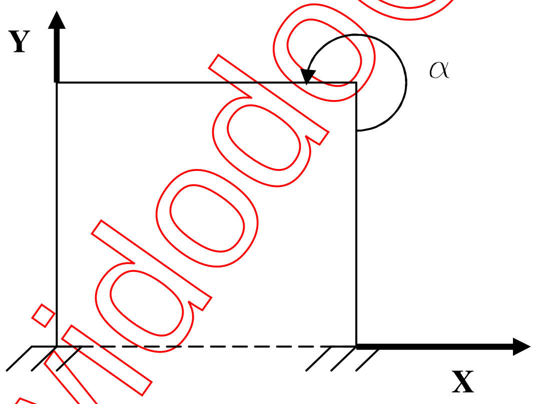
BAB 5

ANALISIS STRUKTUR PORTAL BIDANG

5.1. Kekakuan Portal Bidang (*Plane Frame*)

Struktur *plane frame* merupakan suatu sistem struktur yang merupakan gabungan dari sejumlah elemen (batang) di mana pada setiap titik simpulnya dianggap berperilaku sebagai jepit dan setiap elemennya hanya dapat menerima gaya berupa gaya aksial, gaya geser dan momen lentur.



Gambar 5.1. Struktur *Plane Frame*

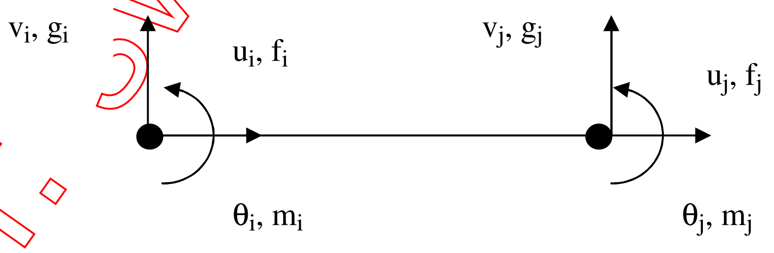
Sumbu **X-Y** adalah sistem koordinat global struktur, yang nantinya diacu semua elemen. Sedangkan sumbu **Z** tegak lurus terhadap bidang gambar (mengarah pembaca) mengikuti kaidah tangan kanan, sehingga terbentuk sistem koordinat yang mengikuti *right-handed rule*. Sumbu *x-y* merupakan sistem koordinat lokal elemen, yang hanya berlaku untuk satu elemen tertentu saja, yang orientasinya disesuaikan dengan arah elemen yang bersangkutan.

Setiap elemen *plane frame* selalu memiliki dua nodal (titik simpul) ujung. Ujung awal elemen diberi notasi nodal *i* sedangkan ujung lainnya diberi notasi *j*. Pusat sumbu lokal elemen adalah nodal *i* , dan arah sumbu *x* lokal positif selalu dibuat dari nodal *i* ke nodal *j* dari elemen tersebut. Sumbu *y* lokal dibuat tegak lurus sumbu *x*, sedangkan sumbu lokal arah *z* dibuat searah dengan sumbu **Z** global dan tegak lurus terhadap bidang struktur (bidang **X-Y**).

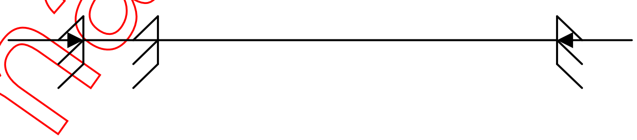
Orientasi elemen secara global dapat dikenali berdasarkan sudut α, yang dibuat oleh sumbu *x* lokal dari elemen yang ditinjau dengan sumbu **X** global dari struktur. Sudut α diberi tanda positif berdasarkan kaidah tangan kanan (*right-handed rule*), yaitu diukur dari sumbu **X** global berputar menuju sumbu *x* lokal dengan poros sumbu **Z** positif, sehingga pada gambar 5.1 sudut α akan bernilai positif jika perputaran berlawanan dengan arah putaran jarum jam.

Hubungan antara aksi dan deformasi pada elemen *plane frame* secara umum dapat diformulasikan dengan orientasi sumbu lokalnya sebagai berikut :

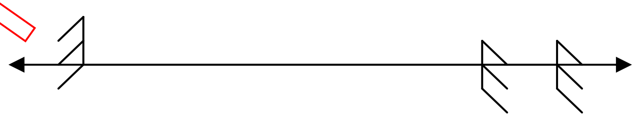
Konvensi Arah Tanda Positif



Translasi Arah Aksial (satu satuan)

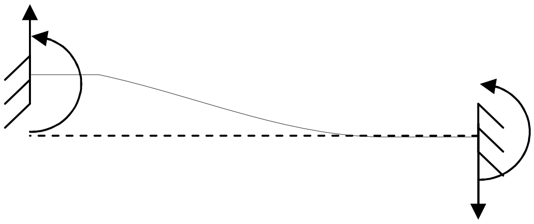


$$f_i = -f_j = \frac{AE}{L}$$



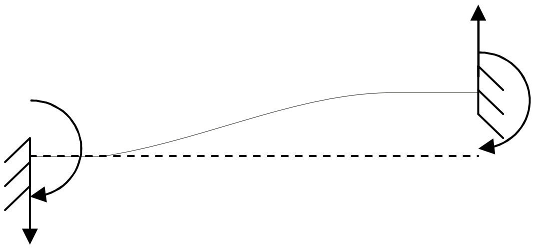
$$f_i = -f_j = -\frac{AE}{L}$$

Transalasi Melintang (satu satuan)



$$m_i = m_j = \frac{6EI}{L^2}$$

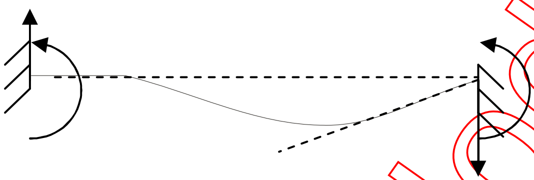
$$g_i = -g_j = \frac{12EI}{L^3}$$



$$m_i = m_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

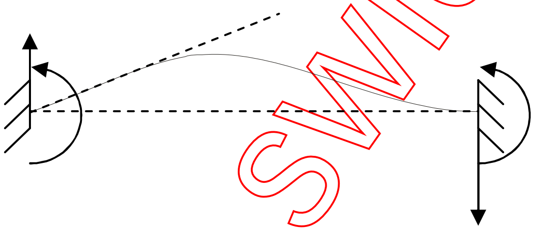
$$g_i = -g_j = -\frac{12EI}{L^3}$$

Rotasi Akibat Lentur (satu satuan)



$$m_i = \frac{2EI}{L} \quad ; \quad m_j = \frac{4EI}{L}$$

$$g_i = -g_j = \frac{6EI}{L^2}$$



$$m_i = \frac{4EI}{L} \quad ; \quad m_j = \frac{2EI}{L}$$

$$g_i = -g_j = \frac{6EI}{L^2}$$

Gambar 5.2. Hubungan Aksi-Deformasi pada Elemen *Plane Frame*

Persamaan hubungan antara aksi dan deformasi elemen portal bidang dalam sistem koordinat lokal yang diperoleh berdasarkan prinsip superposisi dapat diuraikan sebagai berikut :

$$f_i = \left(\frac{AE}{L}\right).u_1 + 0.v_i + 0.\theta_i + \left(-\frac{AE}{L}\right).u_j + 0.v_j + 0.\theta_j$$

$$g_i = 0.u_1 + \left(\frac{12EI}{L^3}\right).v_i + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_i + 0.u_j + \left(-\frac{12EI}{L^3}\right).v_j + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_j$$

$$m_i = 0.u_1 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).v_i + \left(\frac{4EI}{L}\right).\theta_i + 0.u_j + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).v_j + \left(\frac{2EI}{L}\right).\theta_j$$

$$f_j = \left(-\frac{AE}{L}\right).u_1 + 0.v_i + 0.\theta_i + \left(\frac{AE}{L}\right).u_j + 0.v_j + 0.\theta_j$$

$$g_j = 0.u_1 + \left(-\frac{12EI}{L^3}\right).v_i + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_i + 0.u_j + \left(\frac{12EI}{L^3}\right).v_j + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).\theta_j$$

$$m_j = 0.u_1 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right).v_i + \left(\frac{4EI}{L}\right).\theta_i + 0.u_j + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right).v_j + \left(\frac{2EI}{L}\right).\theta_j \qquad (5.1)$$

di mana :

x : sumbu batang

x, y : sistem koordinat lokal (elemen)

u_i : *displacement* aksial pada titik nodal i

v_i : *displacement* arah tegak lurus sumbu batang pada nodal i

θ_i : rotasi pada titik nodal i

f_i : gaya aksial pada titik nodal i yang sesuai dengan u_i

g_i : gaya tegak lurus sumbu batang pada titik nodal i yang sesuai dengan v_i

m_i : momen lentur pada titik nodal i yang selaras dengan θ_i

Persamaan hubungan aksi-deformasi yang ditunjukkan Persamaan (5.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matrix :

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ g_i \\ m_i \\ f_j \\ g_j \\ m_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \qquad (5.2)$$

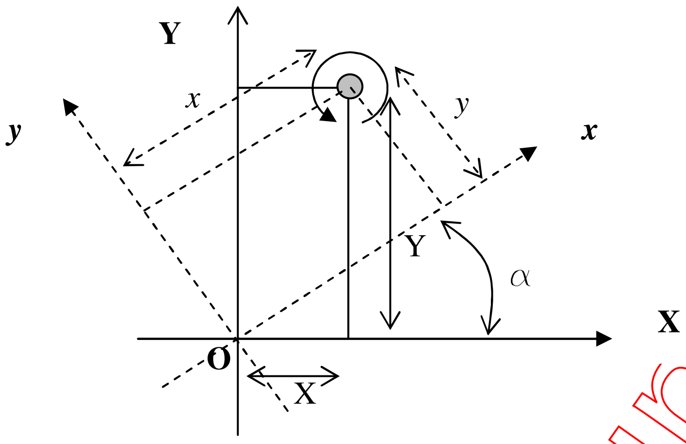
sehingga diperoleh matrix kekakuan elemen lokal sebagai berikut :

$$[k_i] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

5.2. Transformasi Sumbu

Dalam analisis struktur yang dilakukan pada kebanyakan kasus, perlu dilakukan penyesuaian antara matrix kekakuan elemen struktur lokal (yang mengacu sumbu lokal secara individual) ke dalam matrix kekakuan elemen struktur global (mengacu pada sistem struktur global yang dianut semua elemen struktur.

Penyesuaian tersebut dapat dilakukan dengan memandang titik nodal awal *i* dan nodal akhir *j* dalam bidang **X**-Y (global) dari elemen mengalami perpindahan ke nodal *i'* dan *j'* dalam bidang *x*-*y* (lokal), sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Transformasi Sumbu Kartesian

Berdasarkan Gambar 5.3 ditunjukkan perputaran sumbu Kartesian dari sumbu global **X-Y** menuju sumbu lokal *x-y* dengan kemiringan sudut α, sehingga dapat diperoleh Persamaan Transformasi Sumbu yang menunjukkan perubahan posisi suatu titik nodal dalam bentuk berikut :

$$x = \mathrm{X}.\cos\alpha + Y.\sin\alpha \qquad (5.4.a.)$$

$$y = -X.\sin\alpha + Y.\cos\alpha \qquad (5.4.b.)$$

$$\theta_z = \theta_Z \qquad (5.4.c.)$$

Persamaan di atas jika diubah dalam bentuk matrix, dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \qquad (5.5)$$

Analog dengan cara di atas, transformasi koordinat untuk suatu elemen struktur yang dibatasi oleh dua buah titk nodal (*i* dan *j*) dapat ditunjukkan dengan persamaan berikut :

$$x_i = X_i.Cos\alpha + Y_i.Sin\alpha$$

$$y_i = -X_i.Sin\alpha + Y_i.Cos\alpha$$

$$\theta_{zi} = \theta_{Zi}$$

$$xj = X_j.Cos\alpha + Y_j.Sin\alpha$$

$$y_j = -X_j.Sin\alpha + Y_j.Cos\alpha$$

$$\theta_{zj} = \theta_{Zj} \tag{5.6.}$$

Atau dalam bentuk matrix dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_{zi} \\ x_j \\ y_j \\ \theta_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ \theta_{Zi} \\ X_j \\ Y_j \\ \theta_{Zj} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

sehingga diperoleh <u>Matrix Transformasi</u> [T_i], untuk elemen portal adalah :

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

selanjutnya <u>Matrix Kekakuan Elemen Global</u> dapat disusun dengan persamaan berikut :

$$[K_i] \quad = [T_i]^T [k_i][T_i] \tag{5.9}$$

di mana; $[K_i]$: matrix kekakuan elemen dalam sistem koordinat global.

$[T_i]$: matrix transformasi elemen

$[k_i]$: matrix kekakuan elemen dalam sistem koordinat lokal.

atau;

$$[K_i]=\frac{E}{L}\ X$$

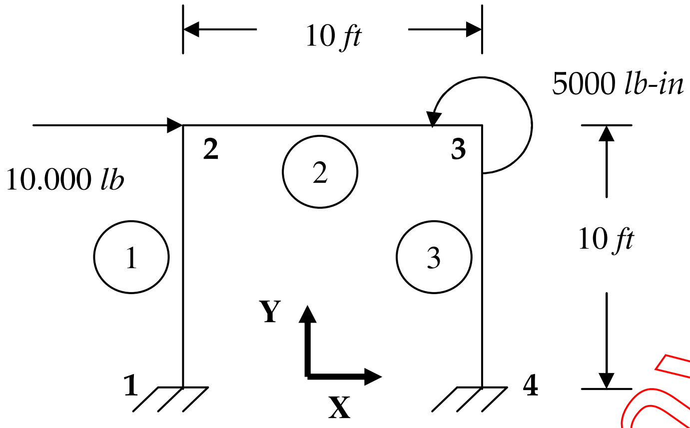
$$\begin{bmatrix} AC^2+\frac{12I}{L^2}S^2 & \left(A-\frac{12I}{L^2}\right)CS & -\frac{6I}{L}S & -\left(AC^2+\frac{12I}{L^2}S^2\right) & -\left(A-\frac{12I}{L^2}\right)CS & -\frac{6I}{L}S \\ & AS^2+\frac{12I}{L^2}C^2 & \frac{6I}{L}C & -\left(A-\frac{12I}{L^2}\right)CS & -\left(AS^2+\frac{12I}{L^2}C^2\right) & \frac{6I}{L}C \\ & & 4I & \frac{6I}{L}S & -\frac{6I}{L}C & 2I \\ & & & AC^2+\frac{12I}{L^2}S^2 & \left(A-\frac{12I}{L^2}\right)CS & \frac{6I}{L}S \\ & & & & AS^2+\frac{12I}{L^2}C^2 & -\frac{6I}{L}C \\ & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

di mana; s : $\sin\ \alpha$

c : $\cos\ \alpha$

5.3. Contoh Penerapan

Contoh 5.1 : Suatu struktur portal bidang dengan perletakan jepit pada nodal 1 dan 4 seperti ditunjukkan pada Gambar 5.4, menerima beban horisontal positif sebesar 10.000 *lb* di nodal **2** dan momen positif sebesar 5000 *lb.in* di nodal **3**. Tentukan besarnya *displacement* ke arah **X** dan **Y** serta besarnya gaya dalam pada masing-masing elemen, jika diketahui nilai Elastisitas semua elemen (E) = 3x10^7 *psi*, luas penampang semua elemen (A) = 10 in^2 dan inersia tampang (I) = 200 in^4 untuk elemen **1** dan **3** serta I = 100 in^4 untuk elemen **2**.



Gambar 5.4. Struktur *Plane Frame*

Penyelesaian :

Dengan memanfaatkan Persamaan (5.10) dapat diperoleh matrix kekakuan elemen global sebagai berikut :

Elemen 1

Elemen **1** diasumsikan mengarah dari nodal **1** ke nodal **2**, dengan sudut transformasi α antara sumbu global **X** dan sumbu lokal *x* sebesar 90°
sehingga :

$$\cos \alpha = 0 \qquad \text{dan} \qquad \sin \alpha = 1$$

sedangkan :

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12(200)}{(10x12)^2} = 0{,}167$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6(200)}{(10x12)} = 10{,}0$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30x10^6}{(10x12)} = 250.000$$

maka dengan menggunakan Persamaan (5.10) diperoleh :

$$[K_1] = 250.000 \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1x} & D_{1y} & \theta_1 & D_{2x} & D_{2y} & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}167 & 0 & -10 & -0{,}167 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 800 & 10 & 0 & 400 \\ -0{,}167 & 0 & 10 & 0{,}167 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 400 & 10 & 0 & 800 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5.11)$$

Elemen **2** diasumsikan mengarah dari nodal **2** ke nodal **3**, dengan sudut transformasi α antara sumbu global **X** dan sumbu lokal x sebesar 0º sehingga :

$cos\ \alpha = 1$ dan $sin\ \alpha = 0$

sedangkan :

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12(100)}{(10x12)^2} = 0{,}0835$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6(100)}{(10x12)} = 5{,}0$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30x10^6}{(10x12)} = 250.000$$

maka dengan menggunakan Persamaan (5.10) diperoleh :

$$[K_2] = 250.000 \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{2x} & D_{2y} & \theta_2 & D_{3x} & D_{3y} & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0835 & 5 & 0 & 0{,}0835 & 5 \\ 0 & 5 & 400 & 0 & -5 & 200 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0835 & -5 & 0 & 0{,}0835 & -5 \\ 0 & 5 & 200 & 0 & -5 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5.12)$$

Elemen **3** diasumsikan mengarah dari nodal **3** ke nodal **4**, dengan sudut transformasi α antara sumbu global **X** dan sumbu lokal *x* sebesar 270^{o} sehingga :

$cos\ \alpha = 0$ dan $sin\ \alpha = -1$

sedangkan :

sedangkan :

$$\frac{12I}{L^2} = \frac{12(200)}{(10x12)^2} = 0{,}167$$

$$\frac{6I}{L} = \frac{6(200)}{(10x12)} = 10{,}0$$

$$\frac{E}{L} = \frac{30x10^6}{(10x12)} = 250.000$$

maka dengan menggunakan Persamaan (5.10) diperoleh :

$$[K_3] = 250.000 \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{3x} & D_{3y} & \theta_3 & D_{4x} & D_{4y} & \theta_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}167 & 0 & 10 & -0{,}167 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 800 & -10 & 0 & 400 \\ -0{,}167 & 0 & -10 & 0{,}167 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 400 & -10 & 0 & 800 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5.13)$$

Selanjutnya dengan melakukan superposisi Persamaan (5.11), (5.12) dan (5.13) dan dengan menerapkan kondisi batas (*boundary conditions*) $D_{1x} = 0$, $D_{1y} = 0$, $\theta_1 = 0$, $D_{4x} = 0$, $D_{4y} = 0$ *dan* $\theta_4 = 0$ maka dapat diperoleh sistem persamaan kekakuan struktur yang telah direduksi sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} 10.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5000 \end{Bmatrix} = 250.000 \begin{bmatrix} 10,167 & 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10,084 & 5 & 0 & 0,834 & 5 \\ 10 & 5 & 1200 & 0 & -5 & 200 \\ -10 & 0 & 0 & 10,167 & 0 & 10 \\ 0 & 0,084 & -5 & 0 & 10,084 & -5 \\ 0 & 5 & 200 & 10 & -5 & 1200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{2x} \\ D_{2y} \\ \theta_2 \\ D_{3x} \\ D_{3y} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.14)$$

Persamaan (5.14) di atas dapat diselesaikan dengan matode inversi matrix, sehingga diperoleh :

$$\begin{Bmatrix} D_{2x} \\ D_{2y} \\ \theta_2 \\ D_{3x} \\ D_{3y} \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,211 in \\ 0,00148 in \\ -0,00153 rad \\ 0,209 in \\ -0,00148 in \\ -0,00149 rad \end{Bmatrix} \qquad (5.15)$$

Untuk menghitung gaya dalam masing-masing elemen dapat digunakan Persamaan berikut :

$$\{f_i\} = [T_i][F_i]$$

atau;

$$\{f_i\} = [T_i][K_i][D_i] \qquad (5.16)$$

sehingga gaya dalam pada **elemen 1** diperoleh sebesar :

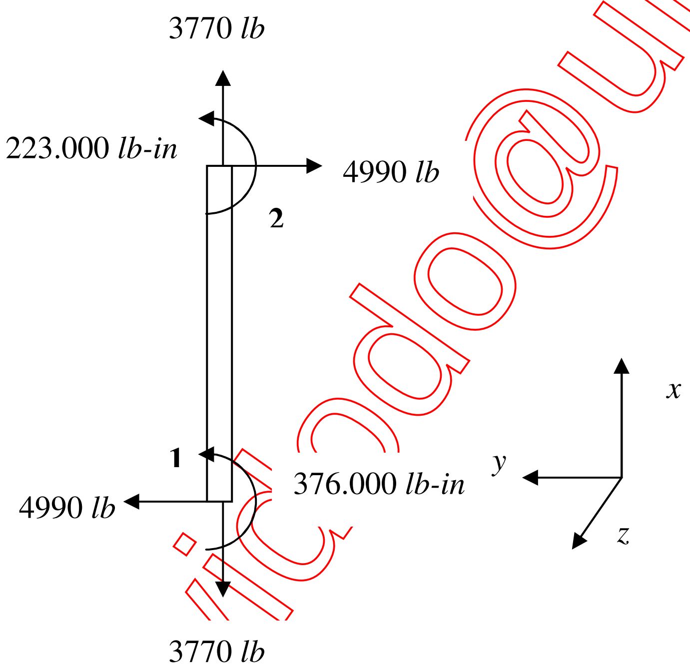
$$\{f_1\} = [T_1][K_1][D_1]$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 250.000 \begin{array}{c} \begin{matrix} D_{1x} & D_{1y} & \theta_1 & D_{2x} & D_{2y} & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,167 & 0 & -10 & -0,167 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 800 & 10 & 0 & 400 \\ -0,167 & 0 & 10 & 0,167 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 400 & 10 & 0 & 800 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,211 \\ 0,00148 \\ -0,00153 \end{Bmatrix}$$

$$(5.17)$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3700lb \\ 4990lb \\ 376.000lb-in \\ 3700lb \\ -4990lb \\ 223.000lb-in \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$



Analog dengan cara di atas maka dapat diperoleh :

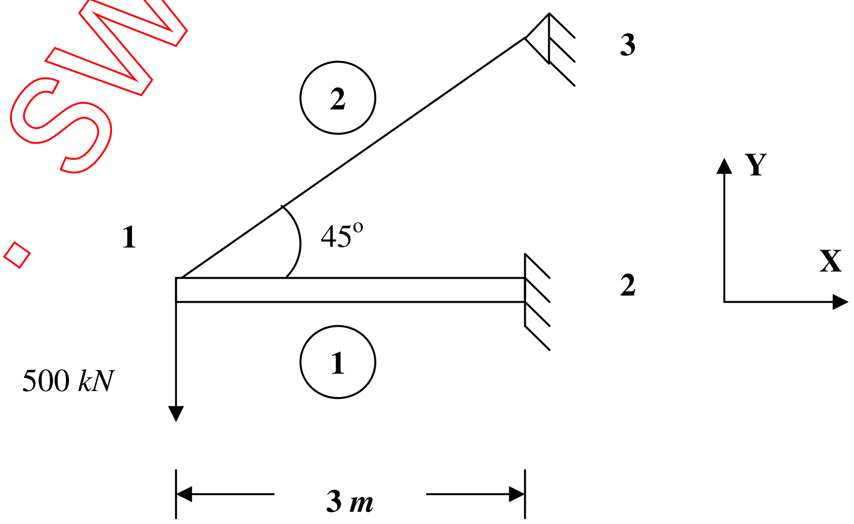
Gaya Dalam Elemen **2** :

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5010lb \\ -3700lb \\ -223.000lb-in \\ -5010lb \\ 3700lb \\ -221.000lb-in \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

Gaya Dalam Elemen **3** :

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3700 lb \\ 5010 lb \\ 226.000 lb-in \\ -3700 lb \\ -5010 lb \\ 375.000 lb-in \end{Bmatrix} \qquad (5.20)$$

Contoh 5.2 : Sebuah elemen batang nomor **2** digunakan untuk memperkaku elemen balok kantilever bernomor **1** seperti ditunjukkan pada Gambar 5.5. Hitung besarnya perpindahan nodal **1** dan gaya dalam masing-masing elemen, jika diketahui nilai Elastisitas semua elemen (E) = 210 GPa, luas penampang semua elemen **2** (A_2) = 1 x 10^{-3} m^2, luas tampang elemen balok **1** (A_1) = 2 x 10^{-3} m^2 dengan inersia tampang (I) = 5 x 10^{-5} m^4. Sudut antara elemen **1** dan **2** sebesar 45^o, dengan beban sebesar 500 kN searah gravitasi di titik nodal **1**.



Gambar 5.5 Balok Kantilever dengan Pengaku

Penyelesaian :

Mengingat nodal nomor **2** dan **3** merupakan tumpuan jepit dan sendi, maka hanya dibutuhkan matrix kekakuan di nodal **1** untuk dapat menghitung perpindahan yang terjadi pada sistem struktur tersebut.

Elemen **2** merupakan batang pengaku, sehingga hanya dapat menerima gaya aksial sebagaimana perilaku elemen *plane truss*, sehingga matrix kekakuan elemen global dapat dihitung menurut Persamaan (3.16), maka ;

$$[K_2]=\frac{(1x10^{-3})(210x10^{6})}{3\big/\cos 45^{o}}\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}$$

atau;

$$[K_2]=70x10^{3}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} D_{1x} & D_{1y} \end{array} \\ \begin{bmatrix}0{,}354 & 0{,}354\\ 0{,}354 & 0{,}354\end{bmatrix}\end{array} \qquad (5.21)$$

sedangkan matrix kekakuan elemen global untuk balok (dengan memperhitungkan pengaruh aksial) digunakan Persamaan (5.10) sehingga diperoleh :

$$[K_1]=70x10^{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D_{1x} & D_{1y} & \theta_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}067 & 0{,}10\\ 0 & 0{,}10 & 0{,}20\end{bmatrix}\end{array} \qquad (5.22)$$

di mana (E/L) x 10^{-3} merupakan skalar pada Persamaan (5.22)

Selanjutnya dapat dibentuk matrix kekakuan struktur global yang telah direduksi :

$$[K_s]=70x10^{3}\begin{bmatrix}2{,}354 & 0{,}354 & 0\\ 0{,}354 & 0{,}421 & 0{,}10\\ 0 & 0{,}10 & 0{,}20\end{bmatrix} \qquad (5.23)$$

sehingga dapat dibentuk sistem persamaan kekakuan struktur tereduksi sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \\ 0 \end{Bmatrix} = 70x10^3 \begin{bmatrix} 2,354 & 0,354 & 0 \\ 0,354 & 0,421 & 0,10 \\ 0 & 0,10 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

Penyelesaian Persamaan (5.24) menghasilkan :

$$\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00338m \\ -0,0225m \\ 0,0113rad \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

Persamaan umum yang dapat digunakan untuk menghitung gaya dalam setiap elemen adalah $f_i = k_i.d_i$. Untuk elemen batang (*truss*) gaya dalam elemen dapat dihitung dengan :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{3x} \\ D_{3y} \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

Triple product ketiga matrix di atas menghasilkan :

$$f_{1x} = \frac{AE}{L}\left(Cos\alpha.D_{1x} + Sin\alpha.D_{1y}\right) \tag{5.27}$$

untuk kasus ini;

$$f_{1x} = \frac{(1x10^{-3}m^2)(210x10^6 kN/m^2)}{4,24m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(0,00338) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-0,0225)\right)$$

maka diperoleh :

$$f_{1x} = -670 \quad kN$$

di mana tanda negatif menunjukkan arah yang berlawanan dengan sumbu *x*.

Analog dengan cara di atas maka dapat diperoleh :

$$f_{3x} = 670 \quad kN$$

Mengingat sumbu lokal dan global pada elemen balok memiliki arah yang sama (α = 0), maka pada elemen balok akan diperoleh $f = F$ dan $d = D$, maka :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ \theta_1 \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

sehingga untuk nodal **1** :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

atau;

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{Bmatrix} = 70x10^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}067 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}00338 \\ -0{,}0225 \\ 0{,}0113 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 473kN \\ -26{,}5kN \\ 0{,}0kN.m \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

Analog cara di atas untuk nodal **2** :

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = 70x10^3 \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}067 & -0{,}10 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}00338 \\ -0{,}0225 \\ 0{,}0113 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -473kN \\ 25{,}5kN \\ -78{,}3kN.m \end{Bmatrix} \tag{5.31}$$