LECTURE NOTES

FISIKA MATEMATIKA I
(FIS-306)

Denny Darmawan, M.Sc.
(darmawan@uny.ac.id)

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

III. Persamaan Differensial Biasa

(*Ordinary Differential Equation*)

1 Pendahuluan

Dalam fisika, banyak problem di alam yang mengambil bentuk turunan. Persamaan matematik yang mengandung turunan ini kemudian disebut sebagai persamaan differensial. Apabila persamaan tersebut mengandung turunan parsial, maka disebut sebagai persamaan differensial parsial (*partial differential equation*), dan apabila hanya mengandung turunan penuh, maka disebut sebagai persamaan differensial biasa (*ordinary differential equation*). Dalam bab ini, akan dipelajari metode untuk menyelesaikan bentuk-bentuk persamaan differensial biasa. Penyelesaian dari persamaan differensial biasa (dalam variabel x dan y) merupakan hubungan/relasi antara x dan y yang jika disubstitusikan kembali ke persamaan semula akan diperoleh identitas (ruas kiri dan kanan dalam persamaan adalah sama).

Orde persamaan differensial ditunjukkan oleh turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan tersebut. Sebagai contoh, persamaan

$$y' + xy^2 = 1$$

merupakan persamaan differensial orde satu, karena hanya memiliki turunan pertama sebagai turunan tertingginya, sementara

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

merupakan persamaan differensial orde dua, karena memiliki turunan kedua sebagai turunan tertingginya.

Apabila persamaan differensial mengambil bentuk umum:

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' + \cdots = b \tag{1}$$

dimana a_n dan b merupakan konstanta atau fungsi dari x, maka persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan differensial linear. Persamaan

$$y' + xy^2 = 1$$

bukan merupakan persamaan differensial linear karena adanya suku y^2, sementara persamaan

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

disebut persamaan linear karena memenuhi bentuk umum Persamaan (1).

Umumnya, problem yang ditemui di alam mengambil bentuk persamaan differensial linear dan pada orde satu atau dua, sehingga pembahasan dalam bab ini hanya akan dibatasi pada kedua bentuk tersebut.

2 Persamaan yang dapat dipisahkan (*separable equation*)

Apabila kita memiliki persamaan differensial dalam bentuk

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$dy = f(x)dx$$

dimana pada masing-masing ruas persamaan hanya mengandung satu variabel saja sehingga penyelesaiannya diperoleh dengan mengintegralkan kedua ruas, maka persamaan tersebut disebut sebagai persamaan yang dapat dipisahkan (*separable equation*).

Contoh 1

Laju peluruhan bahan radioaktif sebanding dengan jumlah atom yang tersisa. Jika saat $t = 0$ terdapat N_0 atom, tentukan jumlah atom N saat t.
Jawab:

Pernyataan matematik dari problem di atas adalah:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

yang merupakan persamaan yang dapat dipisahkan, dengan λ adalah konstanta kesebandingan. Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh:

$$\ln N = -\lambda t + \text{konstanta}$$

Karena saat $t = 0$ diketahui $N = N_0$, maka konstantanya dapat dinyatakan sebagai $\ln N_0$. Penyelesaiannya akan berbentuk

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

3 Persamaan Differensial Orde 1 Linear

Persamaan differensial biasa orde 1 linear dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y' + Py = Q \tag{3}$$

dimana P dan Q adalah konstanta atau fungsi dari x. Persamaan (3) memiliki penyelesaian umum berbentuk:

$$ye^I = \int Qe^I dx + c \text{ dengan } I = \int P dx \tag{4}$$

Contoh 2

Radium meluruh menjadi Radon yang selanjutnya meluruh menjadi Polonium. Jika saat $t = 0$ cuplikan murni mengandung Radium saja, berapa Radon yang terkandung pada cuplikan saat t?

Jawab:

N_0= cacah atom Radium saat $t = 0$

N_1= cacah atom Radium saat t

N_2= cacah atom Radon saat t

$\lambda_1$dan λ_2= konstanta peluruhan untuk Ra dan Rn

Dari Contoh 1 kita peroleh bahwa cacah atom Radium saat t dinyatakan oleh

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

sehingga

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Laju terbentuknya Radon sebanding dengan laju meluruhnya Radium ($\lambda_1 N_1$), namun di saat yang sama Radon meluruh menjadi Polonium dengan laju $-\lambda_2 N_2$ sehingga

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Persamaan di atas sama dengan bentuk Persamaan (3) dimana $P = \lambda_2$ dan $Q = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$. Penyelesaian umumnya dapat dicari dengan bantuan Persamaan (4) sehingga diperoleh

$$I = \int \lambda_2 dt = \lambda_2 t$$

$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \int \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} dt + c = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + c$$

Karena $N_2 = 0$ saat $t = 0$ (belum ada Polonium yang terbentuk saat $t = 0$) maka

$$0 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + c \text{ atau } c = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

sehingga diperoleh

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

untuk $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

4 Persamaan Differensial Orde 2 Linear

Dalam bagian ini, kita akan menentukan penyelesaian persamaan differensial biasa orde 2 linear yang mengambil bentuk umum:

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \tag{5}$$

dimana a_2, a_1 dan a_0 adalah konstanta. Jika $f(x) = 0$ maka kita mendapatkan persamaan differensial yang bersifat *homogen*, sementara jika $f(x) \neq 0$ maka kita mendapatkan persamaan differensial yang bersifat *tak homogen* (*inhomogeneous*) karena terdapat suku yang tidak bergantung pada y.

4.1 Persamaan homogen

Penyelesaian Persamaan (5) dengan $f(x) = 0$ (homogen) dapat ditentukan melalui algoritma berikut:

- Dari bentuk $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ bawa ke bentuk $(D - a)(D - b)y = 0$ dengan $D = \frac{d}{dx}$ melalui faktorisasi (gunakan 'rumus *abc*' jika perlu).
- Apabila $a \neq b$ maka penyelesaian umumnya akan berbentuk $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$ dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta.
- Apabila $a = b$ maka penyelesaian umumnya akan berbentuk $y = (Ax + B)e^{ax}$ dengan A dan B adalah konstanta.

Contoh 3

Sebuah benda bermassa m digantung menggunakan pegas. Dari posisi setimbangnya, benda ini ditarik ke bawah sejauh y kemudian dilepaskan sehingga mengalami gerak osilasi. Tentukan persamaan geraknya!

Jawab:

Ketika ditarik sejauh y, benda dikenai gaya pegas sebesar $-ky$ dengan k adalah tetapan pegas, sehingga setelah dilepas, dari hukum kedua Newton, persamaan geraknya adalah

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

atau dengan menuliskan $\omega^2 = k/m$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \text{ atau } \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Dinyatakan dalam operator D:

$$(D^2+\omega^2)y = 0 \text{ atau } (D-i\omega)(D+i\omega) = 0$$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

Dari notasi Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, maka penyelesaian umum di atas juga dapat dituliskan sebagai

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t+\gamma)$$

dengan A, B, C dan γ adalah konstanta baru. Penyelesaian tersebut menunjukkan bahwa benda mengalami gerak harmonik sederhana.

4.2 Persamaan Tak-Homogen

Penyelesaian umum Persamaan (5) dengan $f(x) \neq 0$ (tak homogen) akan berbentuk $y = y_c + y_p$ dimana y_c disebut sebagai *penyelesaian komplementer* yang diperoleh dengan mengasumsikan $f(x) = 0$, sementara y_p disebut sebagai *penyelesaian khusus* yang akan bergantung pada bentuk $f(x)$.

Penyelesaian umumnya dapat ditentukan melalui algoritma berikut:

- Dari bentuk $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$ dan dengan mengasumsikan $f(x) = 0$ (untuk sementara), tentukan y_c menggunakan cara penentuan penyelesaian persamaan homogen (bawa ke bentuk $(D-a)(D-b)y = 0$ terlebih dahulu).

- Selanjutnya, apabila $f(x) = ke^{cx}$ dengan k dan c konstanta, maka penyelesaian untuk y_p adalah:

$$y_p = \begin{cases} Ce^{cx} \text{ jika } c \neq a \text{ dan } c \neq b \\ Cxe^{cx} \text{ jika } c = a \text{ atau } c = b \text{ dan } a \neq b \\ Cx^2e^{cx} \text{ jika } c = a = b \end{cases}$$

- Apabila $f(x) = k\sin\alpha x$ atau $f(x) = k\cos\alpha x$, maka bawa $f(x)$ ke bentuk $f(x) = ke^{i\alpha x}$ dan tentukan penyelesaiannya (Y_p) dengan metode yang sama untuk mendapatkan solusi untuk $f(x) = ke^{cx}$, selanjutnya jika:

$$f(x) = \begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases} \quad \text{maka } y_p = \begin{cases} \Im m(Y_p) \\ \Re e(Y_p) \end{cases}$$

- Apabila $f(x) = e^{cx}P_n(x)$ dimana $P_n(x)$ adalah polinom derajat n, maka penyelesaian khususnya:

$$y_p = \begin{cases} e^{cx}Q_n(x) \text{ jika } c \neq a \text{ dan } c \neq b \\ xe^{cx}Q_n(x) \text{ jika } c = a \text{ atau } c = b \text{ dan } a \neq b \\ x^2e^{cx}Q_n(x) \text{ jika } c = a = b \end{cases}$$

dimana $Q_n(x)$ adalah polinom dengan derajat yang sama dengan $P_n(x)$ namun koefisien-koefisiennya belum diketahui.

5 Soal-Soal

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Sebuah benda bermassa m dijatuhkan dari keadaan diam dan mengalami gesekan udara yang besarnya sebanding dengan kecepatannya. Tunjukkan bahwa persamaan geraknya mengambil bentuk:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

   dengan k adalah tetapan positip. Tentukan v sebagai fungsi waktu dan tentukan nilai batas v ketika t menuju tak hingga (nilai batas ini selanjutnya disebut sebagai *kecepatan terminal*)!

2. Seberkas sinar jatuh ke bawah menembus laut. Saat sinar tersebut menembus air laut, intensitasnya akan berkurang akibat adanya serapan. Laju pengurangan intensitas sebanding dengan intensitas pada kedalaman yang dicapai. Tetapan kesebandingannya, μ, disebut sebagai koefisien serapan linear. Tunjukkan bahwa jika intensitas di permukaan laut adalah I_0, maka intensitas pada kedalaman s dari permukaan adalah

$$I = I_0 e^{-\mu s}$$

   Pada kedalaman berapa intensitas sinar tersebut tersisa separo dari intensitas di permukaan laut? Kedalaman ini disebut sebagai *ketebalan setengah nilai* (*half-value thickness*) dari medium yang ditembus.

3. Gaya gravitasi yang bekerja pada benda bermassa m di dalam perut bumi pada jarak r dari pusat bumi dinyatakan oleh $F = -mgr/R$ dengan R jejari bumi dan $r < R$. Tunjukkan bahwa sebuah benda yang diletakkan pada tabung panjang yang menembus pusat bumi akan mengalami gerak harmonik sederhana. Tentukan periode gerakan tersebut.

4. Sebuah rangkaian seri R-L-C sederhana dapat dinyatakan secara matematik sebagai

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t)$$

   Didefinisikan $I = \frac{dq}{dt}$ maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$$

   Jika diketahui $V(t) = 0$, tentukan persamaan arus yang mengalir pada rangkaian tersebut!