MATERI

PELATIHAN OLIMPIADE MATEMATIKA

SMA N 7 PURWOREJO

26-28 FEBRUARI 2008

DI HOTEL PAKEMSARI SLEMAN

DISUSUN OLEH :
HIMMAWATI PUJI LESTARI, M.Si

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2008

Soal matematika yang diujikan di sekolah-sekolah maupun di Ujian Nasional pada umumnya dapat diselesaikan dengan cara-cara biasa. Namun, soal-soal kompetisi atau olimpiade pada umumnya harus diselesaikan dengan cara-cara luar biasa. Untuk menyelesaikan soal-soal olimpiade diperlukan trik-trik tertentu. Trik-trik tersebut dapat diperoleh melalui ketekunan, paham konsep, dan mampu berpikir kreatif.

- Tanpa ketekunan, begitu menghadapi soal yang sulit biasanya kita akan cepat menyerah. Biasanya kegagalan bukan karena tidak mempunyai kemampuan, melainkan karena tidak ada ketekunan. Jika menghadapi soal yang sulit, lakukan apa saja yang bida kita kerjakan.
- Paham konsep artinya mengerti makna setiap kata kunci dalam soal. Selain itu, kita juga harus memahami konsep yang diperlukan untuk menyelesaikan soal tersebut. Paham konsep juga berarti mampu menyelesaikan masalah tanpa rumus. Dalam hal ini, masalah tersebut diselesaikan dengan cara berpikir nalar atau intuisi.
- Dasar dari berpikir kreatif adalah menghubung-hubungkan, yakni menghubungkan antara yang diketahui dengan yang ditanyakan. Yang dimaksud dengan yang dikatahui adalah segala sesuatu yang kita ketahui, bukan hanya yang tertulis dalam soal. Jika kita belum dapat menghubungkan antara yang diketahui dengan yang ditanyakan, cobalah bekerja mundur. Artinya mulai dari pertanyaan dan akhiri dengan yang sudah diketahui.

MATERI KOMBINATORIKA

faktorial

Jika n adalah bilangan asli, maka n faktorial, ditulis n! diartikan sebagai

$$n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1$$

dan didefinisikan 0!=1.

permutasi

Permutasi dari n unsur adalah banyaknya cara menyusun n buah unsur berbeda dengan memperhatikan urutannya, biasanya dinotasikan dengan Pn. Permutasi n unsur dapat dihitung dengan

Pn = n!

Permutasi k unsur dari n unsur tanpa pengulangan adalah banyaknya menyusun k unsur yang berbeda tanpa penggulangan dari n buah unsur, biasanya dinotasikan dengan P_n^k dan dihitung dengan rumus

$$P_n{}^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutasi k unsur dari n unsur dengan pengulangan adalah banyaknya cara menyusun k unsur dengan pengulangan dari n unsur, biasanya dinotasikan dengan P_n^k dan dihitung dengan rumus

$$P_n{}^k = k^n$$

Banyaknya cara menyusun n unsur dimana k unsur masing-masing muncul sebanyak q_1, q_2, …, q_k adalah

$$p = \frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_k!}$$

kombinasi

Kombinasi k unsur dari n unsure adalah banyaknya cara menyusun k unsur yang berbeda dari n buah unsur tanpa memperhatikan urutan penyusunan, biasanya dinotasikan dengan C_n^k atau $\binom{n}{k}$ dan dihitung dengan rumus

$$C_n{}^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kaidah perkalian (*rule of product*)

Misalkan Percobaan 1: *p* hasil, Percobaan 2: *q* hasil maka

Percobaan 1 dan percobaan 2: *p* × *q* hasil

Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

Misalkan Percobaan 1: *p* hasil, Percobaan 2: *q* hasil maka

Percobaan 1 atau percobaan 2: $p + q$ hasil

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

Contoh 1. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);

posisi ribuan: 8 kemungkinan angka

posisi ratusan: 8 kemungkinan angka

posisi puluhan: 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Misalkan A dan B sembarang himpunan. Penjumlahan |A|+|B| menghitung banyaknya elemen A yang tidak terdapat dalam B dan banyaknya elemen B yang tidak terdapat dalam A tepat satu kali, dan banyaknya elemen yang terdapat dalam

$A \cap B$ sebanyak dua kali. Oleh karena itu, pengurangan banyaknya elemen yang terdapat dalam $A \cap B$ dari $|A|+|B|$ membuat banyaknya anggotas $A \cap B$ dihitung tepat satu kali. Dengan demikian

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Generalisasi dari hal tersebut bagi gabungan sejumlah himpunan dinamakan prinsip inklusi-eksklusi.

Contoh 2. Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$|A| = 2^6 = 64,$

$|B| = 2^6 = 64,$

$|A \cap B| = 2^4 = 16.$

maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112.$$

Contoh 3. Di antara 10 orang siswa dalam suatu kelas, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

(a) siswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;

(b) siswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;

(c) siswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;

(d) siswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;

(e) siswa bernama A dan B termasuk di dalamnya;

(f) setidaknya salah satu dari siswa yang bernama A atau B termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

(a) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga A selalu termasuk di dalamnya.

(b) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga A tidak termasuk di dalamnya.

(c) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A termasuk di dalamnya, tetapi B tidak.

(d) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga B termasuk di dalamnya, tetapi A tidak.

(e) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A dan B selalu termasuk di dalamnya.

(f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari A atau B termasuk di dalamnya

= jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A termasuk di dalamnya, B tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga B termasuk di dalamnya, A tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A dan B termasuk di dalamnya

$= 70 + 70 + 56 = 196$

Prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B, maka

$|X| = C(9, 4) = 126$; $|Y| = C(9, 4) = 126$;

$|X \cap Y| = C(8, 3) = 56$;

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$

SOAL-SOAL

1. Tunjukkan bahwa banyaknya diagonal suatu segi-n adalah $\frac{1}{2}n(n-3)$
2. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 buah bola, masing-masing bernomor 1, 2, 3, dan 4. Seorang anak mengambil sebuah bola secara acak, mencatat nomornya, dan kemudian mengembalikannya ke kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Berapa peluang jumlah keempat nomor bola yang terambil adalah 12 ?
3. Dua orang memainkan suatu game dengan bergantian mengambil 1, 2, atau 3 batu pada setiap pengambilan dari suatu kotak yang semula berisi 15 batu. Orang yang mengambil batu terakhir adalah pemenangnya. Tunjukkan bahwa pemain pertama dapat selalu menang, tidak peduli berapa yang diambil pemain kedua.
4. Buktikan bahwa paling sedikit 4 hari dalam 22 hari sebarang merupakan hari yang sama (misalkan dalam 22 hari tersebut ada 4 hari minggu, 4 hari senin, dsb)
5. Berapa banyak cara menampung 7 orang dalam 3 kamar hotel jika tersedia 1 kamar yang mempunyai 3 tempat tidur dan 2 kamar lainnya mempunyai 2 tempat tidur.
6. Tentukan penjumlahan 1.1!+2.2!+3.3!+…+n.n! dalam n!
7. Sebuah komite mengadakan 40 pertemuan dengan 10 orang anggota komite hadir pada masing-masing pertemuan. Setiap dua orang anggota komite menghadiri pertemuan secara bersamaan paling banyak satu kali. Tunjukkan bahwa banyaknya naggota komite tersebut lebih dari 60 orang.

8. Tentukan digit terakhir dari 1!+2!+3!+…+50!
9. Tentukan penjumlahan 1.1!+2.2!+3.3!+…+(n-1)(n-1)!+n.n! dinyatakan dalam n. (Canadian Math Olympiad 1969)

10. Jika bentuk pangkat $(a+b+c+d+e)^7$ diekspansikan menjadi suku sukunya, maka tentukan koefisien dari a^2cd^3e.
11. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika disyaratkan paling sedikit seorang anggota delegasi itu wanita, berapa banyaknya cara memilih anggota delegasi ?
12. Tentukan banyaknya diagonal pada segi 10