Penerapan Kestabilan Titik Equilibrium
Sistem Reaksi Difusi Pada Masalah Epidemik Model Sir

Himmawati Puji Lestari
Caturiyati
Kana Hidayati
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah mengkaji kestabilan titik ekuilibrium suatu sistem reaksi difusi. Kestabilan sistem reaksi difusi ini dikaji melalui matriks Jacobiannya. Selanjutnya akan dikaji penerapan kestabilan titik ekuilibrium sistem reaksi difusi ini pada masalah epidemiologi model SIR dengan *vital dynamics.*

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka, untuk mengkaji konsep-konsep yang diperlukan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium sistem reaksi difusi yang selanjutnya diterapkan pada masalah epidemiologi SIR dengan *vital dynamics.*

Hasil yang diperoleh menujukkan bahwa titik ekuilibrium sistem reaksi difusi stabil asimtotis jika matriks Jacobiannya stabil dan memenuhi kondisi minor. Titik ekuilibrium sistem reaksi difusi masalah epidemiologi model SIR dengan *vital dynamics* stabil asimtotis untuk semua konstanta β, γ, dan μ. Hal ini berarti proporsi masing-masing kelompok S, I, dan R pada saat tidak terjadi perubahan proporsi akan tidak berubah untuk jangka waktu lama.

Kata kunci : *titik ekuilibrium, sistem reaksi difusi, model* SIR *dengan vital dynamics*

1. PENDAHULUAN

Mathematical epidemiology merupakan salah satu cabang *mathematical biosciences* yang mempelajari tentang penyebaran dan kontrol wabah penyakit. Masalah utama dalam epidemiologi adalah mempelajari bagaimana sekelompok individu yang terinfeksi menyebarkan penyakit (menular) dalam suatu populasi yang saling berinteraksi.

Berbagai model epidemik telah dikenal, di antaranya model SIR, SIRS, SEIR, SEIRS, dan SEIS. Model-model ini dibentuk bergantung pada asumsi yang dibuat tentang penyakit dan tingkah laku populasi. Individu-individu dalam suatu populasi dapat dikategorikan dalam 4 kelompok, yaitu kelompok S(*susceptibles*/rentan), E (*exposed* /terinfeksi), I(*infectious*/terjangkit), dan R(*recovered*/sembuh). Contoh penyakit yang termasuk ke dalam model SIR adalah cacar air.

Dipresentasikan dalam SEMNAS Matematika dan Pendidikan Matematika 2007 dengan tema **"Trend Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika di Era Global"** yang diselenggarakan oleh Jurdik Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 24 Nopember 2007

Model-model epidemik untuk suatu populasi yang didalamnya terjadi interaksi atau kontak langsung (penyebaran horizontal) antar individu dapat dipandang sebagai suatu sistem reaksi difusi. Sistem reaksi difusi adalah suatu model matematika yang menggambarkan bagaimana konsentrasi satu atau lebih kelompok terdistribusi dalam suatu populasi. Kestabilan sistem reaksi difusi dipelajari melalui kestabilan matriks Jacobian dalam sistem persamaan differensial.

Perlu diteliti apakah kontak langsung antar individu (difusi) akan mempengaruhi dinamika penyakit (kestabilan proporsi antar kelompok) dalam suatu populasi. Dalam penelitian ini dikaji kestabilan titik ekuilibrium sistem reaksi difusi dan penerapannya pada masalah epidemiologi model SIR, khususnya model SIR dengan *vital dynamics* (dengan kelahiran dan kematian).

1.1 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah kestabilan matriks, sistem reaksi difusi dan kestabilan titik ekuilibriumnya, dan bagaimana penerapan kestabilan titik ekuilibrium sistem reaksi difusi ini pada model SIR dengan *vital dynamics*.

1.2 Tinjauan Pustaka

Diberikan suatu fungsi $f: R^n \to R^n$ dan diasumsikan $f(0)=0$, maka $u=0$ adalah titik keseimbangan dari sistem persamaan diferensial biasa

$$\frac{du}{dt} = f(u)\,. \tag{1.1}$$

Titik ekuilibrium ini stabil asimtotis lokal jika matriks Jacobian $A = f'(0)$ stabil.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka. Berdasarkan kajian tentang konsep-konsep dan teorema-teorema dalam kestabilan matriks, akan diteliti kestabilan sistem reaksi difusi. Selanjutnya, hasil kajian ini akan diterapkan pada masalah epidemik model SIR, khususnya model *vital dynamics* (dengan kelahiran dan kematian).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Kestabilan Matriks dan Kestabilan Sistem Reaksi Difusi

Definisi 3.1

Matriks A dikatakan stabil jika maksimum bagian real nilai-nilai eigen matriks A bernilai negatif, yaitu $s(A) < 0$ *dan dikatakan tidak stabil jika* $s(A) > 0$.

Definisi 3.2

Diberikan $A = (a_{ij})_{nxn} \in M_n(\mathbf{C})$. *Untuk* $1 \le k \le n$ *didefinisikan himpunan* I_k *sebagai berikut*:

$$I_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$$

$$I_0 = \phi$$

Selanjutnya, untuk $J = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k$ *didefinisikan juga* :

(i) $\{J\} := \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

(ii) $\{J\}^C := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{J\}$

(iii) $J^C := (i_1^C, i_2^C, \ldots, i_{n-k}^C)$ *dengan* $i_r^C \in \{J\}^C \;\; \forall r, r = 1, 2, \ldots, n-k$ dan $1 \le i_1^C < i_2^C < \ldots < i_{n-k}^C \le n$.

(iv) $I_k^C := \{J^C \mid J \in I_k\}$, k=1, 2, …, n .

Definisi 3.3

Diberikan $A = (a_{ij})_{nxn} \in M_n(\mathbf{C})$ *dan* $1 \le k \le n$.

Untuk sebarang $J = (i_1, i_2, ..., i_k) \in I_k$ *matriks bagian utama (principal submatrix) kxk dari matriks A, dinotasikan* $P_J(A)$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$P_J(A) = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & & & \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$P_\phi(A) = I$.

Secara umum nilai determinan matriks $(A-D)$ dengan $A \in M_n(\mathbf{C})$ dan D *matriks diagonal* $D = diag\ (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_1, d_2, \ldots, d_n \ge 0$ dapat dinyatakan sebagai

$$\det(A - D) = \det(A) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{J \in I_k} \det\left(P_{J^C}(A)\right) d_J + (-1)^n \prod_{j=1}^{n} d_j . \qquad (3.1)$$

dengan $d_J = \prod_{j \in J} d_j$ untuk $J \in I_k$ dan $d_\phi = 1$.

Jika $D = \lambda I_{nxn}$ maka persamaan (3.1) adalah polinomial karakteristik dari A.

Definisi 3.4

(i) *Diberikan polinomial karakteristik matriks A*

$$P_A(\lambda) = a_0\lambda^n + b_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + b_1\lambda^{n-3} + \cdots, \qquad (3.2)$$

dengan $a_0 \ne 0$. *Diasumsikan bahwa semua* a_k *dan* b_k *real dan* $P_A(\lambda)$ *tidak mempunyai akar imajiner murni. Matriks Hurwitz H didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran n yang berbentuk sebagai berikut*

$$H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

dengan a_i *dan* b_i *seperti dalam polinomial karakteristik di atas dan* $a_k = 0$ *untuk* $k > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *dan* $b_k - 0$ *untuk* $k > \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

(ii) *Determinan Hurwitz order ke-k, dinotasikan* Δ_k *yang dibentuk dari matriks Hurwitz berukuran n didefinisikan sebagai*

$\Delta_1 = b_0$,

$$\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_3 = \det\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{bmatrix}, \ldots\ldots \qquad (3.4)$$

Teorema 3.2 (kriteria Routh-Hurwitz)

Semua akar polinomial (3.2) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika memenuhi

$$\begin{aligned} &a_0\Delta_1 > 0, \\ &\Delta_2 > 0, \\ &a_0\Delta_3 > 0, \qquad (3.5) \\ &\Delta_4 > 0, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$a_0\Delta_n > 0$ *untuk n ganjil,* $\Delta_n > 0$ *untuk n genap.*

Jika polinomial (3.2) dituliskan sedemikian hingga $a_0 > 0$, maka menurut kriteria Routh-Hurwitz semua akar polinomial (3.2) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\Delta_i > 0 \text{ untuk semua } i \le n. \qquad (3.6)$$

β, γ, dan μ. Hal ini berarti proporsi masing-masing kelompok S, I, dan R pada saat tidak terjadi perubahan proporsi akan tidak berubah untuk jangka waktu lama.

4.1 Simpulan

1. Suatu matriks dikatakan stabil jika bagian real semua akar karakteristiknya bernilai negatif. Jika matriks A stabil dan D suatu matriks diagonal, maka matriks $(A–D)$ stabil untuk semua $D \geq 0$ jika dan hanya jika A memenuhi kondisi minor. Jika matriks A adalah matriks matriks jacobian suatu sistem persamaan diferensial dan D adalah matriks difusi, maka syarat kestabilan ini dapat diterapkan pada sistem reaksi difusi.
2. Titik ekuilibrium sistem reaksi difusi stabil asimtotis jika dan hanya jika matriks Jacobiannya stabil dan memenuhi kondisi minor.
3. Model SIR dengan *vital dynamics* dirumuskan dalam sistem persamaan diferensial

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si - \mu s + \mu$$
$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i$$

   dengan $r(t) = 1 - s(t) - i(t)$ dengan syarat awal

$$S(0) = S_0 \geq 0$$
$$I(0) = I_0 \geq 0 \quad .$$
$$R(0) = R_0 \geq 0.$$

4. Sistem reaksi difusi model SIR dengan *vital dynamics* stabil asimtotis untuk semua konstanta konstanta β, γ, dan μ. Hal ini berarti proporsi masing-masing kelompok S, I, dan R pada saat tidak terjadi perubahan proporsi akan tidak berubah untuk jangka waktu lama.

4.2. Saran

Perlu diteliti lebih lanjut kestabilan titik ekuilibrium sistem reaksi difusi untuk masalah epidemiolagi yang lain, seperti SIS, SEIRS, atau SIR dengan asumsi yang berbeda, juga pada bidang-bidang yang lain, seperti di ilmu kimia, fisika, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Hethcote, Herbert W. 1989. Three Basic Epidemiological Models. Biomathematics Vol 18. Sringer-Verlag, New York

Himmawati, 2005. *Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Reaksi Difusi dan Terapannya pada Model SEIR.* Tesis S2 Matematika Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Kapur, J.N. 2000. *Mathematical Model in Biology and Medicine.* Affiliated East-West Press Private Limited, New Delhi.

Li, M.Y and Wang, L. 1997. *A Criterion for Stability of Matrices.* http://www.math.ualbarta.ca/`mli/research/publication_htm

Li, M.Y., Graef, J.R., Wang, L.,Karsai, J. *Global Dynamics of a SEIR Model with Varying Total Population Size.* http://www.u/cache/papers/cs/4029/http:zSzzSzwww2.msstate.eduzSz`mli zSzresearchzSzps_fileszSzSeirvary.pdf/global-dynamics-of-a.pdf

Wang, L., and Li, M.Y. 1999. *Diffusion-Driven Instability in Reaction-Diffusion Systems.* http://www.idealibrary.com.

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag, New York.