BAB I
ANALISIS VEKTOR

A. Deskripsi

Materi ini akan membahas tentang pengertian, sifat, operasi dan manipulasi besaran fisik scalar dan vector. Pada pembahasan materi medan elektromagnetik berikutnya akan melibatkan perhitungan matematis yang melibatkan vector. Diharapkan dengan memahami vector akan memudahkan memahami gejala-gejala medan elektromagnetik dengan mudah.

B. Pengertian skalar dan vektor

Dalam mempelajari dasar-dasar fisika, terdapat beberapa macam kuantitas kelompok besaran yaitu Vektor dan Skalar.

- Skalar adalah besaran yang dicirikan sepenuhnya oleh besarnya (magnitude)

  Contoh : masssa, panjang, waktu, suhu, intensitas cahaya, energi, muatan listrik dsb.
- Vektor adalah besaran yang dicirikan oleh besar (magnitude) dan arah

  Contoh : berat, gaya, kecepatan, medan listrik, medan magnet, kuat medan listrik, percepatan gravitasi dsb.

C. Notasi dan aljabar vektor

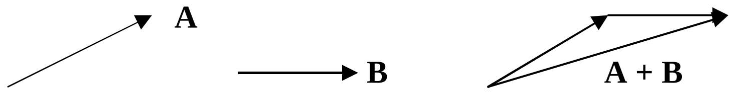
Besaran vektor dinotasikan dengan memakai simbol huruf tebal/huruf besar/huruf besar atau kecil yang di garis atasnya, sedangkan untuk vektor satuan (vektor dengan harga absolut/magnitude) dinyatakan dengan huruf kecil yang di tebalkan.

- Simbol vektor : **A** atau A atau $\overline{\mathrm{A}}$ atau $\overline{a}$
- Simbol vektor satuan : $\mathbf{a}_{A}$ atau **a atau** $\mathbf{a}_{\mathbf{x}}$

** note : permisalan vektor A

Secara grafis vector digambarkan dengan segmen garis berarah (anak panah). Panjang segmen garis (pada skala yang sesuai) menyatakan besar vector dan anak panah menunjukkan arah vector. Berikut ini merupakan contoh penggambaran vector A dan

B. Hasil penjumlahan Vektor A dan B atau A + B ditunjukkan dengan hokum jajaran genjang.



Gambar 1.

Penggambaran vector secara grafis

Vektor satuan dalam arah vektor **A** dapat ditentukan dengan membagi **A** dengan nilai absolutnya :

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{A}} = \frac{A}{|A|} \qquad \text{dimana } |A| = A = \sqrt{A_x . A_y}$$

Pada Aljabar vektor, ada beberapa peraturan baik itu pada penjumlahan, pengurangan maupun perkalian. Aturan operasi vektor direpresentasikan dalam hukum mataematis sebagai berikut :

- ❖ Hukum komutatif ➔ **A + B = B + A**
- ❖ Hukum asosiatif ➔ **A + (B+C) = (A+B) + C**
- ❖ Hukum asosiatif distributif (perkalian vektor dengan skalar)

  ➔ (r + s)(**A**+**B**) = r(**A**+**B**) + s(**A**+**B**) = r**A** + r**B** + s**A** + s**B**

Contoh soal :

1. Sebuah vektor **A =** (2ax + 3ay + az) dan **B =** (ax + ay - az).

   Hitunglah :

   a. **A + B**

   b. **A – B**

   Penyelesaian :

   A + B = (2 + 1)a_x + (3 + 1)a_y + (1 – 1)a_z = 3a_x + 4a_y

   A + B = (2 - 1)a_x+ (3 - 1)a_y+ (1+1)a_z = a_x + 2a_y + 2 a_z

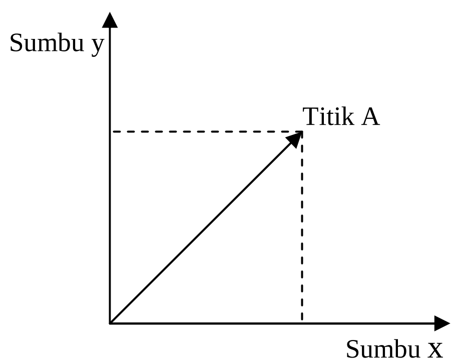
D. Sistem koordinat

Vektor adalah besaran yang ditentukan oleh besar dan arahnya. Dalam aplikasinya vector selalu menempati ruang. Untuk menjelaskan fenomena vector di dalam ruang dapat digunakan bantuan system koordinat untuk menjelaskan besar dan arah vector. Ada banyak sistem koordinat yang dikembangkan tetapi dalam materi ini hanya 3 koordinat yang akan dibahas.

1. Koordinat kartesian

Koordinat kartesian digunakan untuk menyatakan suatu benda yang memiliki bentuk siku seperti garis lurus, bidang datar siku dan ruang siku-siku. Bentuk-bentuk siku akan mudah digambarkan dalam koordinat kartesius baik 2 dimensi maupun 3 dimensi.

Dalam koordinat kartesius 2 dimensi terdiri dari 2 sumbu yaitu sumbu horizontal (mendatar) yaitu sumbu x dan sumbu tegak (vertical) yaitu sumbu y. untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut ini :



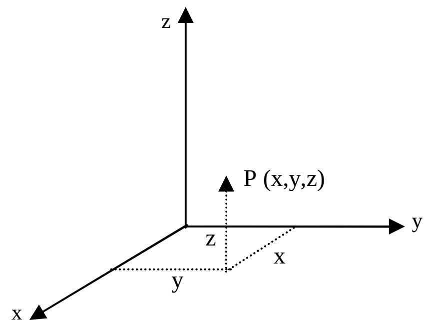
Gambar 2.

Koordinat kartesian 2 Dimensi

Koordinat kartesius 2 dimensi digunakan untuk menggambarkan objek 1 dimensi dan 2 dimensi. Contoh objek satu dimensi yaitu garis baik garis lurus maupun garis lengkung. Sedangkan contoh objek 2 dimensi yaitu bidang datar. Objek 1 dimensi dan 2 dimensi dapat digambarkan pada koordinat 3 dimensi dengan baik, sedangkan untuk objek 3 dimensi harus digambarkan pada koordinat 3 dimensi.

Koordinat Kartesius 3 Dimensi

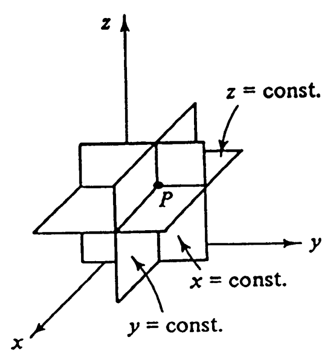
Koordinat kartesius 3 dimensi digunakan untuk menggambarkan suatu objek baik 1 dimensi, 2 dimensi maupun 3 dimensi. Koordinat kartesius 3 dimensi mempunyai 3 sumbu koordinat yaitu sumbu x, y, dan z. Untuk lebih jelasnya silahkan perhatikan gambar berikut :



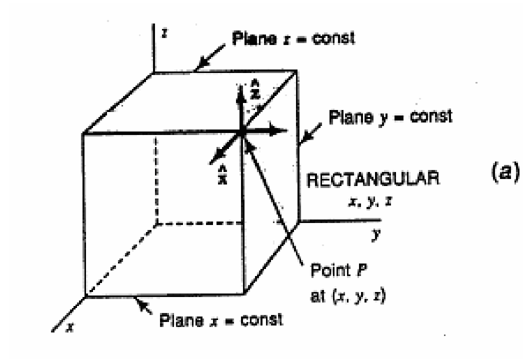
Gambar 3.

Koordinat kartesian 3 Dimensi

Sudut yang dibentuk antar sumbu koordinat adalah 90^0 atau dengan kata lain sumbu x tegak lurus dengan sumbu y dan sumbu z, demikian juga sumbu y tegak lurus dengan sumbu x dan z dan juga sumbu z tegak lurus dengan sumbu x dan sumbu y.



Gambar 4. koordinat kartesius 3 dimensi

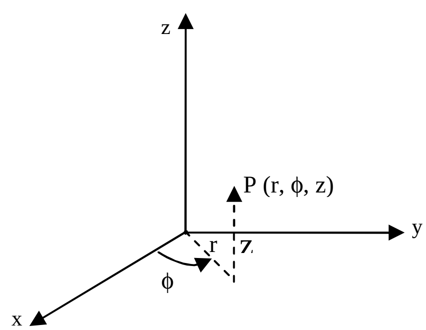


Gambar 5. vector dalam koordinat kartesius 3 dimensi

2. **Koordinat silindris**

   Tidak semua benda mempunyai bentuk siku-siku seperti balok, kubus, bujur sangkar, dan bentuk-bentuk siku lainnya. Benda-benda seperti tabung, botol, pipa, tampat sampah, kerucut memiliki bentuk lingkaran dengan simetri yang khas. Bentuk-bentuk seperti ini akan susah untuk digambarkan pada koordinat kartesius karena simetri lingkaran sulit untuk digambarkan.

   Atas dasar inilah muncullah ide untuk mengembangkan system koordinat untuk benda-benda seperti ini yaitu dengan membuat koordinat silinder. Koordinat silinder terdiri dari 3 sumbu koordinat yaitu koordinat r, ϕ, dan z.



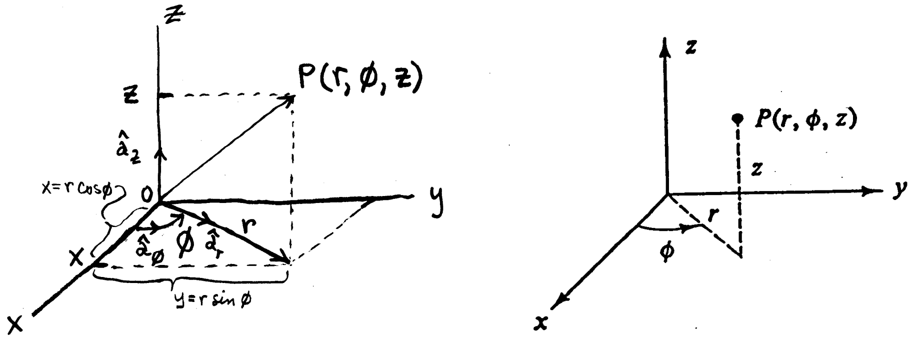
Gambar 6. Koordinat silindris

Tiga unit vector satuan kearah sumbu r, ϕ dan z adalah sebagai berikut :

- $a_r = r$ $a_\Phi = \Phi$ $a_z = z$
- $|a_r| = 1$ $|a_\Phi| = 1$ $|a_z| = 1$

Dengan operasi sebagai berikut :

- a_r x a_Φ = a_z $\qquad$ a_Φ x a_r = -a_z
- a_Φ x a_z = a_r $\qquad$ a_z x a_Φ = -a_r
- a_z x a_r = a_Φ $\qquad$ a_r x a_z = -a_Φ



Gambar 7. koordinat silinder

Konversi dari koordinat silinder ke koordinat kartesius adalah sbb :

$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z$

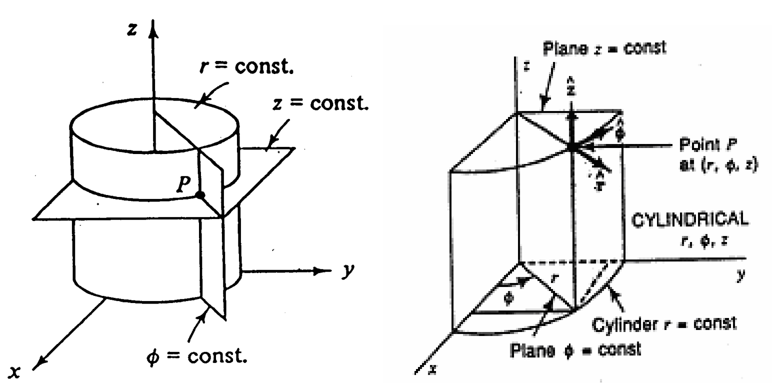
Konversi dari koordinat koordinat kartesius ke silinder adalah sbb :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

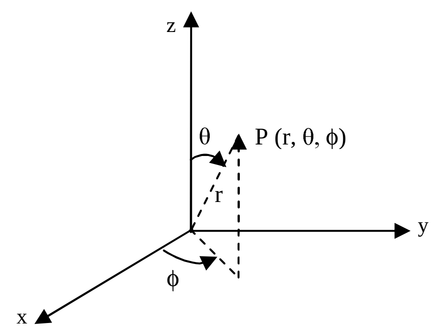
Contoh visualisi penggambaran objek dalam koordinat silinder untuk kasus, r konstan, ϕ konstan dan z konstan. Dari gambar ini dapat dibayangkan kira-kira suatu objek yang menempati koordinat silinder akan seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 8.

3. Koordinat bola

Koordinat bola digunakan untuk menyatakan suatu objek yang mempunyai bentuk simetri bola. Sebagai contoh adalah bumi yang kita tempati. Posisi atau kedudukan objek-objek yang berada dibumi akan sulit dijelaskan dengan koordinat kartesius maupun tabung karena bentuk bumi yang bundar. Oleh karena itu digunakan system koordinat bola agar mudah dibayangkan. Untuk menyatakan besaran vektor, koordinat bola menggunakan 3 sumbu koordinat yaitu r, θ, dan ϕ.



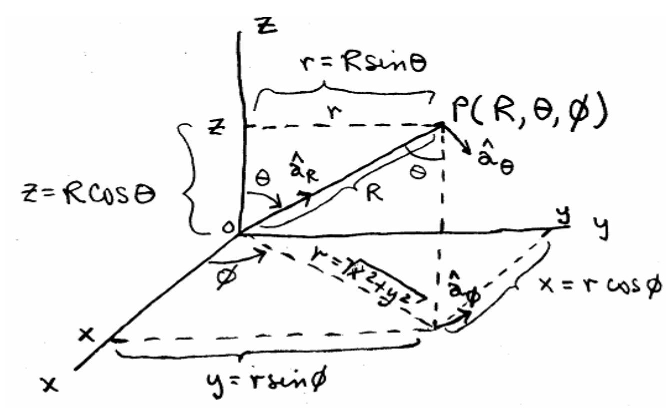
Gambar 9. Koordinat bola

Vektor satuan dalam arah r, θ, dan ϕ

- $a_R = R$ $\quad a_\theta = \theta$ $\quad a_\Phi = \Phi$
- $| a_R | = 1$ $\quad | a_\theta | = 1$ $\quad | a_\Phi | = 1$

Dengan operasi sebagai berikut :

- $A_R \times a_\theta = a_\Phi$ $\quad a_\theta \times a_R = -a_z$
- $a_\theta \times a_\Phi = a_R$ $\quad a_\Phi \times a_\theta = -a_R$
- $a_\Phi \times a_R = a_\theta$ $\quad a_R \times a_\Phi = -a_\theta$



Gambar 10

Vektor pada koordinat bola dapat dinyatakan dengan

$A = a_R\,A_R + a_\theta\,A_\theta + a_\Phi\,A_\Phi$

Konversi koordinat bola ke koordinat kartesian

$x = R\sin\theta\cos\Phi$

$y = R\sin\theta\sin\Phi$

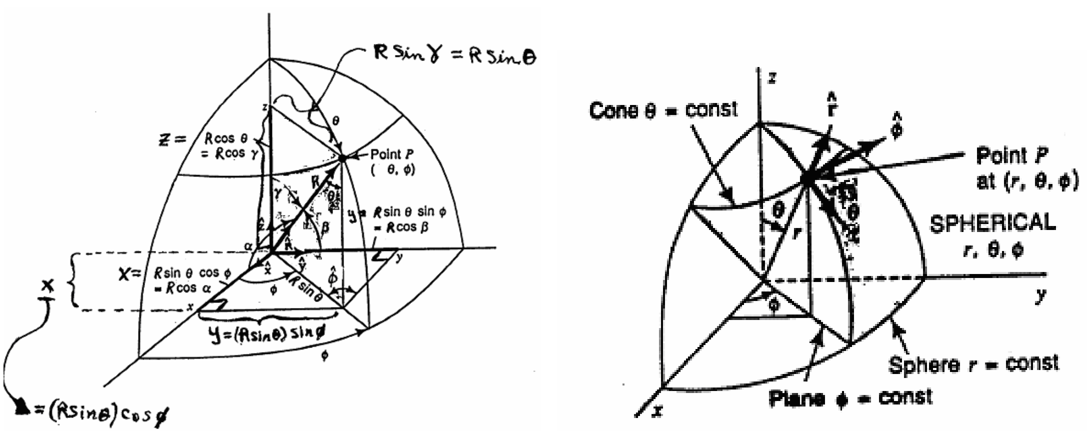
$z = R\cos\theta$

Konversi koordinat kartesian ke koordinat bola

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R\sin\theta)}{z}\right. = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



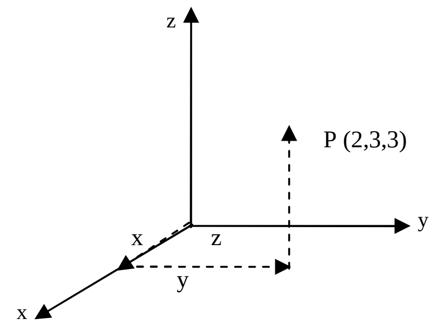
Gambar 11. suatu objek dalam koordinat bola

Contoh soal :

1. Gambarlah dalam koordinat kartesian besaran vektor berikut :

   A = 2ax+ 3ay + 3az

   Penyelesaian :



Gambar 12

E. Produk-produk Vektor

1. Produk Skalar (Perkalian titik)

Produk Skalar atau perkalian titik didefinisikan sebagai perkalian antara besar Vektor **A** dan besar Vektor **B**, dikalikan dengan kosinus sudut terkecil antara kedua vektor tersebut. Secara matematis perkalian titik 2 buah vector dituliskan sbb :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |A| \cdot |B| \cos\theta_{AB}$$

Perkalian titik dua vektor dapat ditulis sebagai berikut :

Jika vector A dan B terletak pada koordinat kartesius 3 dimensi dengan komponen ke masing-masing sumbu koordinat dinyatakan dengan

A_x : komponen vector A kea rah sumbu X

A_y : komponen vector A kea rah sumbu Y

A_z : komponen vector A kea rah sumbu Z

B_x : komponen vector B kea rah sumbu X

B_y : komponen vector B kea rah sumbu Y

B_z : komponen vector B kea rah sumbu Z

Karena sudut antara sumbu x, y dan z adalah 90^0, maka cos 90^0 = 0 sehingga jika dikalikan $A_x.B_y$, $A_x.B_z$, $A_y.B_z$, $A_y.B_x$, $A_z.B_x$, $A_z.B_y$ = 0. dank arena cos 0^0 = 1, maka $A_x.B_x$, $A_y.B_y$, $A_z.B_z$ = 1.

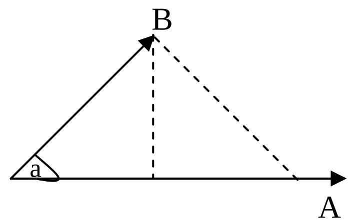
Maka perkalian vector A dengan vector B akan menjadi sbb :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Perkalian titik antara vektor dengan dirinya sendiri akan menghasilkan kuadrat dari besar vektor tersebut. Perkalian titik antara vektor satuan dengan dirinya sendiri sama dengan 1. Dituliskan sebagai berikut :

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |A|^2$ $\qquad\qquad a_A \cdot a_A = 1$

Contoh



Jika |A| = 6, dan |B| = 8 dan $\theta_{AB} = 60^0$, maka Proyeksi vector B terhadap A = 4 sehingga A.B = B.A = 4.6 = 24

Jika kita proyeksikan ke arah B, maka Proyeksi vector A terhadap B = 3 sehingga A.B = B.A = 3.8 = 24

Sudut antara 2 vektor A dan B

Terkadang besar sudut antara vector A dan B tidak diketahui, sehingga harus dicari dengan persamaan dasar

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |A| \cdot |B| \cos\theta_{AB}$

Cos Teta = A.B/ |A|.|B|

Teta = Cos^{-1} A.B/ |A|.|B|

Jika A dan B tegak lurus atau membentuk sudut 90^0, maka A.B = 0 karena cos $90^0 = 0$.

2. Produk Vektor

   Produk vector atau perkalian silang antara vektor A dengan vektor B dapat dirumuskan sebagai berikut :

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |A|\ |B| \sin\theta_{AB}\ a_n$

   a_n : vector satuan

Hasil perkalian silang antara 2 vektor akan menghasilkan vector juga tidak seperti pada perkalian titik. Sehingga perlu ditambahkan symbol a_n yaitu vector satuan yang menyatakan arah vector hasil perkalian vector A dan B.

Perkalian silang A dan B bisa dinyatakan dalam sembilan perkalian silang atau dengan menggunakan metode matrik, sebagai berikut :

Ingat bahwa sudut antara sumbu x, y dan z masing-masing adalah 90^0. Sin 90^0= 1, sedangkan sin 0^0 = 0.

Dengan demikian

a_x x a_x = 0, a_y x a_y = 0, a_z x a_z = 0,

a_x x a_y = a_z, a_x x a_z = -ay,

a_y x a_z = a_x, a_y x a_x = -az,

a_z x a_x = a_y, a_z x a_y = -ax,

Sehingga perkalian silang vector A dan B dapat dituliskan dalam bentuk persamaan determinan matriks 3x3 sebagai berikut :

$$\mathrm{A \times B} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

Keterangan :

a_x, a_y dan a_z merupakan vector satuan kearah sumbu x, y dan z.

A_x : besar vector ke arah x B_x : besar vector ke arah x

A_y : besar vector ke arah y B_y : besar vector ke arah y

A_z : besar vector ke arah z B_z : besar vector ke arah z

F. Contoh soal dan penyelesaian

1. Sebuah vektor A = (2ax – 3ay + az) dan vektor B = (- 4ax – 2ay + 5az). Tentukamn perkalian silang A x B ?

   Penyelesaian :

$$A \times B = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -13ax - 14ay - 16az$$

Tugas

1. Gambarlah vector-vektor berikut ini pada koordinat kartesius 3 dimensi yang mempunyai besar dan arah sebagai berikut :
   a. Vektor A = $2a_x - 3a_y + 4a_z$ b. Vektor M = $-a_x + 2a_y + 2a_z$
   c. Vektor R = $a_x + 3a_y - 2a_z$ d. Vektor H = $-2a_x - a_y - 3a_z$

2. Mengacu pada soal No. 1 Hitunglah operasi vector berikut ini
   a. A + M – H b. A x M
   c. R . H d. A x (M.H)
3. Carilah sudut yang dibentuk oleh
   a. Vektor A dan M b. Vektor M dan H
   c. Vektor H dan (RxM) d. Vektor A dan (M+H)
4. Sebuah segitiga yang dibentuk oleh titik-titik A(2, -1, 2), B(-1, 1, 4) dan C(4, 3, -1). Carilah
   a. Vektor R_{AB} dan R_{AC}
   b. Sudut yang dibentuk oleh vector R_{AB} dan R_{AC}
   c. Luas Segitiga tersebut
5. Carilah sebuah kasus nyata di lapangan yang dapat menerapkan konsep vector
6. Buatlah 2 soal tentang materi vector (Masing-masing harus berbeda)