Spesifikasi Sistem Respon

Moh. Khairudin, PhD.

Lab. Kendali T. Elektro UNY

Pendahuluan

Dari pelajaran terdahulu, rumus umum fungsi transfer order ke dua adalah :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dimana bentuk responnya ditentukan oleh rasio *damping :*

1. *Overdamped* jika $\zeta > 1$;
2. *Underdamped* jika $\zeta < 1$;
3. *Undamped* jika $\zeta = 0$;
4. *Critically damped* jika $\zeta = 1$;

Telah dinyatakan pula bahwa frekuensi ω_n mengatur kecepatan respon dan besaran *exponential decay frequency* (σ_d) dan *damped natural frequency* (ω_d).

Telah dibahas juga cara untuk menentukan lokasi *pole* sistem order ke dua dan ditemukan, bahwa untuk sistem-sistem *underdamped,* $s = -\sigma_d \pm j\omega_d$

Terakhir, dikembangkan rumus untuk *step response* :

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \\ &= 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma_d t} \cos(\omega_d t + \phi) \qquad (1) \end{aligned}$$

Pada bagian ini, berdasarkan kurva respon *underdamped*, akan dikembangkan persamaan untuk mengukur kinerja, prosentase *overshoot*, *settling time*, dan *rise time*, dalam konteks parameter order-dua tergeneralisasi

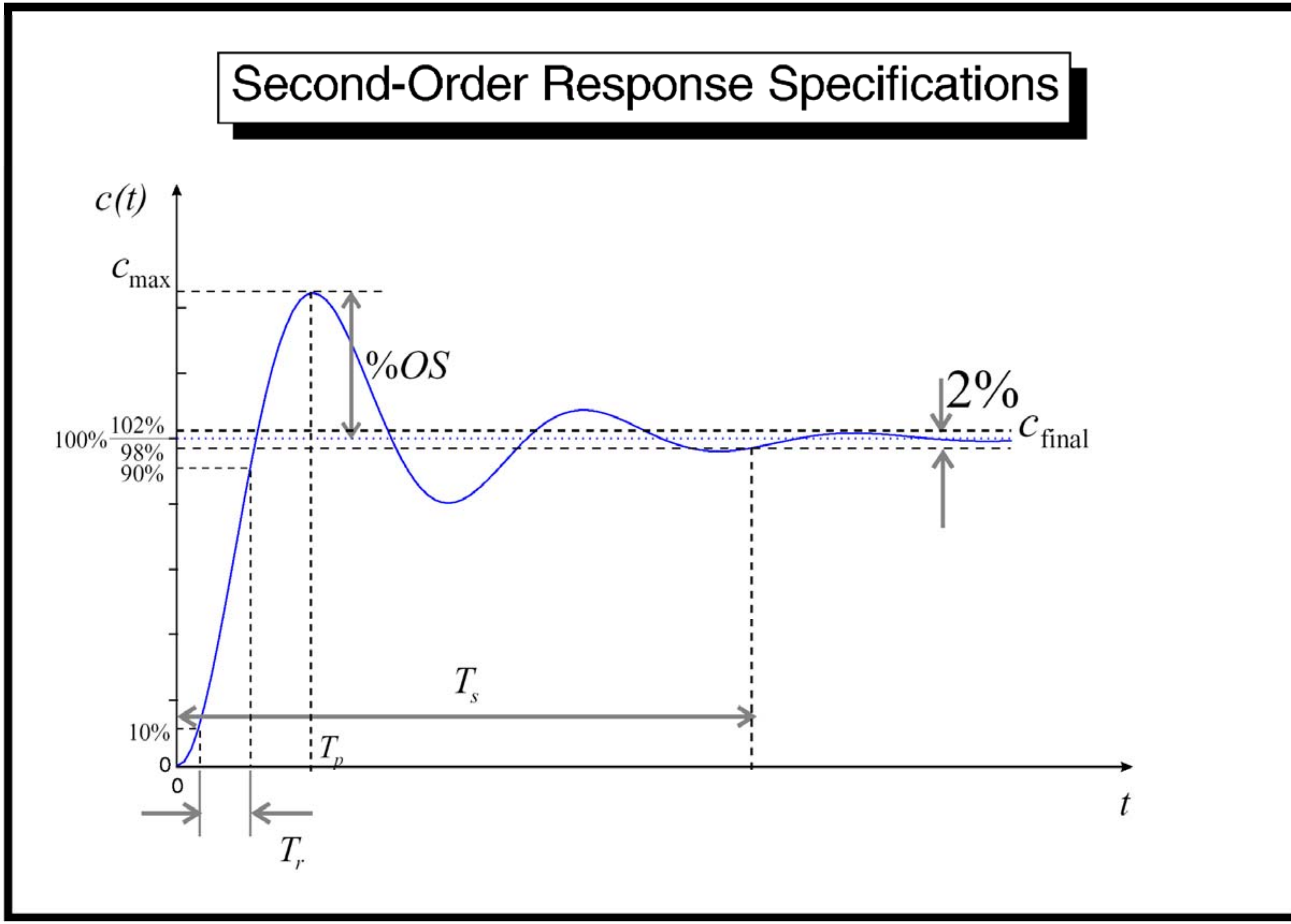
4.5 Spesifikasi Respon Order-Dua

Untuk menentukan respon order-dua, kita perlu mendefinisikan beberapa ukuran kinerja bedasarkan kurva respon *underdamped*. Spesifikasi-spesifikasi tersebut adalah :

1. **Peak Time** T_p : waktu yang diperlukan untuk mencapai *peak* pertama, atau maksimum.
2. **Persen *Overshoot*** $\%OS$: jumlah gelombang yang melakukan *overshoot* terhadap *steady-state* atau nilai akhir pada waktu puncak, diekspresikan dalam bentuk prosentase terhadap nilai *steady-state*.
3. **Settling time** T_s : besarnya waktu yang diperlukan oleh osilasi teredam (*damped*) transien untuk bertahan pada ±2% nilai akhir.
4. **Rise Time** T_r : waktu yang diperlukan untuk perubahan dari 10% menjadi 90% nilai akhir.

Slide 1

IA1


Second-Order Response Specifications
c(t)
c max
%OS
2%
c final
100%
102%
98%
90%
10%
0
0
T s
T p
T r
t

Slide 5

IA1

Irwan Arifin, 10/27/2004

Risetime, *settling time*, dan *peak time* memberikan informasi mengenai kecepatan dan 'kualitas" respon transien. Besara-besaran ini dapat membantu perancang untuk mencapai kecepatan yang diinginkan tanpa osilasi atau *overshoot* yang berlebihan.

Perlu diperhatikan bahwa dua spesifikasi terakhir (T_r dan T_s) sama seperti yang digunakan pada sistem order-satu dan mereka juga bisa digunakan untuk *sistem overdamped dan sistem critically-damped* order dua.

Sebenarnya, spesifikasi-spesifikasi ini dapat juga digunakan untuk sistem-sistem berorder lebih tinggi dari dua, yang akan menghasilkan respon dengan bentuk pendekatan yang sama. Namun demikian, rumus analitik yang menghubungkan parameter spesifikasi respon waktu ke lokasi *pole* dan *zero* hanya dapat dikembangkan untuk sistem order-dua.

4.5.1 Evaluasi T_p

Untuk mendapatkan nilai puncak *overshoot*, kita harus mendiferensiasi respon waktu terhadap waktu dan mendapatkan nilai maksimumnya. Ini dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi Laplace, karena

$$\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\} = sC(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pembentukan kuadrat pada penyebut (denominator) akan menghasilkan :

$$\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\} \quad = \quad \frac{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

sehingga :

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t.$$

Dengan membuat derivatif bernilai nol, akan deperoleh

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t = n\pi$$

atau

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Setiap nilai n menghasilkan nilai untuk maksima atau minima lokal. Dengan $n = 0$ akan dihasilkan $t = 0$, yang berkaitan dengan titik awal *step response*. Nilai $n = 1$ menghasilkan waktu dimana respon mencapai puncak pertamanya, yaitu T_p. Jadi :

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{2}$$

4.5.2 Evaluasi %*OS*

Dari slide 1 di atas, prosentase *overshoot*, %*OS*, dihitung dengan cara sbb. :

$$\%OS = \frac{c_{\text{max}} - c_{\text{final}}}{c_{\text{final}}} \times 100 \tag{3}$$

c_{max} diperoleh dengan mensubstitusi $t = T_p$ ke dalam persamaan (1). Kemudian dengan persamaan (2) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} c_{\text{max}} &= 1 - e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\pi \right) \\ &= 1 + e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \end{aligned} \tag{4}$$

Untuk step unit yang digunakan pada (1)

$$c_{\text{final}} = 1 \tag{5}$$

Substitusi (4) dan (5) ke (3) menghasilkan :

$$\boxed{\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100}. \tag{6}$$

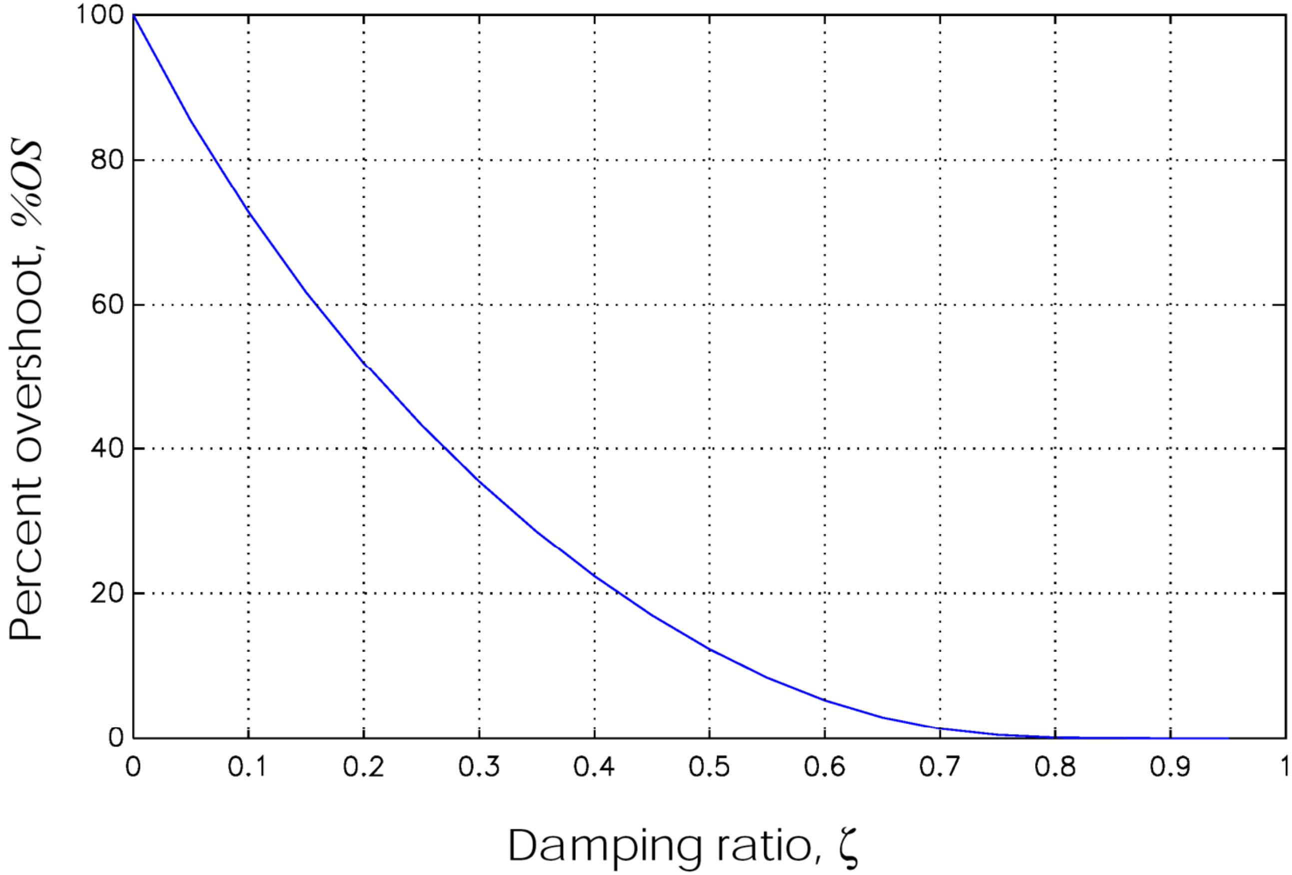
Perhatikan bahwa prosentasi *overshoot* hanya merupakan fungsi dari rasio *damping* !

Invers persamaan (6) memungkinkan ditemukannya nilai rasio *damping* ζ yang menghasilkan nilai $\%OS$:

$$\boxed{\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}}. \tag{7}$$

Plot hubungan antara $\%OS$ dan ζ ditunjukkan oleh slide 2 berikut ini.

Relationship between $\%OS$ and ζ



4.5.3 Evaluasi T_s

Untuk mendapatkan *settling time*, perlu dicari waktu dimana $c(t)$ mencapai dan mempertahankan nilai ± 2% dari nilai c_{final}. Dari slide 1, estimasi T_s adalah waktu dimana penurunan sinusoidal pada persamaan (1) mencapai amplitudo 0.02 atau

$$e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02.$$

Ini merupakan estimasi konservatif karena digunakan asumsi bahwa

$$\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi=1$$

pada $t = T_s$. Meskipun demikian, penyelesaian t akan menghasilkan

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \tag{8}$$

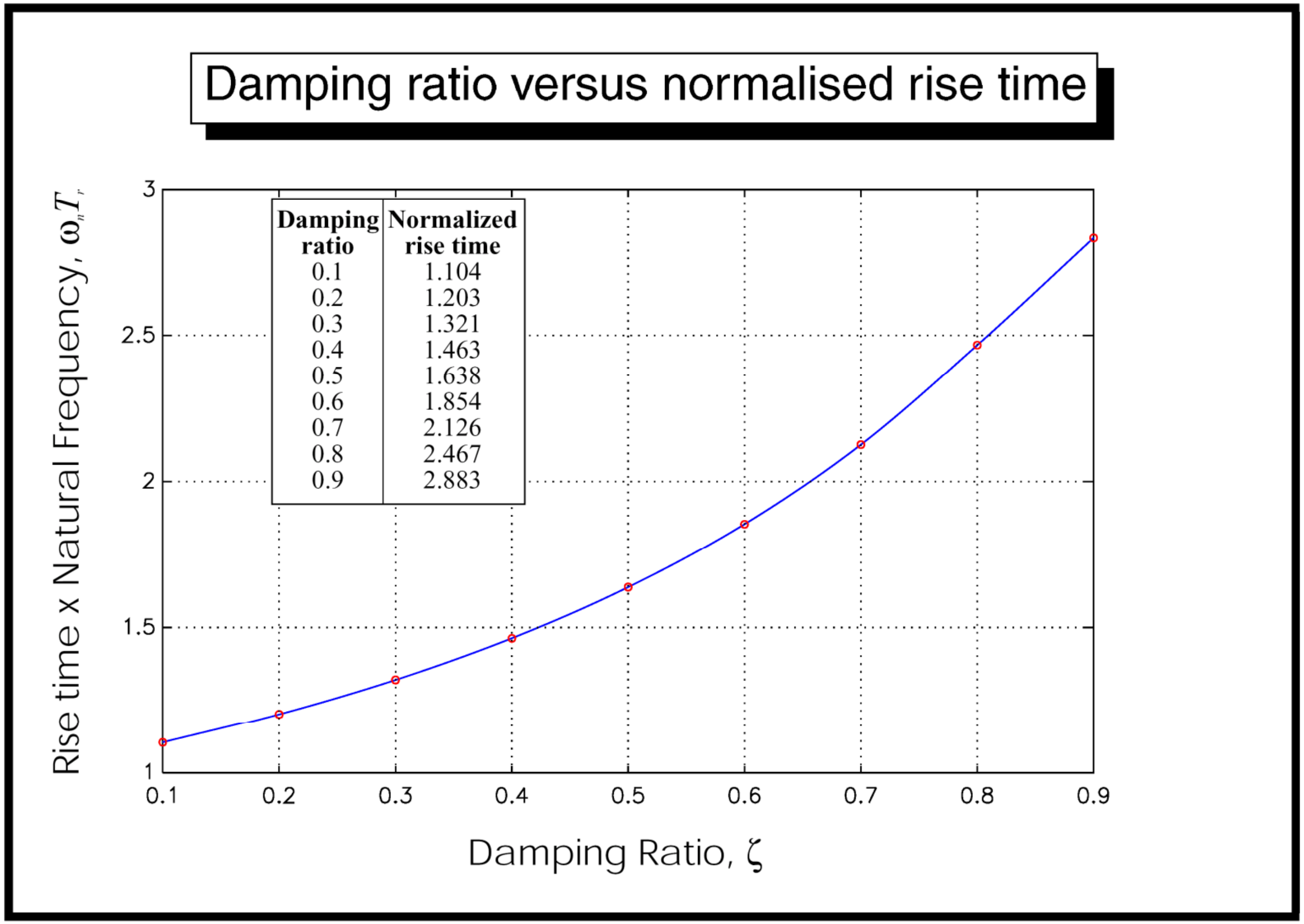
Pembilang pada pers.(8) menghasilkan nilai antara 3.91 hingga 4.74, jika ζ bernilai antara 0 hingga 0.09. Aproksimasi T_s untuk semua nilai ζ adalah :

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}} \tag{9}$$

Evaluasi T_r

Tidak ada hubungan analitis yang akurat antara *rise time* dan *rasio damping* atau *frekuensi natural.* Hubungan ini bisa diperoleh dari eksperimen seperti diperlihatkan slide 3.

Slide 3



Untuk $0.866 < \zeta < 0.5$, pendekatan untuk *rise time* menjadi :

$$\boxed{T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}} \qquad (10)$$

Terkesan bahwa *rise-time* bergantung pada ω_n. Namun akan terlihat bahwa pendekatan ini agak kasar dan ζ harus diperhitungkan dalam implementasi.

Contoh 4.1 *Diketahui fungsi transfer* $G(s) = \dfrac{100}{s^2 + 15s + 100}$

Hitung T_p, $\%OS$, T_s dan T_r.

Jawab : Dari fungsi transfer model $\omega_n = 10$ dan $\zeta = 0.75$. Substitusi nilai ini ke rumus untuk T_p, $\%OS$ dan T_s menghasilkan $T_p = 0.475$ detik, $\%OS = 2.838$, dan $T_s = 0.533$ detik. Dari grafik pada slide 3, terlihat bahwa untuk $\zeta = 0.75$, $\omega_n T_r \approx 2.3$ detik.
Pembagian dengan ω_n menghasilkan $T_r = 0.23$ detik. Semua ini diperoleh tanpa menggunakan invers transformasi laplace terhadap *step response* dari $G(s)$ dan pengukuran respons.

Rangkuman

Pada bagian ini dikembangkan rumus untuk parameter kinerja sistem order-ke dua.

- *Prosentase overshoot* (%*OS*) (6) (7)
- *Time-to-peak* (T_p) (2)
- *Settling time* (T_s) (9)
- *Rise-time* T_r (Gambar 3 dan Pers. (10))

dalam konteks parameter ζ dan ω_n order dua tergeneralisasi.

Meskipun definisi *settling-time* dan *rise-time* adalah sama seperti yang digunakan pada sistem order - pertama, prosentasi *overshoot* hanya diaplikasikan pada sistem order - ke dua yang *undamped* dan *underdamped*.

Parameter yang sama dapat digunakan untuk mengkategorikan kinerja sistem order lebih tinggi, yang menunjukkan respons serupa dalam hal bentuk dengan sistem order ke dua. Namun dalam hal ini, tidak ada hubungan langsung antara parameter respons dan *pole* sistem