Email :husnaarifah@uny.ac.id

BAB 4: Anuitas Lebih Umum

4.1 Pendahuluan

Pada bab 3 telah dibahas tentang anuitas untuk periode pembayaran, dan periode bunga konversi yang setara dan dipenuhi secara bersamaan, dimana pembayaran dari tingkat jumlah. Dalam bab 4 akan dibahas anuitas untuk pembayaran yang dibuat lebih atau kurang daripada bunga konversi dan anuitas dengan berbagai pembayaran.

4.2 Anuitas yang dibayarkan Pada Frekuensi Yang Berbeda dari Bunga yang dikonversi

Ada dua pendekatan yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah anuitas.Pendekatan pertama digunakan untuk menghitung nilai numerik dari anuitas dan menghitung dengan fungsi eksponensial dan logaritma. Pendekatan kedua menggunakan analisis aljabar pada anuitas. Artinya yaitu membuat persamaan aljabar untuk anuitas dalam bentuk simbol anuitas yang sudah dijelaskan pada bab 3. Langkah-langkah :

1. Menemukan suku bunga, konversi pada frekuensi yang sama dengan pembayaran yang dilakukan, yang setara dengan tingkat bunga yang diberikan.
2. Menggunakan tingkat bunga yang baru, tentukan nilai anuitas yang sudah dipelajari padabab 3.

Contoh4.1 :

Tentukan nilai akumulasi pada akhir tahun ke 4 yang diinvestasikan sebesar $100pada awal setiap kuartal selama dua tahun pertama dan $200 pada awal kuartal masing-masing selama dua tahun kedua, jika bunga12% yang dikonversi setiap kuartal dengan tingkat bunga 1% per bulan, j menjadi tingkat bunga nominal per kuartal, yang merupakan periode pembayaran, maka diperoleh:

$$j = (1.01)^3 - 1 = 0.030301$$

Nilai anuitas, yaitu:

$$100(\ddot{s}_{\overline{16}|j} + \ddot{s}_{\overline{8}|j})$$

$$100(20.8170 + 9.1716) = \$2999$$

Contoh 4.2

Pinjaman sebesar $ 3000 akan dibayarkan dengan angsuran per kuartal pada akhir setiap kuartal selama lima tahun. Jika tingkat bunga yang dikenakan pada pinjaman adalah 10% per tahun dikonversi setiap 6 bulan, Berapa jumlah yang harus dibayar pada setiap kuartal.

Penyelesaian :
Diketahui bunga 5% per setengah tahun,j menjadi tingkat setara bunga per kuartal yang merupakan periode pembayaran, diperoleh:

$$j = (1.05)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.024695$$

Notasi pembayaran triwulan dinotasikanR, maka persamaan nilai :

$$R_{a_{20\rceil j}} = 3000$$

Sehingga $R = \frac{3000}{a_{20\rceil j}} = \frac{3000}{15.6342} = \$191.89$

Contoh 4.3

Berapa tingkat bunga efektif tahunan yang akan dibayarkan sebesar $ 100 pada akhir setiap kuartalyang diakumulasi pada akhir tahun lima sebesar $2500?

Penyelesaian :
diperolehtingkat bunga per kuartal$j = \frac{i^{(4)}}{4}$, maka persamaan nilai pada akhir tahunke lima adalah

$$100_{s_{20\rceil j}} = 2500$$

atau

$$s_{20\rceil j} = 25$$

Menggunakanrumus(3.33) untuk memperolehnilaiawal yang diiterasi:

$$i_0 = \frac{\left(\frac{25}{20}\right)^2 - 1}{25} = 0.0225$$

Selanjutnya iterasi menggunakan metode Newton-Raphson yaitu menggunakan rumus (3.30) , diperoleh nilai berturut-turut sebagai berikut:

$$i_1 = 0.022855$$

$$i_2 = 0.022854$$

$$i_3 = 0.022854$$

tingkat bunga efektif tahunanidiperoleh:

$$i = (1.022854)^4 - 1 = 0.0946 \; atau \; 9.46\%$$

4.3 Analisis Lebih Lanjut PadaAnuitas Yang Dibayarkan Dengan Frekuensi Kurang DariBunga Yang Dikonversi.

1. Anuitas-Akhir

Jika k jumlah periode konversi bunga dalam satu periode pembayaran, n jangka waktu anuitas diukur dalam periode konversi bunga, dan i menjadi suku bunga per periode konversi bunga. diasumsikan bahwa setiap periode pembayaran berisi jumlah integral periode konversi bunga, dengan k dan n keduanya bulat positif.

Nilai tunai dari anuitas yang pembayaran 1 pada akhir setiap k periode konversi bunga untuk total periode konversi bunga n adalah:

$$v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{nk}{k}} = \frac{v^k - v^{n+k}}{1 - v^k}$$

$$= \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1}$$

$$= \frac{a_{n\rceil}}{s_{k\rceil}} \qquad (4.1)$$

dengan demikian, diperolehrumus untuk nilai tunaianuitasdengan rumus anuitas yang sudah didefinisikan. Akumulasi nilai tunai anuitas setelah pembayaran terakhir adalah

$$\frac{a_{n\rceil}}{s_{k\rceil}}(1+i)^n = \frac{s_{n\rceil}}{s_{k\rceil}} \qquad (4.2)$$

Untuk menurunkan rumus 4.1 dan 4.2, ada nilai R sedemikian hinggapembayaran 1 di akhir setiap k bunga periode konversi untuk periode konversi bunga n dapat digantikan oleh pembayaran R pada akhir setiap konversi bunga periode, yaitu:

$$R_{a_{n\rceil}}$$

Jangka waktusatu pembayaranperiodekonversibunga ke k.Pada akhirperiodepembayarannilaiakumulasipembayaranRpada akhirsetiap periodekonversibungaharus sama denganpembayaran1. Dengan demikian,

$$R_{s_{n\rceil}} = 1$$

dengan mensubstitusi $R = \frac{1}{s_{k\rceil}}$pada R=$R_{a_{n\rceil}}$, rumus 4.1 diperoleh. Rumus 4.2 analog.

Gambar 4.1 adalah menjelaskan diagram waktu dari argument diatas.

2. Anuitas-Jatuh Tempo

Nilai tunai dari anuitas yang pembayaran 1 pada setiap awal periode k, konversi bunga untuk total periode konversi bunga n adalah

$$1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{n-k} = \frac{1 - v^n}{1 - v^k}$$

$$= \frac{a_{n\rceil}}{a_{k\rceil}} \qquad (4.3)$$

Nilaiakumulasitunai periodekonversibunga setelah pembayaran terakhir adalah

$$\frac{a_{n\rceil}}{a_{k\rceil}}(1+i)^n = \frac{s_{n\rceil}}{a_{k\rceil}} \qquad (4.4)$$

Untuk menurunkan rumus 4.3 dan 4.4 analog menggunakan anuitas-akhir.

Pertimbangan Lain

Pada saatfrekuensi pembayaran perpetuitas kurang dari bunga yang dikonversi. Nilai tunai dari suatu perpetuitas-akhir adalah

$$v^k + v^{2k} + \cdots = \frac{v^k}{1 - v^k}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^k - 1}$$

$$= \frac{1}{is_{k\rceil}} \qquad (4.5)$$

yang merupakan batas rumus (4.1) dengan n mendekati tak terhingga. Nilai tunai dari perpetuita-jatuh tempo:

$$\frac{1}{ia_{k\rceil}}$$

Kasus khusus kedua yang kadang-kadang ditemui yaitu menemukan nilai dari sejumlah pembayaran pada bunga δ. Meskipun di bawah kategori,frekuensi pembayarananuitas kurang dari bunga konversi, masalah ini tidak cukup diselesaikan dengan metode di atas, karena n dan k keduanya terbatas. Masalah ini dapat diselesaikan dengan menulis persamaan untuk nilai anuitas sebagai jumlah dari nilai tunai atau nilai akumulasi dari setiap pembayaran, menggantikan v^{tk}dengan $e^{-\delta tk}$ dan $(1+i)^{tk}$ dengan $e^{\delta tk}$, ini disebut deret geometri.

Kasus khusus ketigasangat jarang ditemukan, dimanasetiap periode pembayaran tidak berisi jumlah integral periode konversi bunga (k> 1, tapi k tidak terpisahkan). Terdapat juga, pendekatan terbaik prinsip-prinsip dasar, yaitu menulis sebuah persamaan sebagai jumlah dari nilai tunai atau akumulasi nilai dari setiap pembayaran, kemudian hasilnya sebagai deret

Email :husnaarifah@uny.ac.id

geometris.

Contoh 4.4:

Tentukan persamaan untuk nilai tunai padaanuitas di mana total r pada pembayaran 1, pertama membayar pada akhir tahun ke tujuh, dan sisa pembayaran pada interval tahun ke tiga, pada tingkat bunga tahunan i, dinyatakan sebagai: 1. anuitas-langsung, dan 2. anuitas-jatuh tempo.

gambar 4.3 untuk contoh 4.4 ada di halaman 101

nilai tunai dari anuitas:

$$v^7 + v^{10} + v^{13} + \cdots + v^{(3r+4)}$$

1. Menggunakan deret geometri, diperoleh:

$$\frac{v^7 - v^{3r+7}}{1 - v^3} = \frac{v^4 - v^{3r+4}}{(1+i)^3 - 1} = \frac{(1 - v^{3r+4}) - (1 - v^4)}{(1+i)^3 - 1} = \frac{a_{\overline{3r+7}|} - a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}}$$

   Dicatat : bahwa bentuk anuitas-akhir ditandai pada penyebut.

2. Menggunakan deret geometri, diperoleh:

$$\frac{v^7 - v^{3r+7}}{1 - v^3} = \frac{(1 - v^{3r+4}) - (1 - v^4)}{(1+i)^3 - 1} = \frac{a_{\overline{3r+7}|} - a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{3}|}}$$

   Dicatat :bahwa karakteristik anuitas-jatuh tempo olehddalampenyebut

Ulangicontoh4.1dengan menggunakanpendekatan deretpada 4.3.

Tingkat suku bunga adalah 1% per bulan, jangka waktu anuitas adalah 48 periode konversi bunga, dan setiap periode pembayaran berisi tiga periode konversi bunga, karena anuitas-jatuh tempo, nilai akumulasi menjadi:

$$100\,\frac{s_{\overline{48}|.01} + s_{\overline{24}|.01}}{a_{\overline{3}|.01}} = 100\,\frac{61.2226 + 26.9735}{2.9410} = \$2999$$

menggunakan tabel bunga dan pembulatan ke dolar terdekat, jawaban yang diperoleh sama dengan contoh 4.1

Contoh4.6

Investasisebesar \$ 1000digunakan untukmelakukan pembayaransebesar \$ 100pada akhirsetiap tahun untukselama mungkindenganpembayaranakhirlebih kecilyang dibuatpada saatpembayaranterakhir.jikabunga7% dikonversiper semester,tentukanjumlahpembayarandan jumlahtotal pembayaran.

Penyelesaian :

$$100\frac{a_{n]\,.035}}{s_{2]\,.035}} = 100$$

Atau

$$a_{n]\,.035} = 10s_{2]\,.035} = 20.35$$

Dengan tabelbunga, diperoleh 36<n <37, dengan demikian, 18pembayaran regulerdanpembayaran akhiryang lebih kecildapat dibuat.Pembayaran kecil tambahanpada saatpembayaranregulerakhirdinotasikanolehR.makapersamaannilaipada akhir18tahunadalah

$$R + 100\frac{s_{36]\,.035}}{s_{2]\,.035}} = 1000(1.035)^{36}$$

Atau

$$R = 100(3.45027) - 100\frac{70.0076}{2.0350} = \$110.09$$

total pembayaran akhir sehingga akan menjadi $ 110,09

4.4 Analisis lebih lanjut pada anuitas yang dibayarkan dengan Frekuensi lebih dari bunga yang konversi

Pada bagian ini, anuitas dibagi menjadi beberapa bagian :

1. Annuity-immediate (anuitas Akhir)
2. Annuity-due (Anuitas jatuh tempo)
3. Other considerations (anuitas sepanjang masa / perpetuitas)

1. Annuity-immediate (anuitas akhir)

Merupakan anuitas yang pembayaran pertama dilakukan pada setiap akhir tahun selama n tahun.Nilai tunai dari anuitas yang dibayar 1/m pada *akhir* setiap m tahun, dari periode konversi bunga untuk total periode konversi n bunga, ditentukan oleh $a_{\overline{n}|i}$ dan dihitung sebagai berikut:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{n-\frac{1}{m}} + v^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{v^{\frac{1}{m}} - v^{n+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\right]$$

$$= \frac{1 - v^{n}}{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}$$

$$= \frac{1 - v^{n}}{i^{(m)}}$$

(4.7)

Nilai akumulasi dari anuitas akhir, setelah pembayaran terakhir dilakukan, dilambangkan dengan $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ dan dapat dihitung sbb:

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} \qquad (4.8)$$

Akibat dari anuitas akhir pada persamaan 4.7 dan 4.8 , maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right) = \left(\frac{i}{i^{(m)}}\right) a_{\overline{n}|} \qquad (4.9)$$

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right) = s_{\overline{n}|}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right) \qquad (4.10)$$

2. *Annuity-due (Anuitas Jatuh Tempo)*

Merupakan anuitas yang pembayaran atau penerimaannya dilakukan di awal periode.

nilai tunai dari anuitas jatuh tempo yang dibayar 1/m pada awal setiap m tahun dari periode konversi bunga untuk total periode konversi n bunga, ditentukan oleh $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$, dan dapat dihitung sbb:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \qquad (4.11)$$

Nilai akumulasi dari salah satu anuitas jatuh tempo m tahun dari periode konversi bunga setelah pembayaran terakhir dilakukan, dapat dilambangkan dengan $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$, dimana

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \qquad (4.12)$$

Akibat dari anuitas jatuh tempo pada persamaan 4.11 dan 4.12 adalah

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{1-v^n}{i}\left(\frac{i}{d^{(m)}}\right) = a_{\overline{n}|}\left(\frac{i}{d^{(m)}}\right)$$

dan

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(\frac{i}{d^{(m)}}\right) = s_{\overline{n}|}\left(\frac{i}{d^{(m)}}\right)$$

Email :husnaarifah@uny.ac.id

setiap pembayaran dibawah $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ yang dilakukan setiap m tahun dari periode konversi bunga mendekati $a_{\overline{n}|i}$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = (1+i)^{\frac{1}{m}} a^{(m)}_{\overline{n}|} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)\frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

$$= \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) a_{\overline{n}|}$$

Dan juga,

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) s_{\overline{n}|}$$

3. *Other Considerations (Anuitas Sepanjang Masa)*

Pada saat frekuensi pembayaran perpetuitas lebih dari bunga yang dikonversi, berikut ini persamaan yang analog dengan persamaan (3.20) dan (3.21)

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i^{(m)}} \qquad (4.17)$$

dan

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(m)}} \qquad (4.18)$$

Contoh 4.7

Pembayaran \$400 per bulan dilakukan selama sepuluh tahun. Tentukan:

a. nilai tunai dari pembayaran selama dua tahun sebelum pembayaran pertama

b. Nilai akumulasi tiga tahun setelah pembayaran terakhir. gunakan rumus berdasarkan tingkat bunga efektif

Penyelesaian:

a. $4800 v^2 \ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = 4800(\ddot{a}^{(12)}_{\overline{12}|} - \ddot{a}^{(12)}_{\overline{2}|})$

b. $4800 s^{(12)}_{\overline{10}|}(1+i)^3 = 4800(s^{(12)}_{\overline{13}|} - s^{(12)}_{\overline{3}|})$

Contoh 4.8

Gunakan contoh 4.2, menggunakan pendekatan yang dikembangkan dalam bagian 4.4

Penyelesaian:

$$2Ra^{(2)}_{\overline{10}|0.05} = 3000$$

$$R = \frac{1500}{a^{(2)}_{\overline{10}|0.05}} = \frac{1500}{\frac{i}{i^{(2)}}a_{\overline{10}|0.05}} = \frac{1500}{(1.012348)(7.7217)} = \$191.89$$

Contoh 4.9

Berapa tingkat bunga efektif tahunan pada nilai tunai dari sejumlah pembayaran sebesar $ 1 setiap enam bulan lamanya, dengan pembayaran pertama sama dengan $ 10?.

Penyelesaian:

Persamaan nilainya: $10 = 1 + v^{0.5} + v + v^{1.5} + \ldots = \frac{1}{1 - v^{0.5}}$

$$v^{0.5} = 0.9$$

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{0.5} = 0.9$$

$$i = \left(\frac{1}{0.9}\right)^2 - 1 = 0.2346 \quad atau \quad 23.46\%$$

4.5 Continuous Annutties (Anuitas kontinu)

Kasus khusus pada anuitas yang dibayarkan dengan frekuensi lebih dari bunga yang dikonversi adalah salah satu pembayaran tak terhingga,

Contoh: pembayaran yang dilakukan kontinu.

Kita akan menentukan nilai tunai pada anuitas yang dibayarkan secara kontinu untuk bunga yang dikonversi selama n periode. Sedemikian sehingga total dari jumlah anuitas yang dibayar selama setiap periode bunga yang dikonversi adalah satu dengan simbol $a_{\overline{n}|}$, persamaan dari $a_{\overline{n}|}$ adalah

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^n dt$$

Persamaan $v^t dt$ merupakan nilai tunai dari pembayaran dt yang diperoleh dari nilai t. Persamaan sederhana dapat diformasikan dengan integral:

Email :husnaarifah@uny.ac.id

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^n dt$$

$$= \frac{v^t}{log_e v}\Big]_0^n$$

$$= \frac{1-v^e}{\delta} \qquad (4.20)$$

Persamaan (4.20) analog dengan persamaan (3.2).terdapat ketepatan antara cara membayaran dengan hasil persamaan.

Persamaan (4.20) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{a}_{n\rceil} = \lim_{m-\infty} a_{n\rceil}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

atau

$$\bar{a}_{n\rceil} = \lim_{m-\infty} \ddot{a}_{n\rceil}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1-v^n)}{d^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Anuitas kontinu adalah kasus limit pada anuitas pembayaran. Dapat digunakan untuk ditulis $\bar{a}_{n\rceil}$ dalam bentuk $a_{n\rceil}$ dengan penyesuaian:

$$\bar{a}_{n\rceil} = \frac{i}{\delta} a_{n\rceil} = \bar{s}_{1\rceil} a_{n\rceil} \qquad (4.21)$$

Nilai pada $\frac{i}{\delta} = \bar{s}_{1\rceil}$ dapat dihitung langsung dan terdapat pada tabel tingkat bunga pada Appendix I.

Nilai akumulasi dari anuitas kontinu pada akhir anuitas didefinisikan dengan $\bar{s}_{n\rceil}$.

$$\bar{s}_{n\rceil} = \int_0^\pi (1+i)^t \; dt$$

$$= \frac{(1+i)^t}{\log_e(1+i)}\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$$

$$= \frac{i}{\delta} s_{n\rceil} = \bar{s}_{1\rceil} s_{n\rceil}$$

$$= \lim_{m\to\sim} s_{n\rceil}^{(m)} = \lim_{m\to\sim} \ddot{s}_{n\rceil}^{(m)}$$

pengetahuan tambahan tentang anuitas kontinu dapat diperoleh melalui persamaan (4.22) sehubungan dengan batas atas limit n dan kemudian mengganti n dengan t, diperoleh

$$\frac{d}{dt}\bar{s}_{t\rceil} = (1+\mathrm{i})^t$$

$= 1 + \delta \bar{s}_{t\rceil}$(4.25)

Serupa dengan persamaan (4.19) dapat diperoleh

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{t\rceil} = v^t$$

$$= 1 - \delta \bar{a}_{t\rceil} \quad (4.26)$$

Dari persamaan (4.26) juga dapat diperoleh interpretasi secara verbal, yang berbeda dengan materi tambahan yang di bahas pada bab 6.

Kita dapat menentukannilai anuitas kontinu secara tepat dalam hal kekuatan bunga δ. ketika hal ini dilakukan, maka persamaan (4.26) menjadi

$$\bar{a}_{n\rceil} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta}$$

Dan persamaan (4.23) dapat menjadi

$$\bar{s}_{n\rceil} = \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

Contoh 4.10

Tentukan tingkat bunga, dimana $\bar{s}_{\overline{20}|} = 3\bar{s}_{\overline{10}|}$

Penyelesaian:

Menggunakan formula 4.28, maka

$$\frac{e^{20\delta} - 1}{\delta} = 3\frac{e^{10\delta} - 1}{\delta}$$

$$e^{20\delta} - 3e^{10\delta} + 2 = 0$$

$$(e^{10\delta} - 2)(e^{10\delta} - 1) = 0$$

Namun, $e^{10\delta} - 1 = 0 \quad \textit{menyiratkan} \quad \textit{bahwa} \quad \delta = 0$ sehingga kita memiliki

$$e^{10\delta} = 2$$

$$\delta = \frac{\log_e 2}{10} = 0.0693 \quad \textit{atau} \quad 6.93\%$$

4.6 Macam-macam Anuitas Dasar (*Basic Varying Annuities)*

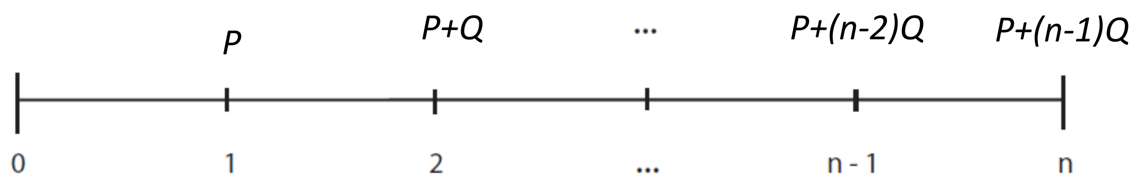
Sejauh ini semua anuitas dianggap memiliki tingkat pembayaran.Kita sekarang menghapus pembatasan ini dan menganggap anuitas dengan pembayaran berubah. Pada section ini, akan diasumsikan bahwa periode pembayaran dan periode konversi bunga adalah sama.

Macam-macam anuitas yang akan didiskusikan adalah

1. Macam-macam pembayaran (*payments varying*) dalam deret aritmatika.
2. Macam-macam pembayaran (*payments varying*) dalam deret geometri.
3. Pola pembayaran lainnya.

1. Macam-macam pembayaran (*payments varying*) dalam deret aritmatika.

Pada anuitas akhir dengan jangka waktu *n* periode dimana pembayaran dimulai pada *P* dan meningkat sebesar *Q* per periode sesudahnya. Dengan *P* harus positif dan *Q* boleh positif atau negatif selama *P + (n-1)Q*> 0.



Misalkan *A* adalah nilai tunai anuitas, maka

$$A = Pv + (P+Q)v^2 + (P+2Q)v^3 + \cdots + [P+(n-2)Q]v^{n-1} + [P+(n-1)Q]v^n$$

Ini merupakan kombinasi deret aritmatika dan deret geometri. Kita dapat menyelesaikan persamaan aljabar diatas dengan mengalikan rasio pada deret geometri.

$$(1+i)A = P + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + (P+3Q)v^3 + \cdots + [P+(n-1)Q]v^{n-1}$$

$$iA = P + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + (P+3Q)v^3 + \cdots + [P+(n-1)Q]v^{n-1} - A$$

$$iA = P + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + (P+3Q)v^3 + \cdots + [P+(n-1)Q]v^{n-1} - [Pv + (P+Q)v^2 + (P+2Q)v^3 + \cdots + [P+(n-2)Q]v^{n-1} + [P+(n-1)Q]v^n]$$

$$iA = P + Qv + Qv^2 + Qv^3 + \cdots + Qv^{n-1} - Pv^n - (n-1)Qv^n$$

$$iA = P + Q(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}) - Pv^n - (n-1)Qv^n$$

$$iA = P(1-v^n) + Q(v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n) - nQv^n$$

$$A = P\frac{(1-v^n)}{i} + Q\frac{a_{n]} - nv^n}{i}$$

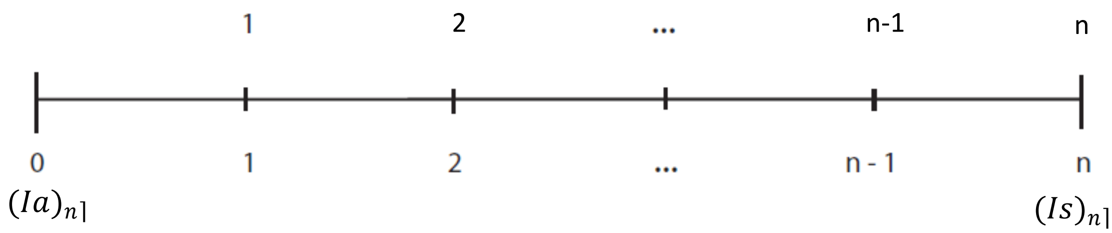
$$A = Pa_{n]} + Q\frac{a_{n]} - nv^n}{i}$$

Misalkan S untuk nilai akumulasi :

Ingat :$s_{n]} = a_{n]}(1+i)^n$

$$S = Ps_{\overline{n}|} + Q\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i}$$

Pada anuitas meningkat, jika P =1 dan Q =1, maka nilai tunai anuitas dinotasikan$(Ia)_{\overline{n}|}$yaitu



$$(Ia)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{1 - v^n + a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n+1}|} - (n+1)v^n}{i}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n - nv^n - v^n}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

Nilai akumulasi anuitas, $(Is)_{\overline{n}|}$adalah

$$(Is)_{\overline{n}|} = (Ia)_{\overline{n}|}(1+i)^n$$

$$(Is)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{i} = \frac{s_{\overline{n+1}|} - (n+1)}{i}$$

Kita bisa menentukan$(Ia)_{\overline{n}|}$dengan menggunakan formula pada anuitas tertunda (*deferred annuities)* yaitu $v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$sehingga

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\, a_{\overline{n-t}|}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\, \frac{1 - v^{n-t}}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} + v\frac{1 - v^{n-1}}{i} + v^2\frac{1 - v^{n-2}}{i} + \cdots + v^{n-1}\frac{1 - v}{i}$$

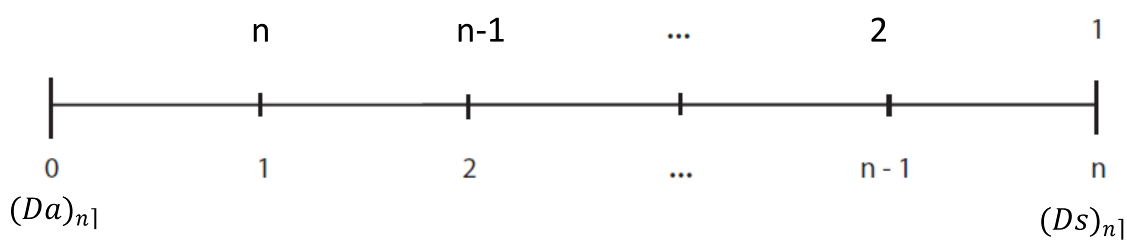
Email :husnaarifah@uny.ac.id

$$(Ia)_{n\rceil} = \frac{1-v^n}{i} + \frac{v-v^n}{i} + \frac{v^2-v^n}{i} + \cdots + \frac{v^{n-1}-v^n}{i}$$

$$(Ia)_{n\rceil} = \frac{(1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}) - nv^n}{i}$$

$$(Ia)_{n\rceil} = \frac{\ddot{a}_{n\rceil} - nv^n}{i}$$

Pada anuitas menurun, jika *P* =n dan *Q* = -1, maka nilai tunai anuitas dinotasikan $(Da)_{n\rceil}$ yaitu



$$(Da)_{n\rceil} = na_{n\rceil} - \frac{a_{n\rceil} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{n - nv^n - a_{n\rceil} + nv^n}{i}$$

$$= \frac{n - a_{n\rceil}}{i}$$

nilai akumulasi anuitas ini dinotasikan $(Ds)_{n\rceil}$ yaitu

$$(Ds)_{n\rceil} = (Da)_{n\rceil}(1+i)^n$$

$$= \frac{n(1+i)^n - s_{n\rceil}}{i}$$

Kita bisa menentukan $(Da)_{n\rceil}$ dengan menggunakan pendekatan pada tingkat anuitas

$$(Da)_{n\rceil} = \sum_{t=1}^{n} a_{t\rceil}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1-v^t}{i}$$

$$= \frac{1-v}{i} + \frac{1-v^2}{i} + \frac{1-v^3}{i} + \cdots + \frac{1-v^n}{i}$$

$$(Da)_{n]} = \frac{n - (v + v^2 + \cdots + v^n)}{i}$$

$$(Da)_{n]} = \frac{n - a_{n]}}{i}$$

Untuk bermacam-macam perpetuitas :

$$A = Pa_{n]} + Q\frac{a_{n]} - nv^n}{i}$$

Dengan

$$\lim_{n\to\infty} a_{n]} = \frac{1}{i} \; dan \; \lim_{n\to\infty} nv^n = 0$$

Maka

$$A = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$$

P dan Q harus positif.

Pendekatan alternatif untuk mencari persamaan untuk bermacam-macan anuitas mengikuti 3 kuantitas berikut :

$F_n = v^n$ (nilai tunai pembayaran 1 pada akhir n periode)

$G_n = \frac{v^n}{d}$ (nilai tunai tingkat perpetuitas 1 per periode, pembayaran pertama pada akhir n periode)

$H_n = \frac{v^n}{d^2}$ (nilai tunai perpetuitas meningkat 1,2,3,..., pembayaran pertama pada akhir n periode)

2. Macam-macam pembayaran (*payments varying*) dalam deret geometri

Pada anuitas akhir dengan *n* periode dimana pembayaran pertama adalah 1 dan pembayaran selanjutnya meningkat pada deret geometri dengan rasio *1+k*.

Nilai tunai anuitas ini adalah

$$v + v^2(1+k) + v^3(1+k)^2 + \cdots + v^n(1+k)^{n-1}$$

Dengan deret geometri diperoleh

$$v\left[\frac{1 - \left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{1 - \left[\frac{1+k}{1+i}\right]}\right] = v\frac{1 - \left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{(i-k)v} = \frac{1 - \left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k}$$

Pada persamaan ini dapat dievaluasi dengan perhitungan langsung. Baik $\frac{1+k}{1+i}$ atau $\frac{1+i}{1+k}$ mungkin sama dengan 1+j untuk beberapa j dengan fungsi bunga tabulasi. Jika $k=i$ maka formula tidak terdefinisi. Namun, nilai tunai hanya nv.

Nilai tunai perpetuitas akan ada jika $0 < \frac{1+k}{1+i} < 1$ dimana kasus penjumlahan deret geometri ada. Jika $\frac{1+k}{1+i} \geq 1$ deret geometri divergen dan nilai tunai perpetuitas tidak ada.

3. Pola pembayaran lainnya

   Terdapat perbedaan antara istilah “varying annuity” dan “variable annuity”.Anuitas variabel adalah tipe anuitas dimana pembayaran bervariasi sesuai dengan pengalaman investasi dari akun investasi yang mendasari, biasanya diinvestasikan pada saham.

   Contoh :

   1. Gunakan teknik yang melibatkan F_n, G_n, H_n untuk mendapatkan formula $(Ia)_{n\rceil} = \frac{\ddot{a}_{n\rceil} - nv^n}{i}$ dan $(Da)_{n\rceil} = \frac{n - a_{n\rceil}}{i}$

      a. Pembayaran direpresentasikan dengan $(Ia)_{n\rceil}$ yaitu

$$H_1 - H_{n+1} - n.G_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\frac{v}{d^2} - \frac{v^{n+1}}{d^2} - n\frac{v^{n+1}}{d} &= \frac{v}{div} - \frac{v^{n+1}}{div} - n\frac{v^{n+1}}{iv} \\ &= \frac{1}{di} - \frac{v^n}{di} - \frac{nv^n}{i} \\ &= \frac{\frac{1-v^n}{d} - nv^n}{i} \\ &= \frac{\ddot{a}_{n\rceil} - nv^n}{i}\end{aligned}$$

      b. Pembayaran direpresentasikan dengan $(Da)_{n\rceil}$ yaitu

$$n.G_1 - (H_2 - H_{n+2})$$

$$n.\frac{v}{d} - \left[\frac{v^2}{d^2} - \frac{v^{n+2}}{d^2}\right] = \frac{n}{i} - \frac{1}{i^2}(1 - v^n)$$

$$= \frac{n - a_{n\rceil}}{i}$$

2. Anuitas menyediakan untuk 20 pembayaran tahunan, pembayaran tahun pertama yaitu \$1000. Pembayaran meningkat sehingga setiap pembayaran adalah 4% pembayaran sebelumnya.Tentukan nilai tunai dari anuitas ini pada tingkat bunga efektif tahunan adalah 7%.

Email :husnaarifah@uny.ac.id

Dengan menggunakan formula

$$\frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k} = \frac{1-\left[\frac{1+0.04}{1+0.07}\right]^{20}}{0.07-0.04} = \frac{1-\left[\frac{1.04}{1.07}\right]^{20}}{0.03} = \$14.459$$

4.7 Macam Anuitas (Tunjangan) yang Lebih Umum

Macam anuitas yang dijelaskan di bagian 4.6 diasumsikan bahwa periode pembayaran dan konversi bunga sebanding dan bertepatan.Pada bagian 4.7 pembatasan sepert itu diubah. Pada prakteknya, bermacam anuitas dengan pembayaran yang dibuat dengan frekuensi yang sedikit atau diperbanyak dari pada bunga convertible (menyesuaikan)yang jarang terjadi .

Kita akan mempertimbangkan generalisasi dari anuitas yang meningkat, $(Ia)_{n]}$, dengan bunga yang lebih konvertibel dan frekuensi yang lebih sedikit dibanding pembayaran yang dibuat. Anuitas yang lain dengan pembayaran yang berubah secara aritmetik (deret ukur) dapat diatasi secara analog.

Pertimbangan pertama dalam kasus dimana pembayaran dibuat lebih jarang dan bunga yang dapat berubah. Misalkan k adalah bilangan periode perubahan bunga dalam satu periode pembayaran, misalkan n menyatakan besarnya anuitas berdasarkan periode perubahan bunga.Bilangan pembayaran adalah n/k, yang berupa bilangan bulat.

Missal A adalah present value dari generalisasi anuitas naik.

$A = v^k + 2v^{2k} + \cdots + \left[\frac{n}{k} - 1\right] v^{n-k} + \frac{n}{k} v^n \qquad \ldots (1)$

dan

$(1+i)^k A = 1 + 2v^k + \cdots + \left[\frac{n}{k} - 1\right] v^{n-2k} + \frac{n}{k} v^{n-k} \qquad \ldots (2)$

Sekarang eliminasi persamaan (1) dengan (2)

$$(1+i)^k A = 1 + 2v^k + \cdots + \left[\frac{n}{k} - 1\right] v^{n-2k} + \frac{n}{k} v^{n-k}$$

$$A = v^k + 2v^{2k} + \cdots + \left[\frac{n}{k} - 1\right] v^{n-k} + \frac{n}{k} v^n$$

$$(1+i)^k A - A = 1 + 2v^k - v^k + 4v^{2k} - 2v^{2k} + \cdots + v^{n-k} - \frac{n}{k} v^n$$

Email :husnaarifah@uny.ac.id

Dapat pula di tulis sebagai:

$$A = \frac{a_{\overline{n}|} - \frac{n}{k}v^n}{is_{\overline{k}|}}$$

Rumus (4.40) adalah versi generalisasi dari formula (4.31) , silahkan lihat persamaanya!

Lebih lanjut pada kasus dimana pembayaran dibuat lebih sering daripada bunga yang berubah (konvertibel). Dua perbedaan hasil muncul berdasar

Mengingat situasi dimana laju pembayaran konstan selama setiap periode perubahan bunga dengan kenaikan terjadi hanya sekali per periode perubahan bunga. Kita bisa memanfaatkan hubungan antara perilaku terjadinya pembayaran dan besarnya bunga pada pembagi untuk menghasilkan versi rumus yang di generalisasi dari rumus (4.31)

$(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}}$ … (4.41)

Rumus (4.41) memberikan present value dari n-periode annuitas saat ini, dibayarkan per-m dimana pembayaran selama periode pertama adalah 1/m, pembayaran kedua 2/m , dst, hingga tiap pembayaran selama n periode adalah n/m

Lebih lanjut pada situasi dimana laju pembayaran berubah tiap periode pembayaran. Andaikan peningkatan annuitas dapat dibayarkan selama 1/m tiap periode perubahan bunga pada ahir dari m pertama dari periode perubahan bunga , 2/m tiap periode perubahan bunga pada m yang ke dua, dst. Maka pembayaran pertama harus lah $\frac{1}{m^2}$, yang ke-2 haruslah $\frac{2}{m^2}$, dst. Di tunjukan present value pada annuitas seperti ini adalah $(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|}$, dengan persamaan

$$(I^{(m)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m^2}\left[v^{\frac{1}{m}} + 2v^{\frac{2}{m}} + \cdots + nmv^{\frac{nm}{m}}\right]$$

$$= \frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}}$$

pembuktian silahkan cari !

annuitas dimana pembayaran bermacan deret geometri, dimana periode pembayaran dan periode perubahan bunga berbeda adakalanya dapat ditemukan . Meskipun demikian, layaknya annuitas awal tidak ada kesulitan baru. Dapat segera di selesaikan dengan mengekspresikan nilai annuitas sebagai jumlahan pada deret geometri dapat dengan segera ditaksir. Tehnik ini diilustrasikan pada contoh 4.17.

contoh 4.16 carilah present value dari ketakhinggaan yang dibayar 1 pada ahir dari tahun ke-3, 2 pada ahir tahun ke-6, 3 pada ahir tahun ke-9, dst

jawab:

Misalkan nilai present value dari perpetuitas adalah A, maka

$$A = v^3 + 2v^6 + 3v^9 + \cdots$$

$$v^3 A = v^6 + 2v^9 + \cdots$$

$$A(1 - v^3) = v^3 + v^6 + v^9 + \cdots = \frac{v^3}{1 - v^3}$$

$$A = \frac{v^3}{(1 - v^3)^2}$$

Jadi present value yaitu A sebesat $A = \frac{v^3}{(1-v^3)^2}$

Contoh 4.17

Carilah nilai akumulasi pada ahir dari 10 tahun dari sebuah tunjangan (annuitas) yang dibayarkan pada awal tiap tengah tahun selama 5 tahun. Besarnya pembayaran adalah \$ 2000, dan tiap pembayaran sebesar 98% dari pembayaran sebelumnya. Bunga kredit 10% berubah secara kuadratik.

Kita dapat menghitung tiap periode dalam perempat tahun. Nilai akumulasi adalah

$Pv = 2000[(0.98)^0(1.025)^{40} + (0.98)(1.025)^{36} + \cdots + (0.98)^9(1.025)^{22}]$

$= 2000\frac{(1.025)^{40} - (0.98)^{10}(1.025)^{20}}{1 - (0.98)(1.025)^{-2}}$

$= 40{,}052$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1.025)^{40}$

$$nv^n = (0.98)^{10}(1.025)^{20}$$

$$i^{(m)} = 1 - (0.98)(1.025)^{-2}$$

4.8 Macam Anuitas Kontinu

Anuitas kontinu merupakan pembayaran yang dilakukan secara terus menerus dengan nilai pembayaran yang berbeda untuk setiap pembayaran selama n tahun.

Nilai sekarang (t=0) dari anuitas, dimana pembayaran pada waktu t didefinisikan sebagai $f(t)dt$ dan tingkat bunga efektif tahunan i , dihitung sebagai berikut :

$$PV = (\bar{I}\bar{a})_{n]} = \int_0^n f(t)v^t dt$$

Jika bunga yang diberikan berupa variabel δ_t dan $f(t)e^{-\int_0^t \delta_r\, dr}dt$ merupakan nilai saat ini dari pembayaran $f(t)dt$ pada waktu t maka nilai saat ini dari variasi anuitas kontinu n periode adalah

$$PV = (\bar{I}\bar{a})_{n]} = \int_0^n f(t)e^{-\int_0^t \delta_r\, dr}dt$$

Contoh:

Tentukan nilai sekarang dari anuitas kontinu selama n tahun dengan tingkat bunga efektif sebesar δ dan besar pembayaran pada waktu ke t adalah sebesar t^2

$$\begin{aligned}
\int_0^n t^2 e^{-\delta t}dt &= -\frac{t^2}{\delta}e^{-\delta t}\Big]_0^n + \frac{2}{\delta}\int_0^n te^{-\delta t}dt \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \left[\frac{2t}{\delta^2}e^{-\delta t}\right]_0^n + \frac{2}{\delta^2}\int_0^n e^{-\delta t}dt \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \frac{2n}{\delta^2}e^{-\delta n} - \left[\frac{2}{\delta^3}e^{-\delta t}\right]_0^n \\
&= -\frac{n^2}{\delta}e^{-\delta n} - \frac{2n}{\delta^2}e^{-\delta n} - \frac{2}{\delta^3}e^{-\delta n} + \frac{2}{\delta^3} \\
&= \frac{2}{\delta^3} - e^{-\delta n}\left[\frac{n^2}{\delta} + \frac{2n}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Daftar Pustaka

Theory of Interest, Kellison, S.G., 1991, 2nd Edition, Mc Graw Hill