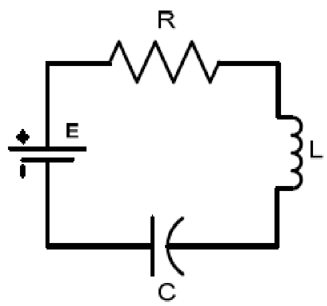
Email :husnaarifah@uny.ac.id

PEMBENTUKAN MODEL RANGKAIAN LISTRIK

Pada sub bab ini akan membahas tentang sistem listrik. Pembahasan ini berperan sebagai suatu contoh yang mengesankan dari kenyataan penting, bahwa sistem fisis yang seluruhnya berbeda dapat dikaitkan dengan model matematis yang sama, dalam hal ini terdapat pada persamaan diferensial yang sama. Dalam pembahasan ini akan diperoleh kaitan diantara sistem mekanis dan listrik yang tidak saja bersifat kualitatif , tetapi juga kuantitatif, bahwa untuk suatu sistem mekanis yang diberikan dapat membangun suatu rangkaian listrik yang arusnya akan memberikan nilai eksak dari pergeseran didalam sistem mekanis itu bila kita mendapatkan faktor skalar yang cocok.

- PEMBENTUKAN MODEL
  Gambar rangkaian RLC



Pada rangkaian RLC terdiri dari suatu resistor (ohm) dilambangkan R, suatu indikator yang mempunyai induktansi (henry) dilambangkan L, dan sebuah kapasitor (farad) dilambangkan C. dihubungkan secara seri dengan suatu sumber gaya gerak listrik (volt) yang dilambangkan E(t) dimana t melambangkan waktu.

Persamaan untuk arus I(t) dalam ampere pada rangkaian RLC adalah:

1. Melalui induktor
$$E_L = LI'$$
2. Melalui resistor (hukum ohm)
$$E_R = RI$$
3. Melalui kapasitor
$$E_c = \frac{1}{c}\int I(t)dt$$

Jumlah ketiga tegangan sama dengan gaya gerak listrik E(t). Ini merupakan hukum tegangan Kirchhoff(1.8), yang analog dengan hukum Newton kedua (2.6). Dengan nilai $E(t) = E_0 \sin \omega t \ (E_0\ konstanta)$ akan menghasilkan :

$$E_L + E_R + E_c = E(t)$$

$LI' + RI + \frac{1}{c}\int I(t)dt = E_0 \sin \omega t$ (1’)

Untuk menghilangkan bentuk integral dalam persamaan (1’), maka dideferensialkan terhadap t,

$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right) + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{c}\int \frac{d}{dt} I\, dt = \frac{d}{dt}E_0 \sin \omega t$

$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E_0\omega \cos \omega t$

$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega \cos \omega t$ (1)

Apabila $I = Q'$ dengan substitusikan ke persamaan (1’),maka diperoleh

$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c}\int \frac{dQ}{dt}\, dt = E_0 \sin \omega t$

$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0 \sin \omega t$

$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E_0 \sin \omega t$ (1’’)

Pada sebagian masalah arus, I(t) lebih penting daripada Q(t), maka akan lebih diperhatikan persamaan (1) dibandingkan persamaan (1’’).

Penyelesaian Persamaan (1)

Untuk memperoleh penyelesaian khusus dari (1), dapat diselesaikan dengan bekerja seperti dalam pasal 2.13. Suatu penyelesaian khusus $I_p(t)$ dari (1) dapat dilakukan dengan metode koefisien tak tentu pada pasal (2.12). Karena dalam persamaan (1) bentuk $r(x) = k \sin \omega x$, maka penyelesaian khusus$I_p(t)$ dari (1) ,yaitu

$I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ (2)

$I_p'(t) = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t$

$I_p''(t) = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t$

Dengan mensubstitusi (2) kedalam (1), maka

$L(-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t) + R(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) + \frac{1}{c}(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = E_0\omega \cos \omega t$

$\Leftrightarrow \cos \omega t\,(Rb\omega + (\frac{1}{c} - L\omega^2)a) + \sin \omega t(-Ra\omega + (\frac{1}{c} - L\omega^2)b) = E_0\omega \cos \omega t$

Dengan menyamakan koefisiennya maka

- Untuk bagian koefisien dari sin ωt

$$(-Ra\omega + \left(\frac{1}{c} - L\omega^2\right) b = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{c} - L\omega^2\right) b = Ra\omega$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{\omega R}{\frac{1}{c} - L\omega^2} a = \frac{R}{\frac{1}{\omega c} - \omega L} a$$

Jika didefinisikan reaktansi $S = \omega L - \frac{1}{\omega c}$, maka

$$b = -\frac{R}{S} a$$

- Untuk bagian koefisien dari cos ωt

$$Rb\omega + \left(\frac{1}{c} - L\omega^2\right) a = E_0\omega \qquad \text{(ii) ; dibagi } \omega$$

$$\Leftrightarrow Rb + \left(\frac{1}{\omega c} - L\omega\right) a = E_0$$

$$\Leftrightarrow R\frac{-R}{S} a - Sa = E_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{R^2}{S} a - Sa = E_0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-R^2 - S^2}{S}\right) a = E_0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{E_0}{\frac{-(R^2 + S^2)}{S}}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2}$$

Dengan mensubstituskan ke persamaan b yang telah didapat diatas, diperoleh

$$b = -\frac{R}{S}\left(-\frac{E_0 S}{R^2 + S^2}\right) = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} \qquad a = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2} \qquad (3)$$

Dengan $R \neq 0$ sehingga penyebut didalam (3) tidak nol. Hasilnya bahwa (2) dengan a dan b yang diberikan oleh (3), merupakan penyelesaian khusus dari (1). Dimana dengan menggunakan (14) pada lampiran 3

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\frac{E_0 S}{R^2 + S^2})^2 + (\frac{E_0 R}{R^2 + S^2})^2} = \sqrt{{E_0}^2 \frac{S^2 + R^2}{(R^2 + S^2)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + S^2}}$$

$$\tan\theta = -\frac{a}{b} = -\frac{-\frac{E_0 S}{R^2+S^2}}{\frac{E_0 R}{R^2+S^2}} = \frac{S}{R}$$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{S}{R} \rightarrow R = S\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$; $\sin\theta = \frac{S}{\sqrt{R^2+S^2}}$

Dengan menggunakan a dan b yang telah diperoleh, dapat dituliskan bentuk I_p, kedalam bentuk lain, yaitu

$$I_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0 S}{R^2+S^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{R^2+S^2}\sin\omega t$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0}{R^2+S^2}(\,S\ \cos\omega t - R\ \sin\omega t\,)$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0}{R^2+S^2}\left(\,S\ \cos\omega t - S\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \sin\omega t\,\right)$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0\,S}{R^2+S^2}\left(\frac{\sin\theta\cos\omega t - \cos\theta\ \sin\omega t}{\sin\theta}\right)$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0\,S}{R^2+S^2}\,\frac{\sqrt{R^2+S^2}}{S}\,(\sin\theta\cos\omega t - \cos\theta\ \sin\omega t\,)$$

$$I_p(t) = -\frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}(\sin\theta\cos\omega t - \cos\theta\ \sin\omega t\,)$$

$$I_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\ \sin\theta)$$

$$I_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}\ \sin(\omega t - \theta)$$

$$I_p(t) = I_0\sin(\omega t - \theta) \qquad (5)$$

Kuantitas $\sqrt{R^2+S^2}$ dinamakan impedansi. Dari rumus diatas dapat dilihat bahwa impedansi sama dengan $\frac{E_0}{I_0}$, kurang lebihnya analog dengan $\frac{E}{I} = R$ (hukum ohm).

Sebuah penyelesaian umum dari persamaan homogen yang berkaitan dengan (1) adalah

$$I_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dimana $\lambda_1 dan\ \lambda_2$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristiknya.

$\lambda^2 + \frac{R}{L}\boldsymbol{\lambda} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}} = \mathbf{0}$;

- $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{R}{L}$

Yang dapat dituliskan dalam bentuk $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ dan $\lambda_2 = -\alpha - \beta$

$(-\alpha + \beta) + (-\alpha - \beta) = -\frac{R}{L}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-2\alpha} = -\frac{R}{L}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{R}{2L}$

- $\lambda_1 . \lambda_2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}}$
  $\Leftrightarrow (-\alpha + \beta)(-\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}}$
  $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta\alpha - \beta\alpha - \beta^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}}$
  $\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}}$
  $\Leftrightarrow -\beta^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}} - \alpha^2$
  $\Leftrightarrow -\beta^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}} - \left(\frac{R}{2L}\right)^{\mathbf{2}}$
  $\Leftrightarrow -\beta^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}} - \frac{\boldsymbol{R^2}}{\boldsymbol{4L^2}}$
  $\Leftrightarrow \beta^2 = \frac{\boldsymbol{R^2}}{\boldsymbol{4L^2}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{LC}}$
  $\Leftrightarrow \beta^2 = \frac{R^2C - 4L}{4L^2C}$
  $\Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$
  $\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R^2C - 4L}{C}}$

  $\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\boldsymbol{R^2} - \frac{4L}{C}}$

Dihasilkan $\boldsymbol{\alpha} = \frac{R}{2L}$ dan $\beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\boldsymbol{R^2} - \frac{4L}{C}}$

Disimpulkan bahwa, jika R>0 penyelesaian umum $I_h(t)$ dari persamaan homogen, mendekati nol bila *t* mendekati tak hingga. Dengan demikian, arus peralihan $I = I_h + I_p$ mendekati arus tunak I_p, dan setelah jangka waktu yang cukup lama secara praktis hasil (output) akan menjadi suatu osilasi harmonik, yang diberikan oleh (5) dan frekuensinya sama dengan frekuensi masukan.

Contoh:

Suatu induktor 2 henry, resistor 16 ohm dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan sutu baterai dengan ggl.E = 100 sin 3t. Pada t=0 muatan dalam kapasitor dan arus dalam rangkaian adalah nol. Tentukanlah (a) muatan dan (b) arus pada t>0.

Penyelesaian:
Misalkan Q dan I menyatakan muatan dan arus sesaat pada waktu t, berdasarkan Hukum Kirchhoff, maka diperoleh persamaan:

$$2\frac{dI}{dt} + 16\,I + \frac{Q}{0{,}02} = 100\sin 3t$$

Atau karena $I = \frac{dQ}{dt}$,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\,\frac{dQ}{dt} + 25Q = 20\sin 3t$$

Selesaikan ini terhadap syarat Q = 0, $\frac{dQ}{dt} = 0$ pada t = 0, kita memperoleh hasil akhir:

(a) $Q = \frac{25}{52}\,(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}\,e^{-4t}(\,3\cos 3t + 2\sin 3t)$

(b) $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}\,(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}\,e^{-4t}(17\sin 3t + 6\cos 3t)$

Sumber Pustaka

Kreyszic,Erwin. "*Advanced Engineering Mathematics*".6th Edition 1993. United States : John Wiley & Sons,Inc