**Pembentukan Model Ayunan (Osilasi) Dipakai: Resonansi**

Di dalam Pasal 2.6 kita telah membahas osilasi bebas dari suatu benda pada suatu pegas seperti terlihat di dalam Gambar 48. Gerak ini diatur oleh persamaan homogen

(1) $$my'' + cy' + ky = 0$$

dimana $m$ adalah massa benda, $c$ konstanta redaman, dan $k$ modulus pegas. Sekarang kita akan mengembangkan pembahasan, dengan menganggap adanya suatu gaya peubah $r(t)$ yang bekerja pada sistem itu. Ini Dengan cara ini kita akan menjadi terbiasa dengan suatu kenyataan yang sangat menarik yang bersifat mendasar di dalam matematika teknik (rekayasa), khususnya dengan resonansi.

Pembentukan Model

Kita ingat bahwa Persamaan (1) diperoleh dengan meninjau gaya-gaya yang bekerja pada benda dan dengan menggunakan hukum Newton kedua. Dari hasil ini terlihat jelas bahwa persamaan diferensial yang berkaitan dengan situasi ini diperoleh dari (1) dengan menambahkan gaya $r(t)$, penambahan ini menghasilkan

$$my'' + cy' + ky + [-r(t)] = 0$$

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

$r(t)$ dinamakan masukkan (input) atau gaya dorong (driving force), dan penyelesaiannya dinamakan hasil (output) atau reaksi (response) sistem terhadap gaya dorong. (Lihat juga pasal 1.7) Gerak yang dihasilkan dinamakan gerak dipaksa, yang berbeda dengan gerak bebas yang berkaitan dengan (1), yaitu suatu gerak tanpa adanya gaya luar $r(t)$.

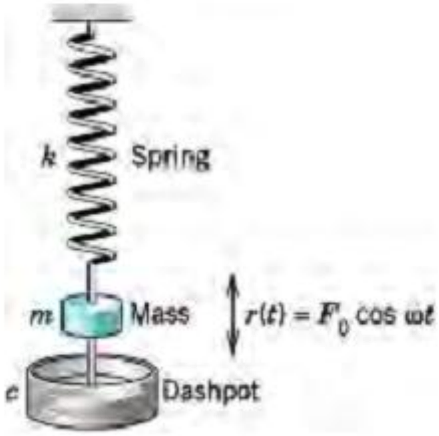
Masukkan periodik merupakan hal khusus yang menarik. Kita akan membahas suatu masukkan sinusoidal, katakanlah

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

Masukkan periodik yang lebih rumit akan dibahas di dalam Pasal 10.7.

Persamaan diferensial yang dibahas sekarang adalah

(2) $$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$




Gambar 48

Penyelesaian Persamaan

Kita ingin menentukan dan membahas penyelesaian umum dari (2) yang menyatakan hasil umum dari sistem getaran kita. Karena penyelesaian umum dari persamaan homogen (1) yeng berkaitan dapat diketahui dari Pasal 2.6, sekarang kita harus menetukan suatu penyelesaian khusus $y_p(t)$ dari (2).

Hal ini dapat dilakukan dengan metode koefisien taktentu (Pasal 2.12), dimulai dari

(3) $$y_p(t) = a\,cos\,\omega t + b\,sin\,\omega t$$

Dengan mendiferensiasikan fungsi ini kita peroleh

$$y_p' = -\omega a\,sin\,\omega t + \omega b\,cos\,\omega t$$

$$y_p'' = -\omega^2 a\,cos\,\omega t - \omega^2 b\,sin\,\omega t$$

Kita substitusikan ungkapan ini ke dalam (2) dan kita kumpulkan suku-suku $cosinus$ dan $sinus$:

$$m(-\omega^2 a\,cos\,\omega t - \omega^2 b\,sin\,\omega t) + c(-\omega a\,sin\,\omega t + \omega b\,cos\,\omega t) + k(a\,cos\,\omega t + b\,sin\,\omega t)$$
$$= F_0\,cos\,\omega t$$

$$-m\omega^2 a\,cos\,\omega t - m\omega^2 b\,sin\,\omega t - c\omega a\,sin\,\omega t + c\omega b\,cos\,\omega t + ka\,cos\,\omega t + k\,b\,sin\,\omega t = F_0\,cos\,\omega t$$

$$[(k - m\omega^2)a + \omega cb]\,cos\,\omega t + [-\omega ca + (k - m\omega^2)b]\,sin\,\omega t = F_0\,cos\,\omega t$$

Dengan menyamakan koefisien suku-suku $cosinus$ dan $sinus$ pada kedua ruas kita peroleh

(4) $$(k - m\omega^2)a + \omega cb = F_0$$

$$-\omega ca + (k - m\omega^2)b = 0$$

Mencari nilai a dan b

$b = \frac{\omega ca}{k - m\omega^2}$, maka

$$(k - m\omega^2)a + \ \omega c \ \frac{\omega ca}{k - m\omega^2} = F_0$$

$$\frac{(k - m\omega^2)^2 \ a + \omega^2 c^2 a}{(k - m\omega^2)} = F_0$$

$$a\left(\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}{(k - m\omega^2)}\right) = F_0$$

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

Untuk nilai b

$$-\omega c\left(F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\right) + (k - m\omega^2)b = 0$$

$$b = \omega c\left(F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\right) \cdot \frac{1}{(k - m\omega^2)}$$

$$b = F_0 \ \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

asalkan penyebutnya tidak nol. Jika kita ambil $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

$$\omega_0^2 = k/m$$

$$k = \omega_0^2 \ m$$

(5) $$a = F_0 \frac{(\omega_0^2 \ m - m\omega^2)}{(\omega_0^2 \ m - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

$$b = F_0 \ \frac{\omega c}{(\omega_0^2 \ m - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

Jadi kita memperoleh penyelesaian umum

(6) $$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Dimana $y_h$ merupakan penyelesaian umum Persamaan (1) dan $y_p$ diberikan oleh (3) dengan koefisien (5).

Pembahasan Jenis Penyelesaian

Sekarang kita akan membahas perilaku sistem mekanis, dengan membedakan dua kasus $c = 0$ (tanpa redaman) dan $c > 0$ (redaman). Kedua kasus ini akan berkaitan dengan dua jenis hasil yang berbeda.

Kasus 1. Osilasi dipaksa tanpa redaman

Jika tidak ada redaman, maka $\boldsymbol{c = 0}$. Terlebih dahulu kita misalkan $\omega^2 \neq \omega_0^2$ (dimana $\boldsymbol{\omega_0^2 = k/m},$ seperti di dalam Pasal 2.6).

$$y_p(t) = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos \omega t = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$\boldsymbol{\omega_0^2 = k/m},$ maka

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(k/m - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k(1 - \frac{\omega^2}{k/m})} \cos \omega t = \frac{F_0}{k(1 - \omega^2/{\omega_0}^2)} \cos \omega t$$

$$= \frac{F_0}{k(1 - (\omega/\omega_0)^2)} \cos \omega t$$

(7) $$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k(1 - (\omega/\omega_0)^2)} \cos \omega t$$

Dari bentuk ini dan (6*) di dalam Pasal 2.6 kita memperoleh penyelesaian

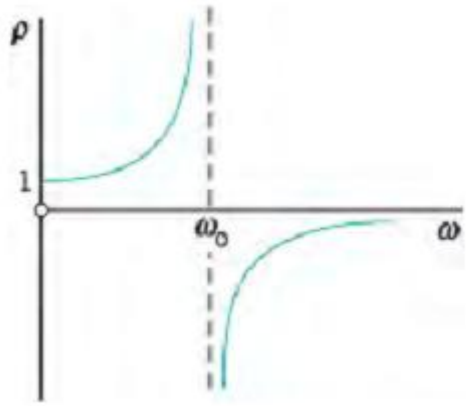
(8) $$y(t) = C \cos (\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{k(1 - (\omega/\omega_0)^2)} \cos \omega t$$

Hal ini menyatakan suatu superposisi dari dua osilasi harmonik : frekuensinya adalah “frekuensi wajar” $\omega_0/2\pi$ [gelombang/detik] dari sistem (yaitu frekuensi dari gerak bebas takteredam) dan frekuensi $\omega/2\pi$ dari masukkan.

Dari (7) kita melihat bahwa amplitudo maksimum dari $y_p$ adalah

(9) $a_0 = \frac{F_0}{k}\rho$ dimana $\rho = \frac{1}{1-(\omega/\omega_0)^2}$

Bentuk ini bergantung pada $\omega$ dan $\omega_0$. Bila $\omega \to \omega_0$, maka kuantitas $\rho$ dan $a_0$mendekati takhingga. Gejala perangsangan osilasi besar dengan memasangkan masukkan dan frekuensi wajar ($\omega = \omega_0$) dikenal sebuah resonansi, dan mempunyai kepentingan mendasar dalam penelaahan sistem getaran (lihat di bawah). Kuantitas $\rho$ dinamakan faktor resonansi (Gambar 49). Dari (9) kita lihat bahwa $\rho/k$ adalah perbandingan antara amplitudo fungsi $y_p$ dan masukkan.




Di dalam kasus resonansi, Persamaan (2) menjadi

$k = m\,\omega_0^2$ dan $my'' + ky = F_0 \cos \omega t$ maka,

$my'' + m\,\omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t$ $(:m)$

(10) $y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$

Menggunakan aturan Modifikasi halaman 120

**Aturan Modifikasi** : Jika $r(x)$ merupakan penyelesaian persamaan homogen dan persamaan $my'' + cy' + ky = r(t)$ , maka kalikan $y_p$ yang kita pilih dengan $x$.

$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

Dengan mensubstitusikan bentuk ini ke dalam (10) kita memperoleh $a = 0, b = F_0/2m\omega_0$ dan (Gambar 50)

(11) $y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\, t \sin \omega_0 t$

Kita lihat bahwa $y_p$ makin lama makin besar. Di dalam praktek, hal ini berarti bahwa sistem dengan redaman yang angat kecil dapat mengalami getaran besar yang dapat menghancurkan sistem itu, nanti kita akan kembali pada aspek praktis resonansi tersebut di dalam pasal ini.

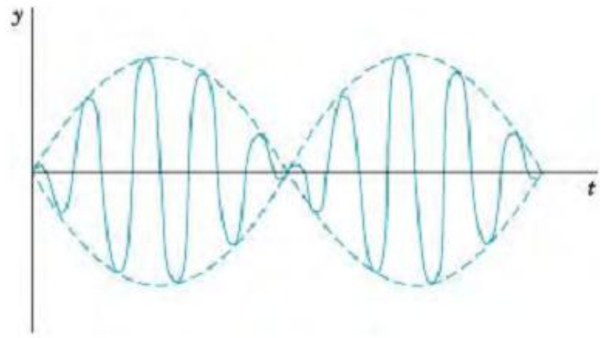
Tipe osilasi lain yang menarik dan sangat penting, diperoleh bila $\omega$ cukup dekat pada $\omega_0$. Sebagai contoh, ambillah penyelesaian khusus [lihat (8)]

(12) $$y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (cos\ \omega t - cos\ \omega_0 t) \qquad (\omega \neq \omega_0)$$

yang bersesuaian dengan syarat awal $y(0) = 0, y^{'}(0) = 0$. Hal ini dapat ditulis [lihat (12) di dalam Lampiran 3]

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t\ sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

Karena $\omega$ dekat dengan $\omega_0$ maka selisih $\omega_0 - \omega$ kecil, sehingga perode fungsi $sinus$ yang terakhir adalah besar, dan kita memperoleh suatu penyelesaian dengan jenis yang diperlihatkan di dalam Gambar 51.




Kasus 2. Osilasi dipaksa teredam

Jika ada tredaman, maka $c > 0$, dan kita ketahui dari Pasal 2.6 bahwa penyelesaian umum $y_h$ dari (1) adalah

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(A\ cos\ \omega^* t\ + B\ sin\ \omega^* t) \qquad (\alpha = \frac{c}{2m} > 0)$$

dan penyelesaian ini mendekati nol bila $t$mendekati takhingga (secara prkatis, setelah jangka waktu yang cukup lama) yakni, penyelesaian umum (6) dari (2) sekarang menyatakan penyelesaian peralihan sementara (penyelesaian transient) dan mendekati penyelesaian keadaan (mantap) $y_p$. Dengan demikian dengan jangka waktu yang cukup lama, hasil yang berkaitan dengan suatu masukkan sinusoidal murni, praktis akam menjadi suatu osilasi harmonik yang frekuensinya sama dengan frekuaensi masukkan. Situasi inilah yang terjadi di dalam prektek, sebab tidak ada sistem fisis yang tanpa redaman sama sekali.

Sementara di dalam kasus tanpa redaman, amplitudo $y_p$ mendekati takhingga bila $\omega$ mendekati $\omega_0$. Hal ini tidak terjadi di dalam kasus teredam : di dalam kasus ini amplitudo selalu hingga, tetapi mungkin mempunyai maksimum untuk suatu $\omega$ yang bergantung pada $c$. Inilah yang mungkin dinamakan resonansi praktis, Hal ini penting, sebab meperlihatkan bahwa suatu masukkan dapat merangsang oosilasi dengan amplitudo yang demikian besarnya sehingga dapat merusak sistem. Kasus seperti ini terjadi di dalam praktek, khususnya pada masa-masa awal ketika pengetahuan tentang resonansi masih sedikit. Mesin, mobil, kapal, pesawat terbang dan jembatan adalah sistem mekanis yang bergetar, dan kadang-kadang agak sukar untuk menemukan konstruksi yang benar-benar bebas dari efek resonansi yeng tidak diinginkan secara lengkap.

Amplitudo dari $y_p$

Untuk menyelidiki amplitudo dari $y_p$ sebagai suatu fungsi dari $\omega$, kita tuliskan (3) di dalam bentuk

(13) $$y_p(t) = C^* \cos\ (\omega t - \eta)$$

Dimana, menurut (5)

$$C^*(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}$$

(14) $$\tan \eta = \frac{b}{a} = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Sekarang kita tentukan maksimum dari $C^*(\omega)$. Dengan meyamakan $dC^*/d\omega$ dengan nol kita menemukan

$$[-2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2]\, \omega = 0$$

Ungkapan di dalam tanda kurung adalah nol bila

(15) $$c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Untuk redaman yang cukup besar ($c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$) persamaan (15) tidak mempunyai penyelesaian riil, dan $C^*$ monoton turun bila $\omega$ bertambah (Gambar 52). Jika $c^2 < 2mk$, maka (15) mempunyai suatu penyelesaian riil $\omega = \omega_{maks}$ yang bertambah bila $c$ menurun dan mendekati $\omega_0$ bila $c$ mendekati nol.

Amplitudo $C^*(\omega)$ mempunyai maksimum pada $\omega = \omega_{maks}$ dan dengan memasukkan $\omega = \omega_{maks}$ ke dalam (14) kita temukan

(16) $$C^*(\omega_{maks}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

Kita lihat bahwa $C^*(\omega_{maks})$ adalah hingga, bila $c > 0$. Karena $\frac{dC^*(\omega_{maks})}{dc} < 0$ bila $c^2 < 2mk$, maka nilai $C^*(\omega_{maks})$ bertambah bila $c(< \sqrt{2mk})$ berkurang, dan mendekati takhingga bila $c$ mendekati nol, sesuai dengan hasil kita di dalam Kasus 1. Gambar 52 hal.128 memperlihatkan penguatan (amplifikasi) $C^*/F_0$ (perbandingan antara amplitudo keluaran dan masukkan) sebagai suatu fungsi dari $\omega$ untuk $m = 1,\ k = 1$, dan berbagai nilai konstanta redaman $c$.

Sudut $\eta$ di dalam (14) dinamakan sudut fase atau kelambatan fase (phase lag) (Gambar 53 hal 128), sebab sudut ini mengukur kelambatan dari hasil terhadap masukkan. Jika $\omega < \omega_0$, maka $\eta < \pi/2$, jika $\omega = \omega_0$, maka $\eta = \pi/2$, dan jika $\omega > \omega_0$, maka $\eta > \pi/2$.

Pada pasal berikut, kita tunjukkan bahwa sistem pegas-masa yang baru saja kita bahas analog langsung dengan bidang teknik listrik, yaitu rangkaian RLC. Ini akan merupakan peragaan yang mengesankan dari penggabungan kegunaan matematika, juga akan mengilustrasikan bahwa sistem fisika yang jauh berbeda dapat memiliki model matematis yang sama dan kemudian dapat diperlukan dan diselesaikan dengan metode yang sama.

Sumber Pustaka

Kreyszic,Erwin. “*Advanced Engineering Mathematics*”.6th Edition 1993. United States : John Wiley &Sons,Inc