PYTHAGORAS Vol. 3, No. 1, Juni 2007: 78–84

INVERSI DAN TITIK-TITIK HARMONIS

Himmawati P.L dan Caturiyati
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstract

Given a circle centre O and radius r in R^2, the inversion in this circle is the mapping $t: R^2 \setminus \{O\} \to R^2 \setminus \{O\}$ defined by $t(A) = A'$, where A' lies on the straight line through O and A, and on the same side of O as A, and $OA.OA' = r^2$. It will be investigated the property of inversion related to four harmonic points. The result is that the cross-ratio of any four coplanar points A, B, C, D is invariant under inversion. Hence, the inversion preserves the four harmonic points.

Keywords *: inversion, cross ratio, four harmonic points.*

PENDAHULUAN

Setiap titik di R^2 dapat dikorespondensikan dengan suatu titik invers terhadap suatu pencerminan terhadap suatu lingkaran (inversi). Selanjutnya, garis yang melalui sebarang titik dan titik inversnya tersebut memotong lingkaran inversi di dua titik. Terkait dengan empat titik tersebut dapat ditentukan suatu perbandingan ganda. Jika perbandingan rangkap tersebut bernilai -1, maka keempat titik tersebut merupakan empat titik harmonis. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang inversi dan sifat-sifatnya terkait dengan titik-titik harmonis.

INVERSI

Definisi 1 (Huggett, 2004)

Diberikan lingkaran yang berpusat di titik O dan berjari-jari r, $O(r)$ di R^2. Inversi pada lingkaran ini adalah pemetaan $t: R^2 \setminus \{O\} \to R^2 \setminus \{O\}$ yang didefinisikan oleh

$$t(A) = A'$$

dengan A' terletak pada garis lurus yang melalui O dan A, sepihak dengan A terhadap O, dan memenuhi $OA.OA' = r^2$.

Selanjutnya lingkaran $O(r)$ disebut lingkaran inversi, titik O disebut pusat inversi, r disebut jari-jari inversi, r^2 disebut kuasa inversi, dan titik A' disebut invers titik A terhadap $O(r)$. Inversi dengan pusat O dan kuasa $r^2 > 0$ dinotasikan $I(O, r^2)$.

Definisi di atas mengakibatkan bahwa untuk setiap titik A pada bidang selain titik O terdapat dikorespondensikan dengan tunggal suatu invers titik A', dan jika A' adalah invers A, maka A adalah invers dari A'. Karena tidak ada titik yang berkorespondensi dengan pusat inversi O, maka bukan merupakan suatu transformasi dari himpunan R^2 yang terdiri dari semua titik pada bidang. Agar inversi membentuk suatu transformasi, dapat dilakukan dengan dua cara. Pertama, dengan mengambil $R^2 \setminus \{O\}$ himpunan semua titik pada bidang kecuali titik O, maka inversi merupakan suatu transformasi pada $R^2 \setminus \{O\}$. Kedua, dengan menambahkan pada himpunan S, suatu "*single ideal point at infinity* Z menjadi himpunan $R^2{}'$ yang akan berkorenpondensi dengan pusat inversi.
Untuk selanjutnya yang dimaksud inversi disini, adalah suatu transformasi pada $R^2{}'$ tersebut.

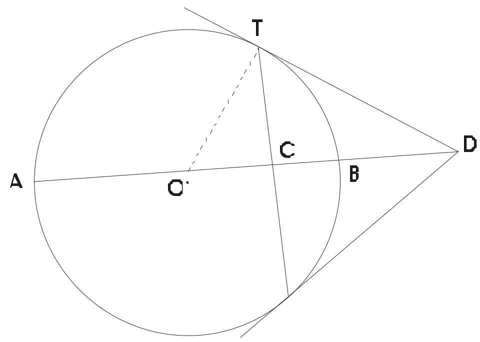
Dari persamaan $OA.OA' = r^2$ terlihat bahwa (1) jika titik A' invers dari titik A, maka titik A adalah invers dari A'; (2) jika titik A titik interior lingkaran, maka A' adalah titik eksterior lingkaran; (3) jika titik A titik eksterior lingkaran, maka titik A' titik interior; dan (4) jika titik A adalah titik pada lingkaran inversi, maka bergitu juga titik A' (Kunkel, 2003).

Teorema 1 (Eves, 1972)
Suatu titik D di luar lingkaran inversi dan suatu titik C yang merupakan titik potong dari tali busur singgung dari titik D pada lingkaran inversi dan garis diametral $\overleftrightarrow{OD}$ merupakan titik-titik invers.

Bukti.
Harus dibuktikan bahwa $OD.OC = r^2$

Pada gambar 1 $\overline{DT}$ adalah garis singgung segitiga *OTD* sehingga segitiga *OTD* siku siku di T.

Menurut sifat "tali busur singgung tegak lurus garis diametral" diperoleh $\overline{TC} \perp \overline{OD}$. Berdasarkan sifat segitiga siku-siku diperoleh bahwa $OD.OC = OT^2 = r^2$.



Gambar 1

TITIK-TITIK HARMONIS

Definisi 2 (Eves, 1972)

Jika *A*, *B*, *C*, *D* empat titik berlainan yang segaris, maka perbandingan dari perbandingan $(AC/CB)/(AD/DB)$, disimbolkan (*AB*,*CD*) dan dinamakan *cross ratio/double ratio* (perbandingan rangkap) dari empat titik berurutan *A*, *B*, *C*, *D*.

Dalam definisi di atas, arah dari ruas garis diperhatikan. Jika harga perbandingan rangkap negatif, maka salah satu dari titik dari pasangan titik *A*, *B* terletak di antara pasangan titik *C*, *D*. Jadi perbandingan rangkap dapat dituliskan juga sebagai $(AB, CD) = e(AC/CB)/(AD/DB)$ di mana *AC*, *CB*, *AD*, dan *DB* panjang tali busur dan $e = -1$ atau $e = +1$ bersesuaian dengan pasangan *A*, *B* dan *C*, *D* saling memisahkan atau tidak saling memisahkan.

Definisi 3 (Eves, 1972)

Jika *A*, *B*, *C*, *D* empat titik segaris sedemikian hingga (*AB*,*CD*) = -1, maka ruas garis $\overleftrightarrow{AB}$ dikatakan terbagi harmonis oleh *C* dan *D*, titik *C* dan *D* disebut konjugat harmonis terhadap *A* dan *B*, dan empat titik *A*, *B*, *C*, *D* merupakan *a harmonic range* atau empat titik harmonis.

SIFAT-SIFAT INVERSI

Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat inversi yang dinyatakan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 2

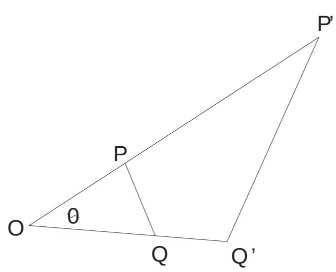
Pasangan titik *P*, *P'* dan *Q*, *Q'* merupakan pasangan titik-titik invers terhadap lingkaran *O*(*r*) jika dan hanya jika

$$P'Q' = (PQ)r^2/(OP)(OQ)$$

Bukti.

Andaikan *O*, *P*, *Q* tidak segaris. Pasangan titik *P*, *P'* dan *Q*, *Q'* merupakan pasangan titik titik invers jika dan hanya jika $OP.OP' = r^2 = OQ.OQ'$. Karena ΔOPQ sebangun dengan ΔOPQ, maka

$$\begin{aligned} P'Q'/PQ &= OQ'/OP \\ &= (OQ')(OQ)/(OP)(OQ) \\ &= \mathrm{r}^2/(OP)(OQ) \end{aligned}$$



Untuk kasus *O*, *P*, *Q* segaris dibuktikan dengan mengambil $\angle\theta$ mendekati 0, atau

$$OP.OP' = OQ.OQ'$$

$$(OQ + QP)OP' = OQ(OP + PQ')$$

$$QP.OP' = OQ.P'Q'$$

$$P'Q' = (QP.OP')/OQ$$
$$= (QP.OP'.OP)/OP.OQ$$
$$= (QP.r^2)/(OP.OQ)$$

Bukti selesai.

Teorema 3

(AB,CD) = -1 jika hanya jika $OB^2 = OC.OD$ dengan O titik tengah $\overline{AB}$.

Bukti.

Diketahui (AB,CD) = -1 , akan dibuktikan $OB^2 = OC.OD$ dengan O titik tengah $\overline{AB}$.

Diketahui (AB,CD) = -1, maka $AC/CB = -AD/DB$.

Dengan demikian,

$$(OC-OA)/(OB-OC) = -(OD-OA)/(OB-OD)$$

Karena $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, maka

$$(OC+OB)/(OB-OC) = -(OD+OB)/(OB-OD)$$

Selanjutnya,

$$(OC+OB)/(OD-OB) = -(OD+OB)/(OB-OC)$$

$$OC.OD - OC.OB + OB.OD - OB^2 = OD.OB - OD.OC + OB^2 - OB.OC$$

$$2OC.OD = 2OB^2$$

Jadi $OB^2 = OC.OD$.

Bukti pernyataan $OB^2 = OC.OD$ dengan O titik tengah $\overline{AB}$ maka (AB,CD) = -1 dilakukan dengan membalik langkah-langkahnya.

Teorema di atas menyatakan bahwa empat titik A, B, C, dan D merupakan empat titik harmonis jika dan hanya jika titik D adalah invers dari titik C terhadap inversi pada lingkaran inversi berpusat di titik tengah $\overline{AB}$ dan berjari-jari $r = \frac{1}{2}AB$. Berikut adalah sifat yang merupakan akibat dari teorema di atas.

Akibat 4

Jika *C* dan *D* titik titik invers terhadap lingkaran *O*(*r*), maka (*AB*,*CD*) = -1, dengan *AB* diameter lingkaran *O*(*r*), melalui *C* dan *D* ; sebaliknya jika (*AB*,*CD*) = -1 dengan *AB* suatu diameter lingkaran *O*(*r*), maka *C* dan *D* titik titik invers terhadap lingkaran *O*(*r*).

Berdasarkan uraian-uraian di atas, dapat dibuktikan salah satu sifat penting dari inversi, yaitu bahwa inversi mempertahankan perbandingan rangkap, yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5

Sebarang inversi mempertahankan perbandingan rangkap dari empat titik pada suatu lingkaran yang tidak berimpit dengan pusat inversi, yaitu

$$(A'B',C'D') = (AB,CD)$$

Bukti.

Misalkan *A*, *B*, *C*, *D* empat titik berlainan pada suatu lingkaran yang tidak berimpit dengan pusat inversi. Menurut Teorema 2, diperoleh

$$A'C' = (AC)r^2/(OA)(OC) \Leftrightarrow AC = \frac{A'C'.OC.OA}{r^2}$$

$$C'B' = (CB)r^2/(OC)(OB) \Leftrightarrow CB = \frac{C'B'.OC.OB}{r^2}$$

$$A'D' = (AD)r^2/(OA)(OD) \Leftrightarrow AD = \frac{A'D'.OA.OD}{r^2}$$

$$D'B' = (DB)r^2/(OD)(OB) \Leftrightarrow DB = \frac{D'B'.OD.OB}{r^2}.$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan keempat persamaan di atas ke dalam persamaan

$$(AB,CD) = (AC/CB)/(AD/DB)$$

dan dengan penyederhanaan akan diperoleh

$$(A'B',C'D') = (AB,CD).$$

Dari Teorema 5 ini, terlihat bahwa inversi juga mempertahankan "keharmonisan" empat titik, yaitu jika empat titik merupakan empat titik harmonis, maka keempat titik inversnya juga merupakan empat titik harmonis.

PENUTUP

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan antara pencerminan terhadap suatu lingkaran (inversi) dan empat titik harmonis, yaitu :

1. Empat titik *A*, *B*, *C*, dan *D* merupakan empat titik harmonis jika dan hanya jika titik *D* adalah invers dari titik *C* terhadap inversi pada lingkaran inversi berpusat di titik tengah $\overline{AB}$ dan berjari-jari $r = \frac{1}{2}AB$.
2. Suatu inversi bersifat mempertahankan "keharmonisan" empat titik, yaitu jika empat titik merupakan empat titik harmonis, maka keempat titik inversnya juga merupakan empat titik harmonis.

DAFTAR PUSTAKA

Alexander Bogomolny (2007). *Cross Ratio*. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Cross-Ratio.shtml. Didownload pada 14 Mei 2007.

Eves, Howard. (1972). *A Survey of Geometry*. Boston : Allyn and Bacon.

Stephen Hugget. (2004). *Inversive Geometry*. http://homepage.mac.com/stephen_huggett/home.html. Didownload pada 26 Juli 2006.

Paul Kunkel (2003). *Inversion Geometry*. *whistling@whistleralley.com* . Didownload pada 25 Mei 2007.