Email : husnaarifah@uny.ac.id

Bentuk umum PD Bessel : $x^2 y''+xy' +(x^2 - \upsilon^2)y = 0$ ....(1)

Kita asumsikan bahwa parameter υ dalam (1) adalah bilangan riil dan tak negatif.

Penyelesaian PD mempunyai bentuk :

$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$ ....(2)

dengan syarat $a_0 \neq 0$. Sehingga :

$y'(x)= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^m$ ....(3)

$y''(x)= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r+1)a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^m$ ....(4)

PD nya menjadi :

$X^2[x^{r-2} \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^m] + x[x^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^m]+(x^2 - \upsilon^2)[x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m]=0$

atau,

$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \upsilon^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$

$= 0$ .... (5)

Jika x tidak selalu nol, maka yang pasti =0 adalah koefisien-koefisien dari x^{r+s} dengan m=s dalam jumlah pertama,kedua dan keempat, dan dengan m=s-2 pada jumlah yang ketiga. Sehinga dapat dijabarkan sebagai berikut :

Koefisien x^r : $(r-1)r\, a_0 + r\, a_0 - \upsilon^2 a_0 = 0$

$(r^2-r+r-\upsilon^2)\, a_0 = 0$

$(r^2-\upsilon^2)\, a_0 = 0$; $a_0 \neq 0$

Persamaan indical : $r^2-\upsilon^2=0$; $r_{12}=\pm\, \upsilon$ ....(6)

Koefisien x^{r+1} : $r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - \upsilon^2 a_1 = 0$

$(r^2+r+r+1-\upsilon^2)\, a_1=0$

$(2r+1+r^2-\upsilon^2)a_1 = 0$

$(2r+1)\, a_1 = 0$;(2r+1) tidak selalu 0

$a_1 = 0$

Koefisien x^{r+s} : $(s+r-1)(s+r)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \upsilon^2 a_s = 0$

$[(s+r)(s+r-1+1)-\upsilon^2]a_s \quad = -a_{s-2}$

$[(s+r)^2-\upsilon^2]a_s \quad = -a_{s-2}$

$$a_s = -\frac{a_{s-2}}{(s+r)^2-\upsilon^2} \quad \text{...(7)}$$

Untuk r = υ :

$$a_s = -\frac{a_{s-2}}{(s+r)^2-\upsilon^2} = -\frac{a_{s-2}}{s^2+2s\upsilon+\upsilon^2-v^2} = -\frac{a_{s-2}}{s(s+2\upsilon)}$$

s = 2 → $a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\upsilon)} = -\frac{a_0}{4(1+\upsilon)}$

s = 3 → $a_3 = -\frac{a_1}{3(3+2\upsilon)} = 0$

s = 4 → $a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\upsilon)} = \frac{a_0}{2.4(2+\upsilon).4(1+\upsilon)}$

Karena $a_1 = 0$; $\upsilon \geq 0$, maka untuk s ganjil $a_s = 0$ dan s genap = 2m ; m = 1, 2, 3, ...

$$a_{2m} = -\frac{1}{2m(2\upsilon+2m)}a_{2m-2} = -\frac{1}{2^2m(\upsilon+m)}a_{2m-2}$$

Karena a_0 sebarang dan $a_0 \neq 0$, maka bisa dipilih $a_0 = \frac{1}{2^\upsilon\Gamma(\upsilon+1)}$

dimana $\Gamma(\upsilon+1)$ adalah fungsi gamma. Untuk keperluan di sini cukup ketahui bahwa $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha \geq 0)$$

Dengan integrasi parsial diperoleh

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha}\, dt = -e^{-t}t^{\alpha}\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

Pernyataan pertama di ruas kanan adalah nol dan integral di ruas kanan adalah $\Gamma(\alpha)$. Ini menghasilkan hubungan dasar

$$\Gamma(\alpha+1)= \alpha\Gamma(\alpha)$$

Karena

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1.$$

Dengan $\Gamma(\upsilon+1) = \upsilon\Gamma(\upsilon) = \upsilon!$ ....(8)

untuk $\upsilon = 0,1,2,3, \ldots$ sehingga :

m = 1 → $a_2 = -\frac{a_0}{2(2\upsilon+2)} = -\frac{1}{2^2(\upsilon+1)}\frac{1}{2^\upsilon\Gamma(\upsilon+1)}$

$= \frac{-1}{2^{\upsilon+2}(\upsilon+1)\Gamma(\upsilon+1)} = \frac{-1}{2^{\upsilon+2}\Gamma(\upsilon+2)} = \frac{1}{1!2^{\upsilon+2}\Gamma(\upsilon+2)}$

m = 2 → $a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\upsilon+2)} = -\frac{1}{2.2^2(\upsilon+2)}\frac{-1}{2^{2+\upsilon}\Gamma(\upsilon+2)}$

$= \frac{1}{2^{\upsilon+4}2\Gamma(\upsilon+3)} = \frac{1}{2!2^{\upsilon+4}\Gamma(\upsilon+3)}$

m = 3 → $a_6 = -\frac{a_4}{2^2 3(\upsilon+2)} = -\frac{1}{3.2^2(\upsilon+2)}\frac{1}{2!2^{4+\upsilon}\Gamma(\upsilon+3)}$

m = m → $a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)}$

y=
$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{\upsilon+2m}$ ....(9)

Fungsi y yang merupakan penyelesaian PD berbentuk deret tak hingga ini disebut Fungsi Bessel Jenis Pertama orde υ dan dinotasikan degan J_υ(x)

Jadi J_υ(x) = $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{\upsilon+2m}$

J_υ(x) = $x^\upsilon \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{2m}$ ....(10)

Nilai bilangan bulat υ biasanya dinyatakan dengan n. Jadi untuk n≥0,

J_n(x) = $x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}\mathrm{m}!(n+m)!}$..........(11)

Untuk akar indical yang lain yaitu r=- υ ;

$J_{-\upsilon}$(x) = $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(-\upsilon+m+1)} x^{-\upsilon+2m}$ ....(12)

Karena persamaan bessel memuat υ^2, maka fungsi J_υ dan $J_{-\upsilon}$ merupakan penyelesaian-penyelesaian dari persamaan bessel untuk υ yang sama. Bila υ bukan bilangan bulat, maka J_υ dan $J_{-\upsilon}$ adalah bebas linier karena suku pertama di (10) dan (12) berturut-turut adalah kelipatan hingga yang tak nol dari x^υ dan $x^{-\upsilon}$.

TEOREMA 1 (PU Persamaan Bessel)

Bila v bukan bilangan bulat, maka penyelesaian umum persamaan Bessel untuk setiap $x \neq 0$ adalah:

$$y(x) = c_1\, j_v(x) + c_2\, j_{-v}(x) \text{ ....(13)}$$

Tetapi apabila υ suatu bilangan bukat maka (11) bukan penyelasaian umum.

Teorema 2 (Kebergantungan linear fungsi-fungsi Bessel j_n dan j_{-n})

Untuk bilangan bulat υ =n, fungsi-fungsi Bessel $j_n(x)$ dan $j_{-n}(x)$ adalah begantung linear karena

$$J(x) = (-1)^n \;\; j_n(x) \text{ ....(14)}$$

dengan (n=1,2, . . .)

Bukti. Kita gunakan (12) dan misalkan υ mendekati suatu bilangan bulat n yang positif. Maka fungsi Gamma dalam koefesien-koefesien dari suku n yang pertama menjadi tak hingga (lihat Gambar 545 dilampiran 3). Jadi koefesien-koefesien ini menjadi nol dan penjumlahan mulai dari m=n. Karena untuk kasus ini $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$ [lihat (8)] maka kita peroleh

$$J_{-n}(x) = \sum_{m-n}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-n}}{2^{2m-n} \; m!\,(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \; x^{2s+n}}{2^{2s+n} \; (n+s)!\,s!}$$

dimana m = n+s dan s =m-n.

Dari (11) terlihat bahwa deret terakhir menyatakan $(-1)^n \;\; j_n(x)$. Dengan demikian bukti telah lengkap.

Penyelesaian umum persamaan Bassel untuk bilangan bulat υ =n akan diperoleh dalam pasal berikutnya. Nilai numerik untuk j_0 dan j_1 dicakup dalam lampiran4.

CONTOH 1. KABEL ATAU RANTAI BERGETAR [GAMBAR 85]

Fungsi Bessel diterapkan pada hal-hal yang berhubungan dengan apa yang disebut persamaan gelombang. Penerapan pada getaran kabel (atau rantai) fleksibel bergantung yang terjepit pada ujung atasnya (x=0 dalam gambar 85 hal 199) dan dapat melakukan getaran kecil dalam bidang vertikal.

Email : husnaarifah@uny.ac.id

Anggal L = panjang kabel, ρ = konstanta berat jenisnya (massa/satuan panjang)

Maka berat bagian kabel yang dibawah titik x adalah W(x) = ρg(L-x)

Dengan mengasumsikan sudut α kecil pada pergeseran, kita dapat memandang W(x) hamper sama dengan gaya tarik yang berkerja secara garis singgung (tangensial) pada kabel yang bergerak. Komponen horizontal gaya tarik ini memberikan gaya pemulih keseimbangan yaitu F(x) = W sin $\alpha \approx$ W tan $= Wu_x$, dimana $u_x = \partial u/\partial x$ dan u(x,t) merupakan pergeseran kabel dari posisi keseimbangan vertikalnya, dan t menyatakan waktu. Dengan demikian, untuk bagian kecil kabel diantara x dan x+Δx, perbedaan gayanya adalah (menurut teo. Kalkulus tentang nilai rata-rata)

F(x+Δx) – F(x) = Δx $(Wu_x)_x$

Menurut hukum Newton II. Selisih gaya ini sama dengan masa ρΔx kali percepatan $u_\pi = \partial^2 u/\partial t^2$ dari bagian kecil ini:

$\rho\, \Delta x\, u_u = \Delta x\, (Wu_x)_x = \Delta x\, \rho\, g[(L\text{-}x)\, u_x]_x$

Dengan mengharapkan gerakan periodik terhdap waktu, kita coba u(x,t) = y(x) cos $(\omega t + \delta)$ diubtitusikan kepersamaan tersebut dan dibagi dengan $\rho\, \Delta x$, kita peroleh

$$-\omega^2 y \cos(\omega t + \delta) = g\left[(L - x)y'\right]' \cos(\omega t + \delta)$$

Dengan menggunakan factor cosines, untuk melakukan diferensiasi dan mengumpulakn suku-suku, kita peroleh

(L-x) y ” – y ‘ + $\lambda^2 y = 0$ $\lambda^2 = \omega^2/g$

Dengan menetapkan L - x = , kita peroleh dx = - dz dan melalui aturan rantai

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \lambda^2 y = 0$$

Satu-satunya langkah manipulasi adalah dengan menunjukkan bahwa persamaan ini dapat disusun dalam bentuk persamaan Bessel dengan parameter v=0. Subtitusi yang akan berlaku adalah

$s = 2\,\lambda\, z^{1/2}$. Maka melalui aturan rantai

$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{ds}\lambda\, z^{1/2}$ $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{ds^2}\, \lambda^2 z^{-1} - \frac{1}{2}\, \frac{dy}{ds}\, \lambda^2 z^{3/2}$

Subtitusikan menghasilkan

$\lambda^2 \frac{d^2y}{ds^2} + (-\frac{1}{2}\ \lambda^2 z^{-\frac{1}{2}} + \lambda^2 z^{-\frac{1}{2}})\ \frac{dy}{ds} + \lambda^2 y = 0$

Dibagi dengan λ^2 dan mengingat bahwa $= 2\ \lambda\ z^{1/2}$, akhirnya kita peroleh

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s}\ \frac{dy}{ds} + \ y = 0$$

Ini merupakan persamaan Bessel dengan parameter v=0. Karena $s = 2\ \lambda\ z^{1/2} = (\frac{2\omega}{\sqrt{g}})\sqrt{(L-x)}$ maka penyelesainnya adalah

y(x) = J_0 (2 $\omega \sqrt{[(L-x)/g]}$

Karena ujung sebelah atas (x=0) kabel terjepit, maka y(0) = J_0 (2 $\omega \sqrt{(L/g)} = \ 0$

Dengan demikian frekuensi yang mungkin $(2\omega/2\pi)$ dari kabel yang bergetar adalah resonansi s= (2 $\omega \sqrt{(L/g)}$ dari J_0 bernilai nol (lihat gambar 86 pada himpunan soal) atau superposisi sejenis *"mode normal"*

Hasil Percobaan.

Suatu kabel dengan L= 24.0 , 24.5 , 24.0 , 24.0 , 24.0 getaran per menit, dengan demikian rata-ratanya adalah 24.1. Dari 2 $\omega \sqrt{(L/g}$ = 2.405 (nol pertama dari J_0 ;lihat table A2 pada lampiran 4) kita hitung frekuensi

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.405}{2.2\pi\sqrt{L/g}} = \frac{2.405}{4\pi\sqrt{2.28/9.80}} = 0.397\ [sec^{-1}]$$

Yaitu 0.397 (60) = 23.8 getaran per menit. Galatnya adalah 1.3%

Sumber Pustaka

Kreyszic,Erwin. "*Advanced Engineering Mathematics*".6th Edition 1993. United States : John Wiley 7 Sons,Inc