Pembentukan Model : Ayunan (Osilasi) Bebas

Husna 'Arifah,M.Sc
Email : husnaarifah@uny.ac.id

Membangun Model

- Suatu pegas yang digantungkan secara vertikal dari suatu titik tetap.
- Diujung bawah pegas diikatkan suatu benda bermassa m.
- Jika benda tersebut ditarik dengan jarak tertentu dan melepaskannya maka pegas akan bergerak vertikal.
- Kita akan menentukan gerak sistem mekanisnya. Sehingga akan ditinjau gaya-gaya yang bekerja pada pergerakan sistem ini.
- Asumsi : gaya ke bawah sebagai gaya positif dan gaya ke atas sebagai gaya negatif.

MACAM- MACAM GAYA YANG BEKERJA:

1. Gaya gravitasi

$$F_1 = m\,g$$

Ket : m = massa benda
g = perepatan gravitasi (980 cm/s^2)

2. Gaya pegas

$$F_2 = -\,k\,s$$

Ket : k = modulus pegas
s = pergeseran arah vertikal

Tanda minus mengakibatkan nilai F_2 menjadi negatif saat s positif dan F_2 menjadi positif saat s negatif.

- Apabila benda dalam keadaan diam dan tak bergerak, maka sistem dalam keadaan setimbang, resultan gaya nya adalah nol.

$$\boxed{F_1 + F_2 = m\,g - k\,s = 0}$$

s_0 : perubahan panjang pegas saat benda diam

- Adanya gaya tambahan yang disebabkan oleh pergeseran benda dari keadaan setimbang. Gaya tambahan itu adalah *ky*. Untuk *y*, besarnya pergeseran benda.
- Resultan gaya menjadi :

$$\boxed{F_1 + F_2 - ky = -\,ky \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)}$$

Sistem Takteredam : Persamaan dan Penyelesaian

- Jika redaman dari suatu sistem semakin kecil sehingga dapat diabaikan, maka (4) adalah resultan dari semua gaya.
- Persamaan diferensial dapat diturunkan dengan Hukum Newton kedua :

$$\boxed{\textit{Massa x Percepatan} = \textit{Gaya}}$$

Percepatan = y" sehingga diperoleh

$$\boxed{m\,y'' = -\,k\,y \;\leftrightarrow\; my'' + ky = 0}$$

ADS PD BERIKUT : *MY'' + KY = 0*

Misal : $\dfrac{dy}{dx} = y' = \lambda$

maka persamaan (5) menjadi :

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$m\lambda^2 = -k$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, i \quad atau\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$$

Sehingga diperoleh penyelesaian umum dari persamaan (5):

$$y(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

Untuk , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ penyelesaian umum menjadi :

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0\,t$$

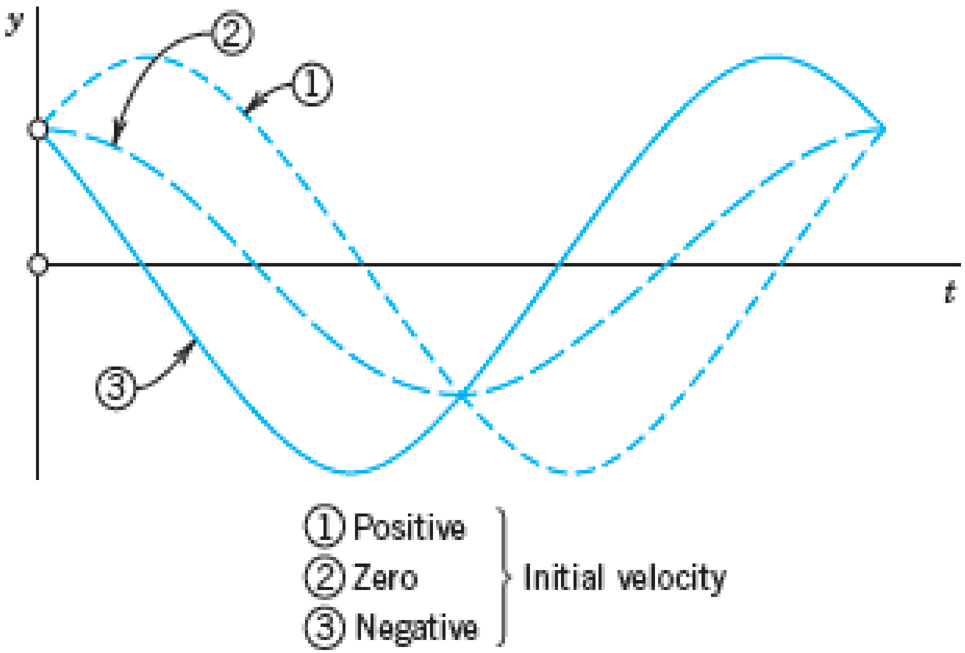
Gerak sistem tersebut dinamakan osilasi harmonik. Gambar 35 memperlihatkan bentuk dari (6) yang berkaitan dengan berbagai pergeseran awal positif y(0) [yang menentukan A = y(0) pada Persamaan (6)] dan kecepatan awal yang lain y'(0)[setiap menentukan nilai B pada Persamaan (6), karena $y'(0) = \omega_0 B$]

Dengan menerapkan rumus penjumlahan untuk cosinus, Persamaan (6) dapat dituliskan:

(6*)

$$y(t) = C\cos(w_0 t - \delta) \qquad \left(C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \tan\delta = \frac{A}{B} \right)$$

Karena periode fungsi trigonometri dalam (6) adalah $2\pi/w_0$, benda itu melakukan $w_0/2\pi$ getaran tiap detik. Kuantitas $w_0/2\pi$ dinamakan frekuensi getaran dan diukur dalam getaran tiap detik. Nama lain untuk getaran/detik adalah hertz(Hz)



Gambar 35

CONTOH 1. sistem tak teredam. osilasi harmonik

Jika suatu bola besi yang beratnya w= 89,00 nt (berkisar 20lb) meregangkan pegas sejauh 10,00 cm (berkisar 4 inch), berapa getaran (cycle) per menit yang akan dibuat oleh sistem pegas-massa ini? Bagaimanakah bentuk pergerakan ini jika bola besi itu kita tarik ke bawah hingga bertambah 15,00 cm (berkisar 6 inch) lagi ?

Penyelesaian :

Diketahui :

w = 89,00 nt

s = 10,00 cm = 0,1 m

y = 15,00 cm = 0,15 m

Akan dicari :

$w_0 / 2\pi$ = ... ? Bagaimanakah bentuk pergerakannya ?

$$w_0/2\pi = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$$

$$k = \frac{w}{s} = \frac{89{,}00}{0{,}1000} = 890{,}0\ nt/m$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{89{,}00}{9{,}8000} = 9{,}082\ kg$$

$$Sehingga,\quad \frac{w_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{890}{9{,}082}}}{2\pi} = \frac{9{,}899}{6{,}28} = 1{,}576\ Hz$$

$$atau\quad \frac{w_0}{2\pi} = 1{,}576\ Hz\ x\ 60 = 94{,}5\ getaran\ per\ menit$$

Dari persamaan (6) dan kondisi awal y(0)

$y(t) = A \cos w_0 t + B \sin w_0 t$

$y(0) = A \cos 0 + B \sin 0$

$0{,}15 = A$

$y'(t) = w_0 B$

$y'(0) = w_0 B = 0$

Jadi, pergerakannya adalah

$$y(t) = A \cos w_0 t + \underbrace{B \sin w_0 t}_{0}$$

$y(t) = 0{,}15 \cos 9{,}899\, t$ [meter] atau $0{,}492 \cos 9{,}899 t$ [ft]

SISTEM TEREDAM : PERSAMAAN DAN PENYELESAIAN

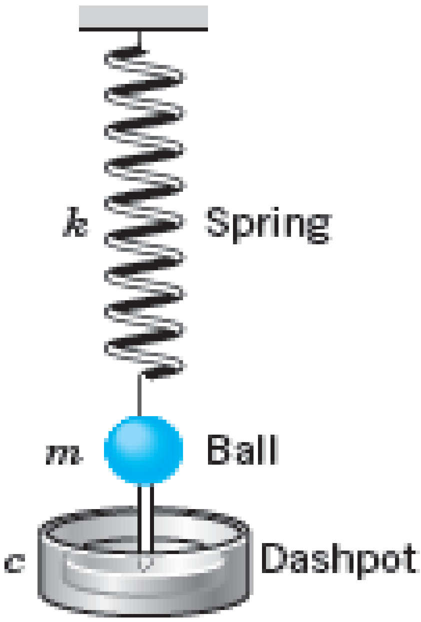


Fig. 36.
Damped system

Jika kita hubungkan itu dengan suatu jambangan (gambar 36), maka kita harus memperhitungkan redaman yang melekat pada sistem itu. Gaya redamannya mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak pada saat itu, dan kita akan menganggap bahwa gaya ini sebanding dengan kecepatan y’ = dy/dt dari benda itu.

Jadi, gaya redamannya berbentuk

$$F_3 = -cy'$$

Sekarang kita perlihatkan bahwa konstanta redaman c positif. Jika y' positif, maka benda bergerak ke bawah (dalam arah-y positif) dan –cy' haruslah suatu gaya yang mengarah ke atas, jadi menurut perjanjian, -cy'<0 , yang mengakibatkan c>0. untuk y' yang negatif, benda bergerak ke atas dan –cy' haruslah menyatakan suatu gaya yang mengarah ke bawah, jadi –cy'>0 yang mengakibatkan c>0

Sekarang resultan gaya yang bekerja pada benda adalah [lihat (4)]

$$F_1+F_2+F_3= -ky-cy'$$

Sehingga menurut Hukum Newton Kedua,

$$my'' = -ky-cy'$$

Dan kita lihat bahwa gerak sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linier yang memiliki koefisien konstan

$$my''+ky+cy' = 0 \qquad \text{.................................(7)}$$

Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$

Akar-akarnya adalah

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Dengan menggunakan notasi singkat

(8) $$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \text{dan} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Dapat kita tuliskan

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

- Untuk mengilustrasikan gerak benda pada sistem pegas bebas teredam, akan diuraikan tiga kasus, yaitu :
  - Kasus I $c^2 > 4mk$: Redaman lebih
  - Kasus II $c^2 < 4mk$: Redaman kurang
  - Kasus III $c^2 = 4mk$: Redaman kritis

Kasus I : Redaman Lebih

- Pada sistem teredam lebih $c^2 > 4mk$ sehingga akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

- Solusi umum persamaan gerak pada sistem teredam lebih adalah:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dari kasus ini, kita dapat mengetahui bahwa benda tersebut tak berosilasi

- Pada kenyataannya nilai $\lambda_{1,2} < 0$ sehingga untuk $t \to \infty$ maka $y(t) = 0$ Jika $y(t) = 0$ kita turunkan, yaitu:

$$y'(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t}\left(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

  maka $y'(t) = 0$ hanya jika $\left(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right) = 0$
- Jadi secara umum gerak benda pada pegas pada sistem teredam lebih mempunyai perilaku yang sama dengan sistem teredam kritis, yaitu $t \to \infty$ maka $y(t) = 0$ dan hanya memiliki satu titik puncak maksimum dan minimum pada t=0.

KASUS II : REDAMAN KURANG

- Pada sistem teredam kurang $c^2 < 4mk$ sehingga akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

- Solusi umum persamaan gerak pada sistem teredam kurang adalah:

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t};\ \text{dengan } \alpha = -c/2m\ , \beta = \frac{\sqrt{(4mk - c^2)}}{2m}$$

$$= e^{(-c/2m)t}(A\cos \beta t + B \sin \beta t)$$

- Dan diasumsikan $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ dan $\tan\delta = \frac{B}{A}$

  maka : $y = e^{(-c/2m)t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

  => $y = Ce^{(-c/2m)t}\left(\frac{A}{C}\cos\beta t + \frac{B}{C}\sin\beta t\right)$

karena $\tan\delta = \frac{B}{A}$,maka $\cos\delta = \frac{A}{C}$ dan $\sin\delta = \frac{B}{C}$

  => $y = Ce^{(-c/2m)t}(\cos\delta\cos\beta t + \sin\delta\sin\beta t)$

  => $y = Ce^{(-c/2m)t}\cos(\beta t - \delta)$

  Jadi, solusi persamaan tersebut

$$y = Ce^{(-c/2m)t}\cos(\beta t - \delta)$$

Kasus III: Redaman Kritis

- Pada sistem teredam kritis $c^2 = 4mk$ maka $\beta = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

  sehingga memiliki akar karakteristik yang sama yaitu:

  $$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m}$$

- Solusi umum persamaan gerak pada sistem teredam kritis adalah:

  $$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{\left(\frac{-c}{2m}\right)t}$$

- Karena fungsi eksponensial tak pernah 0 dan c_1+c_2t paling banyak satu lintasan melalui posisi kesetimbangan (y=0)

Contoh soal (Kasus Gerak Teredam)

- Jika suatu bola besi yang beratnya W=89,00nt (20 lb) meregangkan pegas sejauh 10cm (4 inch), bagaimanakah pergerakan ini jika bola besi tersebut kita tarik ke bawah hingga bertambah 15cm (6 inch) dan mempunyai redaman sebesar
  a. c=200kg/s
  b. c=100kg/s
  c. c=179,8kg/s

- Diketahui :

  W=89nt, s=10cm=0,1meter, $g=9{,}8 m^2/s$
- Ditanya :

  y(t) jika a)c=200kg/s b)c=100kg/s

  c)c=179,8kg/s
- m=W/g=89/9,8=9,082,

  k=W/s=89/0,1=890

  $\boldsymbol{\omega}_0=\sqrt{(k/m)}=\sqrt{(890/9{,}082)}=9{,}899$

  $f= \boldsymbol{\omega}_0/2\Pi=9{,}899/2\Pi=1{,}576$Hz=94,5getaran/menit

  y(0)=0,15meter

- Penyelesaian :

a) $my''+cy'+ky=0$

$9{,}082y''+200y'+890y=0$

$9{,}082\lambda^2+200\lambda+890=0$

$\lambda_{1,2}= -c/2m \mp 1/2m\sqrt{(c^2-4mk)}$

$= -200/18{,}164 \mp 1/2m\sqrt{(200^2-4(9{,}082)890)}$

$= -11{,}01 \mp 4{,}822$

$\lambda_1 = -6{,}190$ dan $\lambda_2 = -15{,}83$

- $y(t)=c_1e^{-6,190t} + c_2e^{-15,83t}$

  Karena $y(0) = 0,15$, maka $c_1 + c_2 = 0,15$

  $y'(0)= -6,190c_1 – 15,83c_2 = 0$

  Setelah disubtitusi, $c_1 = 0,2463$ dan $c_2 = -0,0963$
- Jadi, penyelesaiannya adalah

  $y(t)=0,2463e^{-6,190t} – 0,0963e^{-15,83t}$
- Nilainya akan mendekati 0 jika $t\to\backsim$, dan pada saat nilai mendekati 0, benda berhenti bergerak.

- Penyelesaian :

  b) $my'' + cy' + ky = 0$

  $9{,}082y'' + 100y' + 890y = 0$

  $9{,}082\lambda^2 + 100\lambda + 890 = 0$

  $\lambda_{1,2} = -c/2m \mp 1/2m\sqrt{(c^2 - 4mk)}$

  $= -100/18{,}164 \mp 1/(2(9{,}082))\sqrt{(100^2 - 4(9{,}082)890)}$

  $= -5{,}506 \mp i8{,}227$

  $\lambda_1 = -5{,}506 + i8{,}227$ dan

  $\lambda_2 = -5{,}506 - i8{,}227$

- $y(t)=e^{-5,506t}\,(c_1\cos 8,227t + c_2\sin 8,227t)$

  Karena $y(0) = 0,15$, maka $c_1 = 0,15$

  $y'(0) = -5,506c_1 + 8,227c_2 = 0$

  Setelah disubtitusi, $c_1 = 0,15$ dan $c_2 = 0,1004$
- Jadi, penyelesaiannya adalah $y(t)= e^{-5,506t}\,(0,15\cos 8,227t + 0,1004\sin 8,227t)$

Osilasi teredam

- Penyelesaian :

c) $my'' + cy' + ky = 0$

$9{,}082y'' + 179{,}8y' + 890y = 0$

$9{,}082\lambda^2 + 179{,}8\lambda + 890 = 0$

$\lambda_{1,2} = -c/2m \mp 1/2m\sqrt{(c^2 - 4mk)}$

$= -179{,}8/18{,}164 \mp 1/(2(9{,}082))\sqrt{(179{,}8^2 - 4(9{,}082)890)}$

$= -9{,}899$

$\lambda_{1,2} = -9{,}899$

- $y(t)=e^{-9,899t}(c_1 + c_2t)$

  Karena $y(0) = 0,15$, maka $c_1 = 0,15$

  $y'(0) = -9,899c_1 + c_2 = 0$

  Setelah disubtitusi, $c_1 = 0,15$ dan $c_2 = 1,485$
- Jadi, penyelesaiannya adalah

  $y(t)= e^{-9,899t}(0,15 + 1,485t)$
- Nilainya akan mendekati 0 jika t→∽ secara cepat dan monoton.

Kasus I. Gerakan Teredam Berlebih

19. Tunjukkan bahwa agar (9) memenuhi syarat awal $y(0) = y_0$ dan $v(0) = v_0$ haruslah

$$c_1 = \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0 + \frac{v_0}{\beta}\right]}{2}$$

dan

$$c_2 = \frac{\left[\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0 - \frac{v_0}{\beta}\right]}{2}$$

Penyelesaian :

Persamaan (9) $y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$

$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0$

$y_0 = c_1 + c_2$ ....(1)

$v(t) = y'(t) = -(\alpha-\beta)c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha+\beta)\, c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$

$v(0) = -(\alpha-\beta)c_1 e^0 - (\alpha+\beta)\, c_2 e^0$

$v_0 = -(\alpha-\beta)c_1 - (\alpha+\beta)\, c_2$ ....(2)

Dengan proses eliminasi pada (1) dan (2), diperoleh :

$$c_1 = \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0 + \frac{v_0}{\beta}\right]}{2}$$ dan $$c_2 = \frac{\left[\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)y_0 - \frac{v_0}{\beta}\right]}{2}$$

Kreyszic,Erwin. "*Advanced Engineering Mathematics*".6th Edition 1993. United States : John Wiley & Sons,Inc