OPTIMISASI KONVEKS: Konsep-konsep

Caturiyati, M.Si[1] dan Himmawati Puji Lestari, M.Si[2]
[1,2] *Jurdik Matematika FMIPA UNY*
[1] wcaturiyati@yahoo.com
[2] himmawatipl@yahoo.com

Abstrak

Pada masalah optimisasi konveks terdapat berbagai konsep yang menjadi latar belakang. Paper ini akan mengulas konsep-konsep tersebut sehingga dapat mempermudah dalam mempelajari masalah optimisasi konveks. Pada bagian awal akan diuraikan konsep-konsep mengenai himpunan konveks, dilanjutkan dengan fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, dan dipungkasi dengan masalah optimisasi konveks. Pada paper ini hanya diuraikan konsep-konsepnya saja.

Kata kunci: himpunan konveks, fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, optimisasi konveks

PENDAHULUAN

Masalah optimisasi konveks merupakan masalah optimisasi yang dikenakan pada himpunan konveks secara umum. Salah satu contoh masalah optimisasi konveks adalah masalah pemrograman linear (Luenberger, 1984). Dewasa ini telah banyak dikembangkan dan aplikasi masalah optimisasi konveks di berbagai disiplin ilmu, terutama teknik dan ekonomi, baik yang linear maupun non linear (Ben-Tal and Nemirovski, 2001).

Diberikan masalah optimisasi sebagai berikut:

Meminimalkan $f_0(x)$
dengan kendala $f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$
$h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$

dengan x adalah vektor variabel keputusan, dan fungsi f_0, f_i, dan h_i berturut-turut adalah fungsi biaya, fungsi kendala ketaksamaan, dan fungsi kendala persamaan. Namun, bila variabel keputusan x sangat banyak, maka sulit untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Alasannya adalah:

1. Masalah mungkin penuh dengan optimal lokal,
2. Akan sangat sulit menentukan titik layak (yaitu suatu x yang memenuhi semua persamaan dan ketaksamaan), faktanya himpunan solusi dapat kosong,
3. Kriteria penghentian digunakan dalam algoritma optimisasi umum seringkali berubah-ubah,
4. Algoritma optimisasi kemungkinan mempunyai sangat sedikit rata-rata kekonvergenan,
5. Masalah numerik dapat menyebabkan algoritma meminimumkan berhenti semua bersama-sama.

Jika semua f_i konveks, dan h_i affine, maka tiga masalah pertama hilang: suatu optimum lokal adalah optimum global; kelayakan masalah optimisasi konveks dapat ditentukan tanpa ada ambigu paling tidak dalam hal prinsip; dan kriteria penghentian yang sangat mirip dengan menggunakan dualitas. Namun, rata-rata kekonvergenan dan pembahasan sensitivitas numerik tetap menjadi masalah yang potensial.

PEMBAHASAN

1. Himpunan Konveks

Dalam bagian ini akan diuraikan beberapa hal penting mengenai himpunan konveks dan operasinya, yang sebagian besar disarikan dari Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994.

Penting untuk dicatat bahwa beberapa himpunan ini mempunyai representasi berbeda. Mengambil representasi yang tepat dapat membuat perbedaan antara masalah *tractable* dan *intractable*.

Yang akan diperhatikan di sini hanya masalah optimisasi dengan variabel keputusan adalah vektor dalam R^n atau matriks $R^{m\times n}$. Suatu fungsi $f: R^n \to R^m$ adalah affine jika mempunyai bentuk linear ditambah konstanta $f(x) = Ax + b$. Jika F adalah matriks fungsi nilai, yaitu, $F: R^n \to R^{p\times q}$, maka F affine jika mempunyai bentuk

$$F(x) = A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$$

dengan $A_i \in R^{p\times q}$. Fungsi affine kadangkala disebut sebagai masalah linear.

$S \subset R^n$ adalah subruang jika memuat bidang yang melalui sebarang dua titik dan origin, yaitu,

$x, y \in S,\ \lambda, \mu \in R \quad \longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in S.$

Dua representasi umum dari subruang adalah sebagai jangkauan matriks

$$range(A) = \{Aw \mid w \in R^q\} = \{w_1 a_1 + \cdots + w_q a_q \mid w_i \in R\}$$

dengan $A = [a_1 \dots a_q]$; atau sebagai ruang null matriks

$$ruang\ null\ (B) = \{x \mid Bx = 0\} = \{x \mid b_1^T x = 0, \dots, b_p^T x = 0\}$$

dengan $B = [b_1 \dots b_p]^T$.

Suatu himpunan $S \subset R^n$ affine jika memuat garis yang melalui sebarang dua titik di dalamnya, yaitu,

$$x, y \in S, \qquad \lambda, \mu \in R, \quad \lambda + \mu = 1 \quad \longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in S$$

Secara geometrik, suatu himpunan affine adalah sebuah subruang yang tidak perlu terpusat pada origin. Dua representasi untuk himpunan affine adalah: jangkauan dari fungsi affine

$S = \{Az + b \mid z \in R^q\}$,

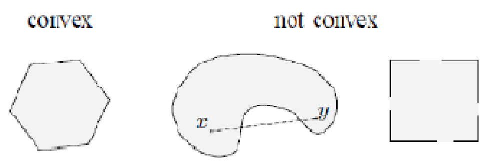
atau sebagai solusi suatu himpunan perasamaan linear:

$S = \{x \mid b_1^T x = d_1, \dots, b_p^T x = d_p\} = \{x \mid Bx = d\}$.

Suatu himpunan $S \subseteq R^n$ adalah himpunan konveks jika memuat ruas garis yang menghubungkan titik-titik, yaitu

$$x, y \in S,\ \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in S.$$

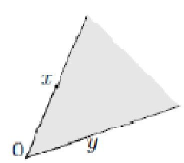
Jelaslah subruang dan himpunan affine adalah konveks.



Suatu himpunan $S \subseteq R^n$ adalah kerucut konveks jika memuat semua sinar garis melalui titik-titik yang berasal dari origin, serta ruas garis yang menghubungkan sebarang titik pada sinar-sinar tersebut, yaitu,

$$x, y \in S, \qquad \lambda, \mu > 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in S$$

Secara geometrik, $x, y \in S$ berarti S memuat seluruh potongan pie antara x dan y.



Suatu kerucut konveks $K \subseteq R^n$ dikatakan proper jika tertutup, mempunyai interior tak kosong, dan pointed, yaitu, tidak terdapat garis di dalam K. Suatu kerucut proper K mendefinisikan ketaksamaan yang diperumum $\preceq_K$ di R^n:

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

$(x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in int\ K)$.