Email : husnaarifah@uny.ac.id

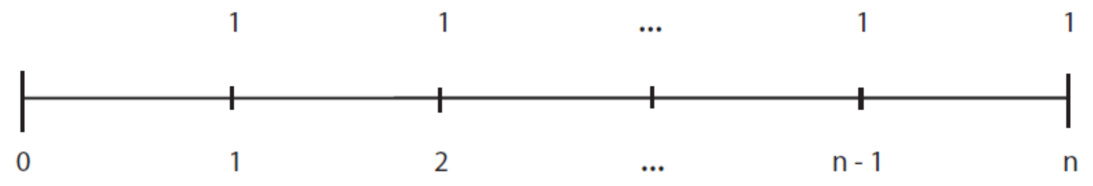
ANUITAS DASAR

3.1 Pendahuluan

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan pada interval waktu yang sama (per tahun atau sebaliknya). Pembayaran untuk jangka waktu tertentu dalam waktu yang tetap disebut anuitas tertentu.

3.2 Anuitas Akhir

Pembayaran pertama yang dilakukan pada setiap akhir tahun selama n tahun



Nilai tunai (pada t = 0) dari sebuah anuitas akhir, di mana tingkat efektif tahunan dari bunga i, akan dinotasikan sebagai $a_{\bar{n}|i}$ dan dihitung sebagai berikut:

$$a_{\bar{n}|i} = (1)v + (1)v^2 + \cdots + (1)v^{n-1} + (1)v^n$$

$$= v(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1})$$

$$= \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-v^n}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}}\right)$$

$$= \frac{1-v^n}{i}$$

Nilai akumulasi (pada t = n) dimana tingkat efektif tahunan anuitas akhir, dari bunga i, dapat dinyatakan sebagai $s_{\bar{n}|i}$ dan dihitung sebagai berikut:

$$s_{\bar{n}|i} = 1 + (1)(1 + i) + \cdots + (1)(1 + i)^{n-2} + (1)(1 + i)^{n-1}$$

$$= \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

$$= \frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

$$= \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Nilai tunai dari pendapatan pembayaran ganda pada t = 0 adalah $i \,.\, a_{\bar{n}|i} + (1)v^n$.

Jika nilai yang akan datang pada waktu n, $s_{\bar{n}|}$, diperhitungkan kembali ke waktu 0, maka akan diperoleh nilai tunai $a_{\bar{n}|}$

$$s_{\bar{n}|} \,.\, v^n = \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] . \, v^n$$

$$= \frac{(1+i)^n \,.\, v^n - v^n}{i}$$

$$= \frac{1 - v^n}{i}$$

$$= a_{\bar{n}|}$$

Jika nilai tunai pada waktu 0, $a_{\bar{n}|}$, adalah akumulasi ke depan untuk waktu n, maka akan didapat nilai yang akan datang $s_{\bar{n}|}$

$$a_{\bar{n}|} \,.\; (1+i)^n = \left[\frac{1 - v^n}{i}\right] (1+i)^n$$

$$= \frac{(1+i)^n \; - v^n \; (1+i)^n}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^n \; -1}{i}$$

$$= s_{\bar{n}|}$$

Mengingat pinjaman dari 1, yang harus dibayar selama n tahun dengan pembayaran tahunan sebesar P yang dibayarkan pada akhir tahun. Tingkat bunga efektif tahunan, digunakan i . Nilai tunai pinjaman pembayaran tunggal ini harus sama dengan nilai tunai dari pendapatan pembayaran aliran ganda.

$$P\ .\ a_{\overline{n}|i} = 1$$

$$P = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Nilai yang akan datang dari beberapa pendapatan deposito harus sama dengan nilai yang akan datang pembayaran tunggal, yang merupakan pinjaman dari 1.

$$D\ .\ s_{\overline{n}|i} = 1$$

$$D = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

Hubungan antara $a_{\overline{n}|}\ dan\ s_{\overline{n}|}$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i$$

Dibuktikan dengan :

$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n\ -1} + i$

$= \frac{i+i(1+i)^n\ -i}{(1+i)^n\ -1}$

$= \frac{i}{1-v^n}$

$= \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$

Contoh :

1. Carilah nilai tunai dari anuitas \$ 500 yang bayarkan pada akhir setiap setengah tahun selama 20 tahun jika tingkat bunga 9% yang dikonversi tiap semester
   Penyelesaian :
   $$500a_{\overline{40}|0.045} = 500\ \left(\frac{1-v^{40}}{0.045}\right) = 500\ \left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+0.045}\right)^{40}}{0.045}\right) = 500\ (18.4016) = \$9200.80$$
2. Jika seseorang menginvestasikan \$1000 dengan tingkat bunga 8% setiap triwulan, berapa banyak yang dapat ditarik pada akhir setiap triwulan untuk menggunakan sampai dana tersebut tepat pada akhir 10 tahun?

Dengan R adalah jumlah penarikan

Penyelesaian :

$$Ra_{\overline{40}|0.02} = 1000$$

$$R = \frac{1000}{a_{\overline{40}|0.02}}$$

$$= \frac{1000}{27.3555}$$

$$= \$36.56$$

3. Membandingkan jumlah total bunga yang akan dibayarkan pada beban $ 1.000 selama periode 10 tahun, jika tingkat bunga efektif adalah 9% per tahun, di bawah tiga metode pembayaran sebagai berikut:
   (1) seluruh pinjaman ditambah akumulasi bunga yang dibayarkan dalam satu jumlah lump di akhir 10 tahun
   (2) bunga dibayarkan setiap tahun sebagai biaya dan harus dilunasi pada akhir 10 tahun
   (3) pinjaman dilunasi dengan tingkat pembayaran selama periode 10 tahun

   Penyelesaian :

   (1) Nilai akumulasi dari beban $1000 pada akhir 10 tahun :
   $1000\ (1 + 0.09)^{10} = 1000\ (1.09)^{10} = \$2367.36$
   Jumlah total bunga sama dengan :
   $$\$2367.36 - \$1000 = \$1367.36$$
   (2) setiap tahun mendapatkan pinjaman bunga sebesar 1000 . (0.09) = $90 jadi jumlah total bunga sama dengan 10 . 90 = $900
   (3) tingkat pembayaran adalah R. Dan
   $$Ra_{\overline{10}|} = 1000$$
   $$R = \frac{1000}{a_{\overline{10}|}}$$
   $$= \frac{1000}{6.417658} = \$155.82$$

Maka jumlah total bunga sama dengan

$$10(155.82) - 1000 = \$558.20$$

3.3 Anuitas Jatuh Tempo

Pembayaran dari 1 yang dilakukan pada setiap awal tahun selama n tahun. Nilai tunai (pada t = 0) dari sebuah anuitas jatuh tempo, dimana tingkat efektif bunga tahunan adalah i, akan dinotasikan sebagai $\ddot{a}_{\bar{n}|}$ dan dihitung sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$= \frac{1 - v^n}{iv}$$

$$= \frac{1 - v^n}{d}$$

Nilai akumulasi (pada t = n) dari sebuah anuitas jatuh tempo, dimana tingkat bunga efektif tahunan adalah i, akan dinotasikan sebagai $\ddot{s}_{\bar{n}|}$ dan dihitung sebagai berikut:

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n$$

$$= (1 + i)\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1}$$

$$= \frac{(1 + i)^n - 1}{iv}$$

$$= \frac{(1 + i)^n - 1}{d}$$

Jika nilai masa depan pada waktu n, $\ddot{s}_{\bar{n}|}$, diperhitungkan kembali ke waktu 0, maka akan diperoleh nilai tunai $\ddot{a}_{\bar{n}|}$

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} \,.\, v^n = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{d}\right].\, v^n$$

$= \frac{(1+i)^n \, . \, v^n - v^n}{d}$

$= \frac{1 - v^n}{d}$

$= \ddot{a}_{\bar{n}|}$

Jika nilai tunai pada waktu 0, $\ddot{a}_{\bar{n}|}$, adalah akumulasi ke depan untuk waktu n, maka akan diperoleh nilai masa depan, $\ddot{s}_{\bar{n}|}$

$\ddot{a}_{\bar{n}|} \, . \, (1+i)^n = \left[\frac{1 - v^n}{d}\right] (1+i)^n$

$= \frac{(1+i)^n \; - v^n \; (1+i)^n}{d}$

$= \frac{(1+i)^n \; -1}{d}$

$= \ddot{s}_{\bar{n}|}$

Pertimbangkan pinjaman dari 1, yang harus dibayar kembali selama n tahun dengan pembayaran tahunan sebesar P dibuat pada setiap awal tahun. Tingkat efektif bunga tahunan, i. Nilai tunai dari pinjaman pembayaran tunggal harus sama dengan nilai tunai dari pembayaran ganda.

$$P \, . \, \ddot{a}_{\bar{n}|i} = 1$$

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{\bar{n}|i}}$$

Nilai yang akan datang dari beberapa pendapatan deposito harus sama dengan nilai yang akan datang pembayaran tunggal, yang merupakan pinjaman dari 1.

$$D \, . \, \ddot{s}_{\bar{n}|i} = 1$$

$$D = \frac{1}{\ddot{s}_{\bar{n}|i}}$$

Dengan catatan bahwa

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\bar{n}|i}} = \frac{d}{1-v^n} \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} = \frac{d(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{d(1+i)^n + d - d}{(1+i)^n - 1} = \frac{d[(1+i)^n - 1] + d}{(1+i)^n - 1}$$

$$= d + \frac{d}{(1+i)^n - 1} = d + \frac{1}{\ddot{s}_{\bar{n}|i}}$$

Hubungan antara anuitas akhir dan anuitas jatuh tempo

$$\ddot{a}_{\bar{n}|i} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-v^n}{i}\,.\ (1+i) = a_{\bar{n}|i}\,.(1+i)$$

Atau,

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + [v + v^2 + \cdots + v^{n-1}]$$

$$= 1 + v[1 + v + \cdots + v^{n-3} + v^{n-2}]$$

$$= 1 + v\left(\frac{1-v^{n-1}}{1-v}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-v^{n-1}}{d}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1-v^{n-1}}{\frac{i}{1+i}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1-v^{n-1}}{i}$$

$$= a_{\overline{n-1}|i}$$

$$\ddot{s}_{\bar{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].(1+i) = s_{\bar{n}|i}\,.(1+i)$$

Atau,

$$s_{\bar{n}|} = 1 + [(1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

$$= 1 + (1+i)[1 + \cdots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2}]$$

$$= 1 + (1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{n-1}}{1-(1+i)}\right]$$

$$= 1 + (1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{n-1}}{-i}\right]$$

$$= 1 + (1+i)\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}\right]$$

$$= 1 + \frac{(1+i)^{n-1}-1}{d}$$

$$= 1 + \ddot{s}_{\overline{n-1}|}$$

Contoh :

4. Seorang investor ingin mengakumulasi \$ 1000 pada akhir 12 tahun. Untuk mencapai hal ini rencana investor untuk membuat deposito pada setiap akhir tahun, pembayaran akhir akan dilakukan satu tahun sebelum akhir periode investasi. Seberapa besar seharusnya setiap deposit jika dana tersebut memperoleh 7% efektif?

   Penyelesaian :

   $D \,.\, \ddot{s}_{\overline{11}|} = 1000$

$$D = \frac{1000}{\ddot{s}_{\overline{11}|}}$$

$$= \frac{1000}{1.07\, s_{\overline{11}|}}$$

$$= \frac{1000}{(1.07)(15.7836)} = \$59.21$$

3.4 Nilai Anuitas pada Waktu Tertentu

Nilai Anuitas pada waktu tertentu dapat dihasilkan dengan mengakumulasi atau mendiskon setiap pembayaran terpisah dan menjumlahkan hasil2nya. Meskipun begitu, metode ini tidak efisien jika nilai besar pada pembayaran juga terhitung.

Deffered Annuity→ Nilai Sekarang pada nilai tengah anuitas yang ditangguhkan untuk m periode dengan waktu untuk n periode setelah masa penangguhan.

$v^m a_{n\rceil} = a_{m+n\rceil} - a_{m\rceil}$

Nilai Akumulasi pada anuitas periode ke-n, periode m setelah pembayaran terakhir:

$s_{n\rceil}(1+i)^m = s_{m+n\rceil} - s_{m\rceil}$

Secara umum, Rumus Nilai Saat Ini antara pembayaran pertama dan terakhir

$\ddot{a}_{n\rceil}(1+i)^m = v^{n-m} s_{n\rceil} = s_{m\rceil} + a_{n-m\rceil}$

3.5 Perpetuities (Anuitas Tak Terhingga)

Perpetuity adalah nilai anuitas yang dibayarkan kontinyu selamanya. Dengan kata lain bentuk anuitasnya tidak berhingga.

Present value pada perpetuity-immediate dinotasikan oleh

$$
\begin{aligned}
a_{\infty\rceil} &= v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots \\
&= \frac{v}{1-v} \\
&= \frac{v}{iv} \\
&= \frac{1}{i}
\end{aligned}
$$

Bukti ada di halaman 69

Dengan menganalogikan untuk perpetuity-due maka

$\ddot{a}_{\infty\rceil} = \frac{1}{d}$

3.6 NONSTANDARD TERMS AND INTEREST RATES

- **Asumsikan bahwa n adalah bilangan bulat positif dan bahwa i> 0 dalam salah satu simbol anuitas. Bagian ini mempertimbangkan implikasi jika kondisi ini tidak memenuhi.**

- **Dianggap dulu apa simbol a_{n+k}, dimana n adalah bilangan bulat positif dan 0 <k <1, mungkin mewakili. Formula (3.1) tidak dapat diterapkan, karena memerlukan bahwa n bilangan bulat positif. Hal ini dimungkinkan untuk memperoleh hasil yang konsisten dengan rumus (3.2)**

$$a_{n+k} = \frac{1 - v^{n+k}}{i}$$

$$= \frac{1 - v^n + v^n - v^{n+k}}{i}$$

$$= a_n + v^{n+k}\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]$$

- **Nilai sekarang dari anuitas n_period langsung dari 1 per periode, ditambah pembayaran terakhir pada waktu n + k**
- **Pembayaran yang mungkin lebih "nyaman" untuk beberapa pembaca adalah k, yaitu pembayaran akan proposional dengan waktu fraksional yang terlibat. Sebagai latihan, akan diminta untuk menemukan kesalahan yang terlibat dalam appoximation ini.**
- **Jika i ≤ 0, kasus di mana i = 0 dalam penting dalam praktek. Jika i = 0, maka nilai sekarang atau nilai akumulasi anuitas apapun hanyalah jumlah pembayaran. Kami memiliki:** $a_n = s_n = n, if\ i = 0$
- **Jika i <0 maka beberapa hasil yang menarik muncul. Nilai kini menjadi akumulasi nilai-nilai, dan sebaliknya, yang mempunyai daya tarik intuitif. Sekali lagi, bagaimanapun, hasil ini lebih dari theoritical dari signifikansi praktis.**

3.7 UNKNOWN TIME

- **Secara umum, masalah yang melibatkan waktu yang tidak diketahui tidak akan menghasilkan jawaban yang tepat integral untuk n.**
- **masalah ini dapat ditangani sepanjang garis bagian 3.6 di mana pembayaran kecil dibuat selama periode setelah pembayaran reguler terakhir.**

- **Namun, dalam prakteknya, hal ini jarang dilakukan karena ketidaknyamanan dan kebingungan melakukan pembayaran pada tanggal yang bukan merupakan jumlah bagian integral dari periode dari tanggal semua pembayaran lainnya yang dibuat.**
- **misalnya, membuat semua pembayaran reguler pada 1 Juli setiap tahun untuk jangka waktu tahun diikuti dengan pembayaran yang lebih kecil pada 27 November tidak nyaman bagi salah satu pihak untuk transaksi.**
- **dalam praktik yang baik adalah untuk melakukan pembayaran tambahan kecil pada saat yang sama sebagai pembayaran rutin terakhir, pada dasarnya melakukan pembayaran lebih besar dari pembayaran rutin, yang disebut pembayaran balon, atau untuk melakukan pembayaran satu periode yang lebih kecil setelah terakhir pembayaran rutin disebut pembayaran penurunan.**
- **dalam dua situasi ini tidak sama, tidak akan sama dengan pembayaran yang lebih kecil dilakukan pada titik menengah seperti pada bagian 3.6. Namun, semua pembayaran ini akan setara nilainya.**
- **Contoh 3.6 Sebuah investasi sebesar \$ 1000 yang akan digunakan untuk melakukan pembayaran sebesar \$ 100 pada akhir setiap tahun untuk selama mungkin. jika dana tersebut memperoleh tingkat bunga tahunan efektif dari 5%, cari berapa banyak pembayaran reguler dapat dibuat dan menemukan jumlah pembayaran lebih kecil: 1) yang harus dibayar pada tanggal pembayaran rutin terakhir, 2) yang harus dibayar satu tahun setelah pembayaran rutin terakhir, dan 3) yang harus dibayar pada tahun berikutnya pembayaran reguler terakhir, seperti yang dijelaskan dalam bagian 3.6.**
- **Jawab:**

$$100\, a_n = 1000$$
$$a_n = 10$$
$$14 < N < 15$$

1. **Persamaan nilai terakhir tahun ke-14 adalah:**

$$100 s_{14} + X_1 = 1000(1.05)^{14}$$
$$X_1 = 1000(1.05)^{14} - 100 s_{14}$$
$$= 1979.93 - 1959.86$$
$$= \$20.07 \qquad \text{...(1)}$$

2. **Persamaan nilai terakhir tahun ke-15 adalah:**

$$100 \ddot{s}_{14} + X_2 = 1000(1.05)^{15}$$
$$X_2 = 1000(1.05)^{15} - 100(s_{14} - 1)$$

$$= \mathbf{2078.93 - 2057.86}$$
$$= \$\mathbf{21.07} \qquad \text{...(2)}$$

Dari pers. (1) dan (2) dapat ditulis bahwa $\mathbf{20.07(1.05) = 21.07}$ atau secara umum: $\boldsymbol{X_1(1+i) = X_2}$

3. **Dalam kasus persamaan nilai ini menjadi:**

$$\mathbf{100\, a_{14+k} = 1000}$$
$$\mathbf{a_{14+k} = 10, \mathit{dimana}\ 0} < k < 1$$

Maka bisa kita tulis sebagai:

$$\frac{\mathbf{1 - v^{14+k}}}{\boldsymbol{i}} = \mathbf{10}$$

$$\boldsymbol{v^{14+k} = 1 - 10i = 0.5}$$
$$\mathbf{(1.05)^{14+k} = 2}$$

Diperoleh: $\boldsymbol{14 + k = \frac{\log_e 2}{\log_e 1.05} = \frac{0.693147}{0.04879} = 14.2067}$

$$\boldsymbol{k = 14.2067 - 14 = 0.2067}$$

Sehingga, rumus terakhir dari pembayaran irreguler adalah:

$$\boldsymbol{X_3 = 100 \frac{(1.05)^{0.2067} - 1}{0.05} = \$20.27}$$

Lunas pada waktu 14.2067 ...

3.8 Unknown Rate Of Interest

Terdapat tiga metode yang dapat digunakan untuk menentukan *unknown rate of interest*, yaitu:

1. Teknik aljabar

   Misal, definisi dasar kita untuk sebuah *annuity-immediate* (anuitas langsung) selama n-tahun adalah $a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n$ yang merupakan polinomial berderajat n dalam v. jika akar dari polinomial ini dapat ditemukan secara aljabar, maka i juga dapat ditemukan. Metode ini hanya dapat digunakan untuk ukuran n kecil.

   Atau kita juga dapat menyatakan $a_{\overline{n}|}$ atau $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ dalam i dan menyelesaikannya dengan teknik aljabar. Sebagai ekspansi deret,

   $$a_{\overline{n}|} = n - \frac{n(n+1)}{2!} i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} i^2 - \cdots \qquad (3.24)$$

   dan

   $$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2} i + \frac{n^2-1}{12} i^2 + \cdots\right]. \qquad (3.25)$$

2. Interpolasi linear dalam tabel bunga.

   Keakuratan interpolasi linear bergantung pada seberapa dekat tingkat bunga pada tabel tertabulasi.

3. *Successive approximation*/iterasi (metode yang paling baik)

   Iterasi dapat dengan mudah digunakan jika persamaan $i_1 = g(i)$ ada dan konvergen terhadap nilai i yang sebenarnya, yang memenuhi persamaan.

   Ambil sebuah nilai awal i_0, kemudian carilah nilai i_1 dengan $i_1 = g(i_0)$, $i_1 \neq i_0$, kemudian cari nilai i_2 dengan $i_2 = g(i_1)$, dan seterusmya. Jika iterasi tersebut konvergen maka i_0, $i_1, i_{2,\ldots}$ berturut-turut mendekati nilai i yang sebenarnya. Dalam praktiknya, iterasi dijalankan sampai $i_{s+1} = i_s$ untuk tingkat ketelitian yang dikehendaki, dengan i_s yaitu tingkat bunga pada waktu periode ke-s.

Mengingat bahwa nilai $a_{\overline{n|}}$ diberikan sebagai suatu nilai konstan k, maka untuk menemukan tingkat bunga i yang menghasilkan nilai tersebut dapat digunakan metode iterasi yang diperoleh secara langsung dari formula (3.2). Metode iterasi tersebut yaitu

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{k}, \tag{3.27}$$

namun sayangnya laju kekonvergenan dari metode iterasi ini sangat lambat.

Metode yang menunjukkan kekonvergenan penyelesaian $a_{\overline{n|}i} = k$ secara cepat yaitu metode iterasi Newton-Raphson :

$$i_{s+1} = i_s \left[1 + \frac{1-(1+i_s)^{-n} - k i_s}{1-(1+i_s)^{-n-1}\{1+i_s(n+1)\}}\right]. \tag{3.28}$$

Metode ini sedikit rumit dan mungkin bukan kesulitan yang layak untuk perhitungan tertutup, namun tetap merupakan metode yang tepat untuk perhitungan skala besar.

Dalam menggunakan metode iterasi dibutuhkan nilai awal. Nilai awal yang baik dapat diperoleh melalui interpolasi linear seperti metode Newton-Raphson di atas. Akan tetapi, terdapat metode yang lebih tepat untuk menentukan nilai awal dibanding interpolasi, yaitu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{a_{n\rceil}} \doteqdot \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2} i\right]$$

$$\frac{n+1}{2n} i \doteqdot \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{n-k}{nk}$$

Atau $i \doteqdot \frac{2(n-k)}{k(n+1)}$. (3.29)

Nilai akumulasi secara analog dapat diperoleh seperti (3.28) dan (3.29). Rumus iterasi Newton-Raphson untuk menyelesaikan $s_{n\rceil i} = k$ yaitu

$$i_{s+1} = i_s \left[1 + \frac{(1+i_s)^{-n} - 1 - k i_s}{(1+i_s)^{n-1}\{1 - i_s(n-1) - 1\}}\right], \quad (3.30)$$

dan rumus yang analog dengan (3.29) yaitu

$$i \doteqdot \frac{2(n-k)}{k(n-1)}. \quad (3.31)$$

3.9Macam-macam Bunga

Misal i_k merupakan tingkat bunga yang digunakan selama periode k (interval dari waktu $k-1$ ke waktu k, dan *present value* untuk periode-n merupakan *annuity-immediate.*

Dua pola variasi dapat dibentuk. Pola pertama, untuk i_k ialah tingkat yang digunakan selama periode k tanpa memperhatikan kapan pembayaran dilakukan. Artinya, tingkat bunga yang digunakan adalah sama untuk semua pembayaran selama periode tersebut. Dalam kasus ini, *present value* menjadi

$$a_{n\rceil} = (1+i_1)^{-1} + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} + \cdots + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} \ldots (1+i_n)^{-1}$$
$$= \sum_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{t} (1+i_s)^{-1} \quad (3.34)$$

Pola kedua akan digunakan untuk menghitung *present value* dengan menggunakan i_k untuk pembayaran yang dilakukan pada waktu k atas semua k periode. Dalam kasus ini, *present value* menjadi :

$$a_{n\rceil} = (1+i_1)^{-1} + (1+i_2)^{-1} + \cdots + (1+i_n)^{-n} = \sum_{t=1}^{n} (1+i_t)^{-t} \quad (3.35)$$

Untuk nilai akumulasi, jika i_k ialah tingkat yang digunakan selama periode k tanpa memperhatikan kapan pembayaran dilakukan, maka

$$\ddot{s}_{n\rceil} = (1+i_n) + (1+i_n)(1+i_{n-1}) + \cdots + (1+i_n)(1+i_{n-1})\ldots(1+i_1) = \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_{n-s+1}) \qquad (3.36)$$

Jika pembayara dilakukan pada waktu k dan pada tingkat bunga i_k atas sisa dari periode akumulasi, maka

$$\ddot{s}_{n\rceil} = (1+i_n) + (1+i_n)^2 + \cdots + (1+i_n)^n = \sum_{t=1}^{n}(1+i_{n-t+!})^t \qquad (3.37)$$

Nilai akumulasi *annuity-immediate* dapat dibentuk dari nilai akumulasi *annuity-due*, yaitu $s_{n+1\rceil} = \ddot{s}_{n\rceil} + 1$.

Contoh 3.10 :

Carilah nilai akumulasi *annuity-immadiate* selama 10 tahun dari \$100 per tahun jika tingkat bunga efektif adalah 5% untuk enam tahun pertama dan 4% untuk empat tahun berikutnya.

Penyelesaian :

Nilai akumulasi untuk pembayaran enam tahun pertama yaitu $100s_{6\rceil 0,05}$.

Nilai ini diakumulasi pada akhir tahun ke-10 dengan tingkat bunga 4%, maka

$$100s_{6\rceil 0,05}(1+0,04)^4 = 100s_{6\rceil 0,05}(1,04)^4$$

Nilai akumulasi untuk empat tahun terakhir yaitu $100s_{4\rceil 0,04}$

Jadi, nilai akumulasi \$100 per tahun selama 10 tahun dengan bunga seperti di atas yaitu,

$$\begin{aligned}
100s_{6\rceil 0,05}(1,04)^4 + 100s_{4\rceil 0,04} &= 100\left[s_{6\rceil 0,05}(1,04)^4 + s_{4\rceil 0,04}\right] \\
&= 100\left[(\ddot{s}_{5\rceil}+1)(1,04)^4 + (\ddot{s}_{3\rceil}+1)\right] \\
&= 100[\{(1+0,05) + (1+0,05)^2 + (1+0,05)^3 \\
&\qquad + (1+0,05)^4 + (1+0,05)^5 \\
&\qquad + 1\}(1,04)^4 + (1+0,04) \\
&\qquad + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3 + 1)] \\
&= 100[(5,8019+1)(1,21551) + (3,2465+1)] \\
&= 100[(6,8019)(1,21551) + 4,2465]
\end{aligned}$$

$$= \$1251{,}43.$$

3.10 ANUITAS DENGAN TANPA PENYERTAAN BUNGA MAJEMUK

Dalam pembahasan sebelumnya, anuitas selalu dihitung menggunakan bunga majemuk. Sekarang akan dianalisis jika anuitas dihitung dengan tanpa penyertaan bunga majemuk.

Valuasi dari anuitas ini memang sangat rawan terjadi kesalahan. Diperlukan analisis mendalam untuk menghasilkan nilai yang tepat, karena memang sangat mungkin bisa dihasilkan nilai yang beragam.

Present Value dari anuitas akhir dengan n periode adalah sama dengan jumlah dari Present Value pembayaran masing-masing periode. Telah dikemukakan sebelumnya bahwa

$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n$, karena $v = 1 - d$ dan sudah diketahui relasi i dan d adalah $d = \frac{i}{1+i}$, maka $v = 1 - \frac{i}{1+i} = \frac{1}{1+i}$, jadi

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1}{1+i} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

$a_{\overline{n}|} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$, karena $(1+i)^t = a(t)$ maka secara umum bisa ditulis bahwa

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{a(t)}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $s_{\overline{n}|}$. Diasumsikan 1 diinvestasikan pada waktu t, dimana $t = 1, 2, \ldots n-1$, maka akan berakumulasi menjadi $\frac{a(n)}{a(t)}$ saat waktu n. Jadi didapatkan

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{a(n)}{a(t)} = a(n) \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{a(t)} \ldots\ldots(1)$$

Formula tersebut tidak bisa menghasilkan hasil yang benar dalam semua kasus. Misal diambil contoh akan dicari nilai akumulasi dari anuitas akhir (*annuities-immediate*) dalam n periode, dimana pembayaran dilakukan dari awal sampai akhir n periode dengan bunga tunggal. Nilai akumulasinya adalah

$$1 + (1+i) + (1+2i) + \ldots + \left[(n-1)i\right],$$

Formula diatas mendasari bentuk umum yang lain dari $s_{\overline{n}|}$ yaitu

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} a(t) \ldots\ldots (2)$$

Dan dengan formula (2) akan didapatkan solusi yang tepat dari contoh kasus di atas. Dengan menggunakan (2) didapatkan juga bentuk lain dari $a_{\overline{n}|}$, yaitu

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{a(t)}{a(n)} = a(t) \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{a(n)}$$

Contoh:

Bandingkan hasil dari $s_{\overline{6}|0,1}$ menggunakan:

a. Bunga majemuk
b. Formula (1)
c. Formula (2)

Jawaban:

a. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$$s_{\overline{6}|0,1} = \frac{(1+0,1)^6 - 1}{0,1} = 7,71561$$

b. Menggunakan formula (1)

$$a(t) = 1 + it$$

$$s_{\overline{n}|} = a(n) \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{a(t)}$$

$$s_{\overline{n}|} = 1,6 \left[\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \cdots + \frac{1}{1,6} \right] = 7,22817$$

c. Menggunakan formula (2)

$$a(t) = 1 + it$$

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} a(t)$$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + 1,1 + 1,2 + \ldots + 1,5 = 7,5$$

SUMBER PUSTAKA

Theory of Interest, Kellison, S.G., 1991, 2nd Edition, Mc Graw Hill