TEORI BILANGAN

Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0.

Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$. Kita menyatakan bahwa a **habis membagi** b (*a divides b*) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga

$$b = ac.$$

Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$. ($\mathbf{Z}$ = himpunan bilangan bulat).

Kadang-kadang pernyataan "*a* habis membagi *b*" ditulis juga "*b* **kelipatan** *a*".

Contoh 1:

4 | 12 karena 12 : 4 = 3 (bilangan bulat) atau 12 = 4 x 3. Tetapi 4 | 13 karena 13 : 4 = 3.25 (bukan bilangan bulat).

Ciri-ciri bilangan yang habis dibagi n:

Habis dibagi	Ciri-ciri
2	Digit terakhir genap
3	Jumlah digitnya habis dibagi 3
4	Dua digit terakhir habis dibagi 4
5	Digit terakhir 0 atau 5
8	Tiga digit terakhir habis dibagi 8
9	Jumlah digitnya habis dibagi 9
11	Selisih digit-digit pada tempat ganjil dan tempat genap adalah nol

Teorema Euclidean

Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r \qquad (1)$$

dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 2.

(i) 1987 dibagi dengan 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47, yaitu 1987 = 97x20 + 47

(ii) –22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi –8 dan sisa 2, yaitu –22 = 3(–8) + 2, tetapi –22 = 3(–7) – 1 salah karena $r = -1$ tidak memenuhi syarat $0 \leq r < n$.

Pembagi Bersama Terbesar (PBB) (faktor persekutuan terbesar/FPB)

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat tidak nol. Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau *gcd*) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d \mid a$ dan $d \mid b$. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa PBB(a, b) = d.

Contoh 3.

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;

Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

Faktor pembagi bersama dari 45 dan 36 adalah 1, 3, 9

PBB(45, 36) = 9.

Algoritma Euclidean

. Algoritma Euclidean adalah algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat. Euclid, penemu algoritma Euclidean, adalah seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam bukunya yang terkenal, *Element*.

□ Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n ($m \neq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

Algoritma Euclidean

1. Jika $n = 0$ maka m adalah PBB(m, n);
stop.
tetapi jika $n \neq 0$, lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.
3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r, lalu
ulang kembali ke langkah 1.

Contoh 4. $m = 80$, $n = 12$ dan dipenuhi syarat $m \geq n$

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka PBB(80, 12) = 4.

Relatif Prima

Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan *relatif prima* jika PBB(a, b) = 1.

Contoh 5.

20 dan 3 relatif prima sebab PBB(20, 3) = 1.

Begitu juga 7 dan 11 relatif prima karena PBB(7, 11) = 1.

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab PBB(20, 5) = 5 $\neq$ 1.

Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m
dan n sedemikian sehingga

$ma + nb = 1$ (2)

Contoh 6.

Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena PBB(20, 3) =1, atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1$$

dengan $m = 2$ dan $n = -13$.

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena PBB(20, 5) = 5 $\neq$ 1 sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$.

Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Suatu bilangan positif d disebut kelipatan persekutuan terkecil bilangan a dan b jika :

a. d kelipatan a dan b, jadi a|d dan b|d
b. untuk setiap bilangan e kelipatan dari a dan b, maka d|e

Kelipatan persekutuan terkecil d dari bilangan a dan b dinotasikan dengan KPK(a,b)=d.

Aritmetika Modulo

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0. Operasi a mod m (dibaca "a modulo m") memberikan sisa jika a dibagi dengan m.

Notasi: a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan {0, 1, 2, …, $m - 1$} (mengapa?).

Contoh 7.

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod 5 = 3 (23 = 5 x 4 + 3)

(ii) 27 mod 3 = 0 (27 = 3 x 9 + 0)

(iii) 6 mod 8 = 6 (6 = 8 x 0 + 6)

(iv) 0 mod 12 = 0 (0 = 12 x 0 + 0)

(v) – 41 mod 9 = 4 (–41 = 9 (–5) + 4)

(vi) $-39 \bmod 13 = 0$ ($-39 = 13(-3) + 0$)

Penjelasan (v): Karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r'. Maka $a \bmod m = m - r'$ bila $r' \neq 0$. Jadi $|-41| \bmod 9 = 5$, sehingga $-41 \bmod 9 = 9 - 5 = 4$.

Kongruen

Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka dikatakan $38 \equiv 13 \pmod 5$ (baca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0, maka $a \equiv b \pmod m$ jika m habis membagi $a - b$.

Dengan kata lain, bilangan bulat a dikatakan kongruen dengan b modulo m jika a dan b memberikan sisa yang sama apabila dibagi m.

Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod m$.

Contoh 8.

$17 \equiv 2 \pmod 3$ (3 habis membagi $17 - 2 = 15$)

$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ (11 habis membagi $-7 - 15 = -22$)

$12 \not\equiv 2 \pmod 7$ (7 tidak habis membagi $12 - 2 = 10$)

$-7 \not\equiv 15 \pmod 3$ (3 tidak habis membagi $-7 - 15 = -22$)

$a \equiv b \pmod m$ dapat pula dituliskan dalam hubungan

$$a = b + km \tag{3}$$

yang dalam hal ini k adalah bilangan bulat.

Contoh 9.

$17 \equiv 2 \pmod 3$ dapat ditulis sebagai $17 = 2 + 5 \times 3$

$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ dapat ditulis sebagai $-7 = 15 + (-2)11$

Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan $a \bmod m = r$ sebagai $a \equiv r \pmod m$

Contoh 10.

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo berikut:

(i) 23 mod 5 = 3 dapat ditulis sebagai $23 \equiv 3 \pmod 5$

(ii) 27 mod 3 = 0 dapat ditulis sebagai $27 \equiv 0 \pmod 3$

(iii) 6 mod 8 = 6 dapat ditulis sebagai $6 \equiv 6 \pmod 8$

(iv) 0 mod 12 = 0 dapat ditulis sebagai $0 \equiv 0 \pmod{12}$

(v) – 41 mod 9 = 4 dapat ditulis sebagai $-41 \equiv 4 \pmod 9$

(vi) – 39 mod 13 = 0 dapat ditulis sebagai $-39 \equiv 0 \pmod{13}$

Teorema Fermat.

Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p, yaitu PBB(a, p) = 1, maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Contoh 11.

Kita akan menguji apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan.

Kita mengambil nilai a = 2 karena PBB(17, 2) = 1 dan PBB(21, 2) = 1. Untuk 17

$$2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$$

karena 17 tidak membagi 65536 – 1 = 65535 (65535:17 = 3855).

Untuk 21,

$$2^{21-1} = 1048576 \equiv\backslash\ 1 \pmod{21}$$

karena 21 tidak habis membagi 1048576 – 1 = 1048575.

- Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod n$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan **prima semu** (*pseudoprimes*).
- Misalnya komposit 341 (yaitu 341 = 11 x 31) adalah bilangan prima semu karena menurut teorema Fermat, $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$

Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat.

Persamaan Diophantine

- persamaan 3x=6 mempunyai satu buah penyelesaian bilangan bulat, yaitu x=2.

- Persamaan 2y=17 tidak mempunyai penyelesaian bilangan bulat, tetapi mempunyai penyelesaian yang berupa bilangan rasional, yaitu y=17/2
- Persamaan 2x+3y=5 merupakan suatu persamaan dua variabel. Persamaan ini mempunyai banyak penyelesaian yang berupa bilangan rasional. Untuk menyelidiki apakah ada penyelesaian bilangan bulat dapat digunakan Persamaan Diophantine, yaitu:

  Diberikan persamaan ax+by=c dengan a, b, dan c bilangan bulat. Persamaan ini mempunyai penyelesaian bulat (x_1,y_1) jika FPB(a,b)|c.

SOAL-SOAL PILIHAN GANDA

1. Misalkan a dan b bilangan bulat sehingga $a(a+b)=34$. Nilai terkecil dari $a-b$ adalah …

   A. -17 B. -32

   C. -34 D. -67

2. Andi membuka sebuah buku setebal 650 halaman, hasil kali nomor halaman yang Nampak adalah 702. Jumlah nomor-nomor halaman buku yang terbuka adalah …

   A. Lebih dari 53 B. Kurang dari 50

   C. Lebih dari 52 D. Kurang dari 54

3. Titik-titik $(1,-1),(3,4),(m,n)$, dan $(11,-1)$ adalah titik-titik sudut suatu jajargenjang, m dan n bilangan bulat. Panjang diagonal terpendeknya adalah …

   A. 10 B. $\sqrt{89}$

   $C.$ $\sqrt{29}$ D. 5

4. Pada bulan Januari harga tas di Toko Asia adalah Rp. 150.000,00. Pada bulan Februari harga tas naik 10%, tetapi bila yang membeli pelajar memperoleh

potongan 10%. Pada bulan Maret harga tas tersebut menjadi Rp. 135.000,00, tetapi pembeli dibebani pajak pembelian sebesar 10% dan diskon bagi pelajar tidak berlaku lagi. Dua orang pelajar, Andi dan Anton membeli tas tersebut. Andi membeli pada bulan Februari, sedangkan Anton membli pada bulan Maret.

Pernyataan berikut yang benar adalah …

A. Jumlah uang yang dikeluarkan Andi sama dengan jumlahuang yang dikeluarkan Anton.

B. Anton mengeluarkan uang sebesar Rp. 150.000,00 untuk membayar tas yang dibelinya.

C. Di antara tiga bulan yang disebut di atas, bulan Januari adalah bulan yang paling menguntungkan bagi pelajar untuk membeli tas.

D. Jumalh uang dikeluarkan Andi lebih besar dari jumlah uang yang dikeluarkan Anton.

5. Untuk sebarang p bilangan prima, misalkan $h = 4p - 4$. Pernyataan berikut yang benar adalah …

A. h tidak dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat dari bilangan asli.

B. h dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat dari bilangan asli.

C. Ada bilangan asli n sehingga berlaku $14p - 4 = n^3$

D. Terdapat n bilangan ganjil sehingga $4p - 4 = n^2$

6. Rata-rata dari empat bilangan berurutan adalam $2m - 1$, maka nilai dari empat kali bilangan terkecil adalah …

A. $8m + 8$

B. $8m + 3$

C. $8m - 7$

D. $8m - 10$

7. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = ...$

A. 2^7

B. 2^{10}

C. 1034

D. 5^4

E. 512

8. Joko tidur malam dari pukul 9.20 dan bangun pagi pukul 4.35. Ia tidur selama ...

A. 4 jam 45 menit
B. 5 jam 15 menit
C. 5 jam 45 menit
D. 7 jam 15 menit
E. 19 jam 15 menit

9. Gabah hasil panen sawah mempunyai kadar air 25%. Setelah dijemur kadar airnya menyusut sebanyak 80%. Kadar air gabah tersebut saat ini adalah ...

A. 2,5%
B. 5%
C. 10%
D. 15%
E. 2%

10. Jika a dan b adalah bilangan bulat genap, dengan a>b, maka banyaknya bilangan bulat ganjil diantara a dan b adalah .....

A. (a-b)/2
B. a – b
C. $(\underset{\cdot}{\tilde{a}}\,\underset{\cdot}{\tilde{b}}^{2})/2$
D. a – b + 1
E. Tidak dapat

11. Harga sepotong kue turun dari Rp. 250,00. menjadi Rp.200,00 Dengan uang Rp. 4.000,00, berapa potong kue lebih banyak yang dapat dibeli .

A. 4
B. 8
C. 20
D. 2
E. 6

SOAL-SOAL URAIAN

1. Jika a,b, dan c adalah bilangan prima dan memenuhi c=17(b-a), berapakah a+b+c?
2. Bilangan x, y, dan z adalah tiga bilangan genap berurutan dengan $x<y<z$. Jika $a = \frac{(z-x)(y-x)}{(z-y)}$, maka nilai a adalah…
3. Jika bilangan lima angka 12a7b habis dibagi 99, tentukan nilai a+b.
4. Bilangan yang terdiri dari 6 digit 3ab82c habis dibagi 8. Tentukan angka c terkecil yang mungkin.

5. Selidiki apakah persamaan berikut mempunyai penyelesaian bilangan bulat

   a. 4x+5y=10 b. 8x+6y=12 c. 5x+8y=11 d. 9x+18y=27

6. Berapakah sisa pembagian 3^{19} oleh 14 ?
7. Berapakah sisa hasil bagi jika 2^{2005} dibagi 13 ?
8. Berapakah nilai n jika 2^n-2^{n-2}=192 ?
9. Berapakah sisa pembagian 7^{100} oleh 9?
10. Jika $\frac{1997}{7000}$ ditulis dalam bentuk decimal, angka berapakah yang terletak ke-`1997 pada tempat desimal ?
11. Banyaknya bilangan genap yang kurang dari 1000 dan hasil kali angka-angka penyusun 180 adalah …
12. Jika $f(n)$ menyatakan banyak factor bilangan asli n, maka $f\left(f\big(f(2009)\big)\right) = \cdots$
13. Lantai suatu ruangan berbentuk persegi. Lantai tersebut akan dipasang keramik berbentuk persegi juga. Bila keramik yang terletak pada diagonalnya sebanyak 33, maka banyaknya keramik yang menutupi lantai adalah …
14. Jumlah 2009 bilangan bulat berurutan sama dengan 6027, maka selisih bilangan terkecil dan terbesar sama dengan …
15. Jumlah semua bilangan riil x yang memenuhi persamaan berikut adalah …
$$(5^x - 25)^3 + ((25)^x - 5)^3 = (5^x + (25)^x - 30)^3$$
16. Dengan menggunakan angka-angka 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 bilangan 8 angka terbesar yang dapat dibentuk dengan syarat kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka yang lain, kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka, kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka, dan kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka adalah ....
17. Hasil suatu bilangan genap dan suatu bilangan ganjil adalah 840. Bilangan ganjil yang terbesar yang memenuhi syarat tersebut adalah ....
18. Jumlah dua bilangan sama dengan 12. Hasil kali dua bilangan tersebut nilainya akan paling besar jika salah satu bilangannya adalah ......

19. Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama denngan x. Sebagai contoh, $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$, $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$ Maka hubungan yang benar di antara dua bilangan bulat $s = \lfloor \sqrt{2} - \sqrt{3} \rfloor$ dan $t = \lfloor \sqrt{2} \rfloor - \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ adalah ... .
20. Jika $a + b = 1$, dan $a^2 + b^2 = 5$, maka $a^3 + b^3 = ...$.