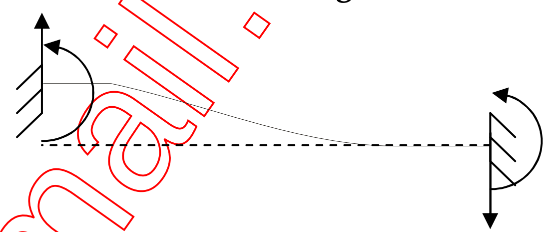
Orientasi elemen secara global dapat dikenali berdasarkan sudut α, yang dibuat oleh sumbu *x* lokal dari elemen yang ditinjau dengan sumbu **X** global dari struktur. Sudut α diberi tanda positif berdasarkan kaidah tangan kanan (*right-handed rule*), yaitu diukur dari sumbu **X** global berputar menuju sumbu *x* lokal dengan poros sumbu **Z** positif. Selanjutnya karena semua elemen tersusun segaris (lurus), seperti terlihat pada gambar 4.1, maka sudut transformasi (α) akan bernilai nol.

Hubungan antara aksi dan deformasi pada elemen balok secara umum dapat diformulasikan dengan orientasi sumbu lokalnya sebagai berikut :

Konvensi Arah Tanda Positif

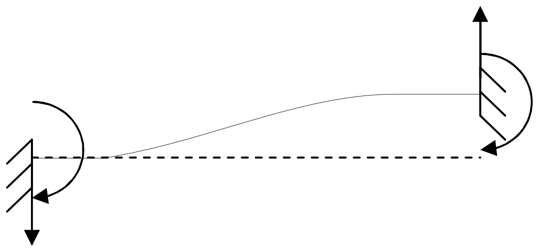


Transalasi Melintang (satu satuan)



$$m_i = m_j = \frac{6EI}{L^2}$$

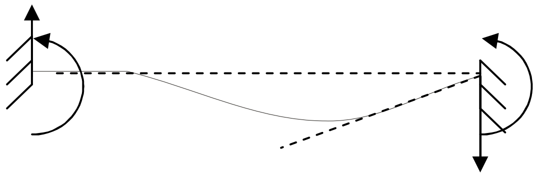
$$g_i = -g_j = \frac{12EI}{L^3}$$



$$m_i = m_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

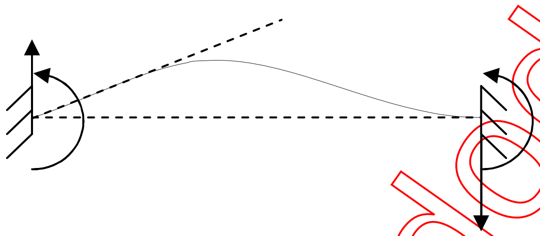
$$g_i = -g_j = -\frac{12EI}{L^3}$$

Rotasi Akibat Lentur (satu satuan)



$$m_i = \frac{2EI}{L} \;;\quad m_j = \frac{4EI}{L}$$

$$g_i = -g_j = \frac{6EI}{L^2}$$



$$m_i = \frac{4EI}{L} \;;\quad m_j = \frac{2EI}{L}$$

$$g_i = -g_j = \frac{6EI}{L^2}$$

Gambar 4.2. Hubungan Aksi-Deformasi pada Elemen *Beam*

Persamaan hubungan antara aksi dan deformasi elemen balok dalam sistem koordinat lokal yang diperoleh berdasarkan prinsip superposisi dapat diuraikan sebagai berikut :

$$g_i = \left(\frac{12EI}{L^3}\right).v_i + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_i + \left(-\frac{12EI}{L^3}\right).v_j + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_j$$

$$m_i = \left(\frac{6EI}{L^2}\right).v_i + \left(\frac{4EI}{L}\right).\theta_i + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).v_j + \left(\frac{2EI}{L}\right).\theta_j$$

$$g_j = \left(-\frac{12EI}{L^3}\right).v_i + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_i + \left(\frac{12EI}{L^3}\right).v_j + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_j$$

$$m_j = \left(\frac{6EI}{L^2}\right).v_i + \left(\frac{2EI}{L}\right).\theta_i + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).v_j + \left(\frac{4EI}{L}\right).\theta_j \qquad (4.1)$$

di mana :

x : sumbu batang

x, y : sistem koordinat lokal (elemen)

v_i : *displacement* arah tegak lurus sumbu batang pada nodal i

θ_i : rotasi pada titik nodal i

g_i : gaya tegak lurus sumbu batang pada titik nodal i yang sesuai dengan v_i

m_i : momen lentur pada titik nodal i yang selaras dengan θ_i

Persamaan hubungan aksi-deformasi yang ditunjukkan Persamaan (4.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matrix :

$$\begin{Bmatrix} g_i \\ m_i \\ g_j \\ m_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

sehingga diperoleh <u>matrix kekakuan elemen lokal</u> sebagai berikut :

$$[k_i] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} . \qquad (4.3)$$

4.2. Beban Sepanjang Elemen balok (*Element Loads*)

Analisis struktur dengan metode matrix kekakuan mensyaratkan bahwa beban yang bekerja harus berada tepat di titik simpul, sehingga dapat disusun sistem persamaan kekakuan struktur. Dalam kenyataannya, struktur balok maupun portal pada umumnya juga menerima beban yang bekerja di sepanjang bentang elemen struktur (*element load*). Agar dapat dibentuk persamaan kekakuan struktur, maka beban-beban yang berupa *element load* harus dipindahkan menjadi beban setara yang bekerja di dua nodal dalam elemen yang bersangkutan. Beban setara pada dua titik nodal akibat adanya beban yang bekerja di sepanjang bentang elemen disebut sebagai *equivalent joint load*, di mana kasus yang sering dijumpai berikut cara perhitungannya disajikan pada Tabel 4.1.

Apabila semua komponen *equivalent joint load* yang dibutuhkan telah terhitung, maka sekarang semua beban telah terletak di titik nodal dalam sistem struktur, selanjutnya dapat dibentuk <u>sistem persamaan kekakuan struktur total dalam orientasi sumbu global</u> sebagai berikut :

$$\{F\}=[K_s]\{D\}-\{F_0\} \qquad (4.4)$$

di mana; $\{F_0\}$: vektor beban berupa *equivalent joint load*.

$\{F_{0i}\}=[T]^T\{f_{0i}\}$

$\{F\}$: vektor beban yang berupa *nodal load*.

$[K_s]$: Matrix Kekakuan Struktur Total.

$\{D\}$: vektor *displacement* sumbu global.

selanjutnya <u>sistem persamaan kekakuan elemen struktur dalam orientasi sumbu lokal</u> dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\{f_i\}=[k_i]\{d_i\}-\{f_{0i}\} \qquad (4.5)$$

atau

$$\{f_i\}=[T_i][K_i]\{D_i\}-[T_i]\{F_{0i}\}$$

di mana; $\{f_i\}$: gaya dalam elemen (sumbu lokal).

$\{f_{0i}\}$: vektor beban yang berupa *equivalent joint load* (sumbu lokal).

$[k_i]$: matrix kekakuan elemen lokal.

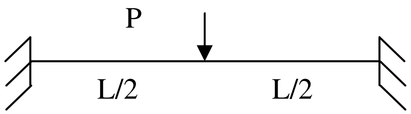
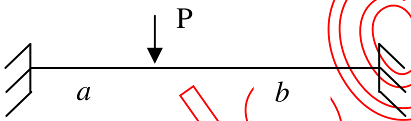
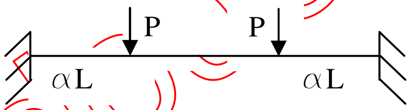
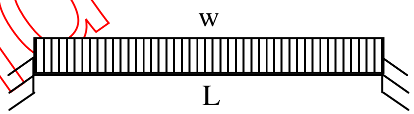
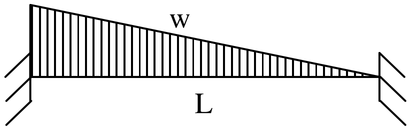
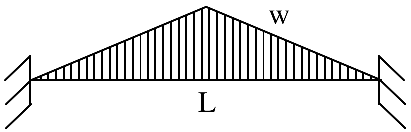
$\{d_i\}$: vektor *displacement* elemen sumbu lokal.

$[K_i]$: matrix kekakuan elemen global.

$[D_i]$: vektor *displacement* elemen sumbu global.

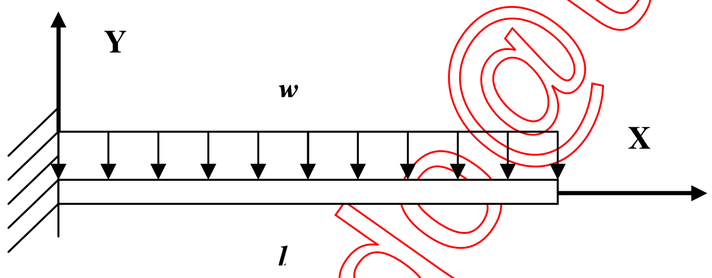
$[T_i]$: matrix transformasi elemen.

Tabel 4.1. Beban Titik Ekuivalen

No.	f_{1y}	m_1	Kasus Pembebanan	f_{2y}	m_2
1.	$\frac{-P}{2}$	$\frac{-PL}{8}$		$\frac{-P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
2.	$\frac{-Pb^2(L+2a)}{L^3}$	$\frac{-Pab^2}{L^2}$		$\frac{-Pa^2(L+2b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
3.	$-P$	$-\alpha\ (1-\alpha)PL$		$-P$	$\alpha\ (1-\alpha)PL$
4.	$\frac{-w.L}{2}$	$\frac{-wL^2}{12}$		$\frac{-w.L}{2}$	$\frac{wL^2}{12}$
5.	$\frac{-7wL}{20}$	$\frac{-wL^2}{20}$		$\frac{-3wL}{20}$	$\frac{wL^2}{30}$
6.	$\frac{-wL}{4}$	$\frac{-5wL^2}{96}$		$\frac{-wL}{4}$	$\frac{5wL^2}{96}$

4.3. Contoh Penerapan

Contoh 4.1 : Suatu struktur balok kantilever sepanjang l = 10 *ft* seperti ditunjukkan pada Gambar 4.3, menerima beban merata searah gravitasi sebesar w = 1800 *lb/ft* di sepanjang batang. Tentukan besarnya *displacement* ke arah **X** dan **Y** serta besarnya gaya dalam pada masing-masing nodal, jika diketahui nilai Elastisitas (E) = 3x10^7 *psi* dan inersia tampang (I) = 200 *in*^{4}.



Dalam kasus ini hanya terdapat satu elemen balok, sehingga matrix kekakuan struktur global dapat disusun sebagai berikut :

$$[K_s] = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1y} & \theta_1 & D_{2y} & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (4.6)$$

mengingat nodal **1** merupakan tumpuan jepit, maka kondisi batas (*boundary conditions*) yang dapat diterapkan dalam kasus ini adalah :

$D_{1X} = 0$ dan $\theta_1 = 0$

sehingga diperoleh <u>sistem persamaan kekakuan struktur yang telah direduksi</u> dalam bentuk sebagai berikut :

$$\{F\}+\{F\}_0=[K_s]\{D\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_z \end{Bmatrix}_0=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

di mana $\{F\}_0$ merupakan vektor *equivalent joint load*

Persamaan di atas dapat diselesaikan untuk memperoleh besaran D_{2X} dan θ_2 sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} D_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{12L^2}\cdot\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L \\ 6L & 12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{-wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

atau;

$$\begin{Bmatrix} D_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{-wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{Bmatrix} D_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{-wL^4}{8EI} \\ \dfrac{-wL^3}{6EI} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{-(1800/12)(10x12)^4}{8x3x10^7x200} \\ \dfrac{-(1800/12)(10x12)^3}{6x3x10^7x200} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0{,}648 & inchi \\ -0{,}0072 & rad \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

Gaya dalam pada setiap titik nodal dapat dihitung menurut persamaan berikut :

$$\{F\}=[K_s]\{D\}-\{F\}_0$$

atau;

$$\left\{\begin{matrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix}\right\} = \frac{EI}{L} \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1y} & \vartheta_1 & D_{2y} & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-wL^4}{8EI} \\ \dfrac{-wL^3}{6EI} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix}\right\}_0 \tag{4.10}$$

$$\left\{\begin{matrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{wL}{2} \\ \dfrac{5wL^2}{12} \\ \dfrac{-wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \dfrac{-wL}{2} \\ \dfrac{-wL^2}{12} \\ \dfrac{-wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} wL \\ \dfrac{wL^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (1800/12)x(10x12) \\ \dfrac{(1800/12)x(10x12)^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \tag{4.11}$$

$$\left\{\begin{matrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 18000 \ lb \\ 1080000 \ lb.in \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \tag{4.12}$$

di mana F_{1y} dan M_1 merupakan reaksi pada tumpuan jepit di nodal **1**.