Email : husnaarifah@uny.ac.id

Persamaan diferensial Legendre

(1) $$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0}$$

Parameter n pada (1) adalah bilangan rill yang diberikan. Setiap penyelesaian dari (1) dinamakan fungsi Legendre.

Dengan membagi (1) dengan $1-x^2$, maka diperoleh bentuk standar (8), Pasal 4.2 yaitu $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ dengan $p(x) = \frac{2x}{(1-x^2)}$; $q(x) = \frac{n(n+1)}{(1-x^2)}$ dan $r(x) = 0$. Koefisien-koefisien persamaan yang dihasilkan adalah analitik pada $x = 0$. Jadi dapat kita gunakan metode deret pangkat.

(2)

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \ \& \ y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

Substitusikan y dan turunan-turunannya ke dalam (1) dan nyatakan konstanta $n(n+1)$ dengan k, maka kita memperoleh

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

Dengan menuliskan pernyataan pertama sebagai dua deret yang terpisah, maka kita memperoleh persamaan

(1*)

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

Yang jabarannya dituliskan

$$2.1a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + \cdots + (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s + \cdots$$

$$-2.1a_2x^2 - \cdots - s(s-1)a_sx^s - \cdots$$

$$-2.1a_1x - 2.2a_2x^2 - \cdots \quad - 2sa_sx^s - \cdots$$

$$ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots + ka_sx^s + \cdots = 0$$

Karena ini harus merupakan suatu identitas dalam x apabila (2) merupakan penyelesaian dari (1), maka jumlah koefisien-koefisien dari setiap pangkat x haruslah nol ; karena $k = n(n+1)$, ini memberikan

(3a)

$$2.\,a_2 + n(n+1)a_0 = 0 \qquad koefisien\ dari\ x^0$$

$$6.\,a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0 \quad koefisien\ dari\ x^1$$

Dan umumnya, jika $s = 2, 3, \ldots$,

(3b)

$$(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$$

Sekarang pernyataan dalam kurung [...] dapat dituliskan menjadi

$$-s(s-1) - 2s + n(n+1) = -s^2 + s - 2s + n^2 + n = -s^2 - s + n^2 + n$$

$$= -s(s+1) + n(n+1) = (n-s)(n+s+1)$$

Sehingga dapat dituliskan menjadi

$$(s+2)(s+1)a_{s+2} + [(n-s)(n+s+1)]a_s = 0$$

$$(s+2)(s+1)a_{s+2} = -[(n-s)(n+s+1)]a_s$$

Jadi dari (3) diperoleh

(4)

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0,1,\ldots)$$

Ini disebut hubungan rekursi (*recurtion relation*) atau rumus rekursi (*recurtion formula*). Rumus ini memberikan untuk setiap koefisien dinyatakan dalam koefisien kedua yang mendahuluinya, kecuali a_0 dan a_1 yang merupakan konstanta sebarang. Kita peroleh secara berurutan

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_o$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4.3}a_2$$

$$= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5.4}a_3$$

$$= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

dan seterusnya. Dengan memasukkan nilai-nilai ini ke dalam koefisien-koefisen pada (2), kita memperoleh

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1x - \frac{n(n+1)}{2!}a_ox^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1x^3 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0x^4 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1x^5 + \cdots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \ \ldots\right]$$

$$+ a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1x^5 - + \cdots\right]$$

Email : husnaarifah@uny.ac.id

Atau dapat dituliskan sebagai

(5)

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

di mana

(6)

$$y_1(x) = \ 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \ \dots$$

dan

(7)

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 x^5 - + \cdots$$

Deret ini konvergen untuk $|x| < 1$. Karena (6) memuat hanya pangkat-pangkat genap dari x sedangkan (7) hanya memuat pengkat-pangkat ganjil dari x, maka hasil bagi $\frac{y_1}{y_2}$ bukan suatu konstanta, sehingga $y_1$dan $y_2$tidak sebanding, jadi merupakan penyelesaian bebas linear. Sehingga (5) merupakan penyelesaian umum (1) pada selang $-1 < x < 1$.

Polinom Legendre

Dalam banyak penerapan, parameter n dalam persamaaan Legendre merupakan bilangan bulat tak negatif. Maka ruas kanan (4) adalah nol jika $s = n$, sehingga $a_{n+2} = 0, a_{n+6} = 0, \dots$

Jadi bilangan n genap, $y_1(x)$ disederhanakan menjadi suatu polinom berderajat n. Bila n bilangan ganjil, diperoleh hasil yang sama untuk $y_2(x)$. Polinom-polinom ini, dikalikan dengan suatu konstanta, disebut polinom Legendre. Karena polinom-polinom itu dalam praktek, kita akan membahasnya lebih terinci. Untuk keperluan ini, kita selesaikan (4) untuk a_s, diperoleh

(8)

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \qquad (s \leq n-2)$$

Kita dapat menyatakan semua koefisien-koefisien yang tak-dihilangkan dalam koefisien a_n dari pangkat x yang paling tinggi pada polinom. Koefisien a_n mula-mula masih sebarang. Biasanya kita mengambil $a_n = 1$ jika $n = 0$ dan

(9)

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Pengambilan a_n ini dilakukan agar semua polinom ini mempunyai nilai 1 jika $x = 1$.

(9*)

$$a_{n-2} = -\frac{(n-2+2)(n-2+1)}{\big(n-(n-2)\big)(n+n-2+1)}a_{n-2+2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n$$

$$= -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n(n!)^2} = -\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)!\,n(n-1)(n-2)!}$$

yaitu

$$a_{n-2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!\,(n-2)!}$$

Dengan cara yang sama,

$$a_{n-4} = -\frac{(n-4+2)(n-4+1)}{\big(n-(n-4)\big)(n+n-4+1)}a_{n-4+2} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}$$

$$= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}.-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!\,(n-2)!} = \frac{(n-2)(n-3)(2n-2)!}{4(2n-3)2^n(n-1)!\,(n-2)!}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}{4(2n-3)2^n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!\,(n-2)!} = \frac{2(n-1)}{4.2^n(n-2)!\,(n-4)!}$$

yaitu

$$a_{n-4} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!\,(n-2)!\,(n-4)!}$$

Dengan cara yang sama pula

$$a_{n-6} = -\frac{(n-6+2)(n-6+1)}{\big(n-(n-6)\big)(n+n-6+1)} a_{n-6+2} = -\frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} a_{n-4}$$

$$= -\frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} . \frac{(2n-4)!}{2^n 2!\,(n-2)!\,(n-4)!} = -\frac{(n-4)(n-5)(2n-4)!}{6(2n-5)2^n 2!\,(n-2)!\,(n-4)!}$$

$$= -\frac{(n-4)(n-5)(2n-4)(2n-5)(2n-6)!}{6(2n-5)2^n 2!\,(n-2)(n-3)!\,(n-4)(n-5)(n-6)!}$$

$$= -\frac{2(n-2)(2n-6)!}{6.\,2^n 2!\,(n-2)(n-3)!\,(n-6)!}$$

yaitu

$$a_{n-6} = -\frac{(2n-6)!}{2^n 3!\,(n-3)!\,n-6)!}$$

dan seterusnya. Umumnya jika $n - 2m > 0$,

(10)

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!}$$

Penyelesaian persamaan diferensial Legendre (1) yang dihasilkan disebut polinom Legendre berderajat n dan dinyatakan oleh $P_n(x)$. Dan (10) diperoleh

(11)

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!\,(n-1)!\,(n-2)!} x^{n-2} + - \cdots \end{aligned}}$$

dimana $M = \frac{n}{2}\ atau\ \frac{(n-1)}{2}$, yang merupakan suatu bilangan bulat.

Khususnya (Gambar 83).

(11')

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

dan seterusnya.

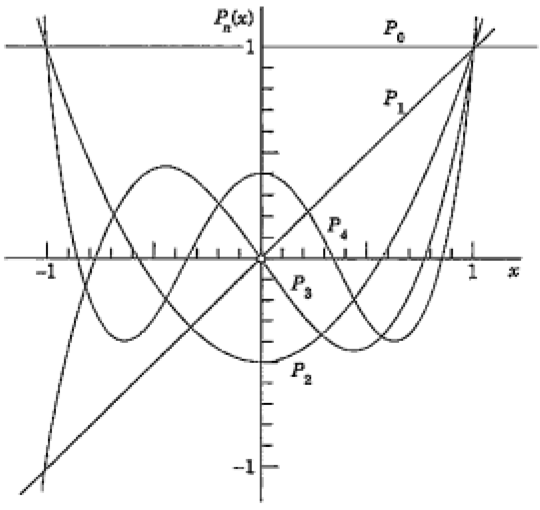

Fig. 104. Legendre polynomials

Ini disebut *ortogonalitas* polinom-polinom Legendre.

Contoh Soal:

Dengan menggunakan (11’), akan dibuktikan dengan substitusi bahwa $P_0, \dots, P_5$ memenuhi persamaan Legendre

Penyelesaian:

$P_0(x) = y_0 = 1$

$P_1(x) = y_1 = x$

$P_2(x) = y_2 = \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$

$P_4(x) = y_3 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_3(x) = y_4 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_5(x) = y_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Daftar Pustaka

Kreyszic,Erwin. “*Advanced Engineering Mathematics*”.6th Edition 1993. United States : John Wiley & Sons,Inc