LECTURE NOTES

FISIKA MATEMATIKA III
(FIS-208)

Denny Darmawan, M.Sc.
(darmawan@uny.ac.id)

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

II. Fungsi Dari Variabel Kompleks (ringkasan materi)*

1 Variabel Kompleks

Bilangan kompleks dinyatakan dengan $z = x + iy$ dengan x merupakan bagian real, y merupakan bagian imajiner dan i adalah bilangan imajiner yang didefinisikan sebagai $i = \sqrt{-1}$ sehingga $i^2 = -1$ (perhatikan bahwa bagian imajiner dari bilangan kompleks bukan bilangan imajiner).

Nilai fungsi dari variabel kompleks juga berupa bilangan kompleks. Fungsi dari variable kompleks dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

dengan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ merupakan bagian real dan imajiner dari fungsi dengan variabel kompleks dan juga merupakan fungsi real dari x dan y.

Contoh 1:

Fungsi $f(z) = z^2$ dapat dituliskan sebagai $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ sehingga bagian realnya adalah $u(x, y) = x^2 - y^2$ dan bagian imajinernya adalah $v(x, y) = 2xy$.

2 Fungsi Analitik

Jika $f(z)$ bernilai tunggal di dalam daerah di bidang kompleks, maka turunan (*derivative*) dari $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2}$$

dimana $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, asalkan nilai limit tersebut ada dan tidak bergantung pada cara Δz mendekati 0.

Definisi:

Sebuah fungsi $f(z)$ bersifat *analitik* pada sebuah daerah di bidang kompleks jika fungsi tersebut memiliki turunan di setiap titik pada daerah tersebut.

*pembuktian teorema yang disebutkan pada ringkasan ini dan penjelasan lengkapnya dapat dilihat pada *textbook* Boas bab 14 (edisi ke-2).

Pernyataan $f(z)$ analitik di titik $z = a$ berarti $f(z)$ memiliki turunan di sekitar $z = a$. Agar bersifat analitik, maka $f(z)$ harus bernilai tunggal dan kontinyu. Kaidah yang digunakan untuk mendapatkan turunan dari fungsi variabel kompleks menyerupai kaidah untuk mendapatkan turunan dari fungsi variabel real.

Lalu bagaimana cara untuk mengetahui apakah suatu fungsi $f(z)$ bersifat analitik atau non-analitik?

3 Persamaan Cauchy-Riemann

Teorema 1:

Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bersifat analitik pada suatu daerah di bidang kompleks, maka pada daerah tersebut berlaku

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) dikenal sebagai *syarat Cauchy-Riemann.*

Teorema 2:

Jika $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dan turunan parsialnya terhadap x dan y bersifat kontinyu dan memenuhi syarat Cauchy-Riemann pada suatu daerah, maka $f(x)$ bersifat analitik pada setiap titik di dalam daerah tersebut. (Teorema 2 ini merupakan kebalikan dari teorema 1).

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = z^3$ merupakan fungsi analitik!

Jawab:

$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

sehingga

$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ dan $v(x, y) = 3x^2y - y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \; ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \; ; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \; ; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

dapat kita lihat bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

yang merupakan persamaan Cauchy-Riemann. Karena fungsi $f(z) = z^3$ memenuhi syarat Cauchy-Riemann, maka (berdasarkan teorema 2) bersifat analitik.

Apabila turunan kedua dari u dan v terhadap x dan y ada, maka dengan mengambil turunan kedua dari persamaan (3) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

yang tidak lain merupakan persamaan Laplace dua dimensi (ingat kembali Bab I, bentuk persamaan Laplace: $\nabla^2 u = 0$), sehingga diperoleh teorema berikut:

Teorema 4:

Jika $f(z) = u + iv$ bersifat analitik di dalam suatu daerah, maka u dan v memenuhi persamaan Laplace pada daerah tersebut. Begitu juga sebaliknya, sembarang fungsi u (atau v) yang memenuhi persamaan Laplace pada suatu daerah merupakan bagian real atau imajiner dari fungsi analitik $f(z)$.

Jadi kita dapat memperoleh penyelesaian persamaan Laplace dengan mengambil bagian real atau imajiner dari sebuah fungsi z yang bersifat analitik. Bisa juga dari suatu fungsi yang memenuhi persamaan Laplace kita dapat memperoleh bentuk bagian real atau imajiner dari fungsi $f(z)$.

Contoh 3:

Diketahui fungsi $u(x, y) = x^2 - y^2$. Fungsi ini memenuhi persamaan Laplace, yaitu:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

Kita akan tentukan fungsi $v(x, y)$ sehingga $u + iv$ merupakan fungsi z yang bersifat analitik. Dari persamaan Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

Dengan meng-integralkan parsial terhadap y diperoleh

$$v(x, y) = 2xy + g(x)$$

dengan $g(x)$ merupakan fungsi x yang akan ditentukan. Diambil turunan terhadap x dan melalui persamaan Cauchy-Riemann diperoleh:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dg}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

sehingga

$$\frac{dg}{dx} = 0, \qquad \text{atau} \quad g = \text{konstanta}$$

maka

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + i(2xy + \text{konstanta})$$

4 Teorema Cauchy dan Integral Cauchy

Teorema 5 (Teorema Cauchy):

Misal C adalah kurva tertutup sederhana (sederhana = tidak memotong dirinya sendiri). Jika $f(z)$ analitik **di dalam** kurva dan **pada** kurva C, maka

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) merupakan bentuk integral garis yang disebut juga *integral kontur*. Persamaan (4) menyatakan bahwa nilai $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ tidak bergantung pada lintasan yang diambil, sehingga $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ dengan $F'(z) = f(z)$ asalkan $f(z)$ bersifat analitik.

Contoh 4:

Diketahui bahwa fungsi $f(z) = 2z$ bersifat analitik pada seluruh bidang kompleks, maka untuk sembarang kurva tertutup sederhana C berlaku:

$$\oint_C 2z\,dz = 0$$

dan juga

$$\int_{2i}^{1+i} 2z\,dz = z^2|_{2i}^{1+i} = (1+i)^2 - (2i)^2 = 2i + 4$$

Teorema 6 (Integral Cauchy):

Jika $f(z)$ bersifat analitik **di dalam** dan **pada** kurva tertutup sederhana C dan a adalah titik di dalam kurva C tersebut, maka

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a) \tag{5}$$

Persamaan (5) dikenal dengan sebutan integral Cauchy. Ingat bahwa a harus berada di dalam kurva C, jika a berada di luar kurva C maka integrand pada Persamaan (5) bersifat analitik di dalam C dan berlaku Persamaan (4) (teorema Cauchy) sehingga nilai integralnya adalah nol.

Persamaan (5) juga dapat diperluas menjadi

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(a) \tag{6}$$

dengan $f^{(n)}(z)$ adalah turunan ke n dari $f(z)$.

Contoh 5:

Tentukan

$$\oint_C \frac{\sin z}{2z - \pi}\,dz$$

dimana (a) C adalah lingkaran dengan $|z| = 1$ dan (b) C adalah lingkaran dengan $|z| = 2$.

Jawab:

$$\oint_C \frac{\sin z}{2z-\pi}\,dz = \oint_C \frac{\sin z}{2(z-\frac{\pi}{2})}\,dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz$$

sehingga $a = \frac{\pi}{2} = 1,57$. Untuk soal (a) diketahui bahwa jejari lingkaran adalah 1, maka a berada di luar lingkaran C sehingga dari teorema Cauchy integralnya bernilai nol. Untuk soal (b) diketahui jejari lingkaran adalah 2, maka a berada di dalam kurva C sehingga dari Persamaan (5)

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz = \frac{1}{2}2\pi i \sin\frac{\pi}{2} = i\pi$$

5 Deret Taylor dan Deret Laurent

Teorema 3:

Jika $f(z)$ bersifat analitik **pada** dan **di dalam** lingkaran yang berpusat di $z = a$, maka fungsi tersebut memiliki turunan untuk semua orde dan untuk semua titik di dalam lingkaran tersebut dan dapat diekspansikan ke dalam deret Taylor di sekitar a yang berada di dalam lingkaran tersebut:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots \tag{7}$$

Deret ini konvergen di dalam lingkaran tersebut yang melebar hingga menyentuh titik singuler terdekat.

Definisi:

Titik reguler $f(z)$ adalah titik dimana $f(z)$ bersifat analitik.

Titik singuler (singularitas) $f(z)$ adalah titik dimana $f(z)$ tidak bersifat analitik. Jika $f(z)$ bersifat analitik dimanapun dalam suatu daerah kecuali pada titik $z = a$, maka titik tersebut dikenal dengan nama *titik singuler terisolasi.*

Teorema 7 (Teorema Laurent):

Misal C_1 dan C_2 adalah dua lingkaran dengan pusat di z_0, dan misal $f(z)$ analitik di dalam daerah R yang berada di antara kedua lingkaran tersebut. Maka $f(z)$ dapat diekspansikan ke dalam deret berbentuk

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots \tag{8}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad ; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \tag{9}$$

dimana C adalah kurva tertutup sederhana yang mengelilingi z_0 dan berada di dalam daerah R.

Deret ini disebut sebagai *deret Laurent* dan bersifat konvergen di dalam daerah R. Deret dengan koefisien b disebut sebagai *bagian utama* dari deret Laurent.

Definisi:

- Jika semua b bernilai nol, maka $f(z)$ analitik di $z = z_0$ dan z_0 disebut *titik reguler.*
- Jika $b \neq 0$, namun semua b setelah b_n bernilai nol, maka $f(z)$ disebut memiliki *pole (kutub) orde ke-n* di $z = z_0$. Jika $n = 1$, $f(z)$ disebut memiliki *pole sederhana.*
- Jika terdapat tak hingga b yang bernilai tidak nol, maka $f(z)$ memiliki *singularitas esensial* di $z = z_0$.
- Koefisien b_1 untuk $\frac{1}{z-z_0}$ disebut *residu* dari $f(z)$ di $z = z_0$.

6 Teorema Residu

Misal z_0 merupakan titik singuler terisolasi dari $f(z)$, maka nilai dari $\oint_C f(z)dz$ sepanjang kurva tertutup C yang hanya mengelilingi z_0 saja (tidak ada titik singuler lainnya selain z_0) ditentukan sebagai:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \text{residu dari}\, f(z)\, \text{pada titik singuler di dalam}\, C \tag{10}$$

Jika di dalam kurva tertutup C terdapat beberapa titik singuler terisolasi, misal z_0, z_1, $z_2, \ldots$ dst. dan masing-masing dikelilingi oleh lingkaran-lingkaran kecil berturut-turut C_0, C_1, $C_2, \ldots$ dst. sehingga $f(z)$ bersifat analitik di antara C dan lingkaran-lingkaran kecil tersebut, maka

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \text{jumlahan residu-residu dari}\, f(z)\, \text{di dalam}\, C \tag{11}$$

dengan integral sepanjang C diambil pada arah yang berlawanan dengan arah jarum jam. Persamaan (11) dikenal sebagai *teorema residu.*

Lalu bagaimana cara menentukan residu dari $f(z)$?

Metode untuk menentukan residu

1) Melalui deret Laurent

Jika $f(z)$ dapat dengan mudah diekspansikan ke dalam deret Laurent di sekitar $z = z_0$, maka residunya $R(z_0)$ adalah koefisien b_1 dari suku $\frac{1}{(z-z_0)}$.

Contoh 6:

Diketahui $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ maka deret Laurent-nya di sekitar $z = 1$ adalah

$$\frac{e^z}{z-1} = \frac{e \cdot e^{z-1}}{z-1} = \frac{e}{z-1}\left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \ldots\right] = \frac{e}{z-1} + e + \frac{e}{2}(z-1) + \ldots$$

sehingga residunya adalah koefisien untuk suku $\frac{1}{z-1}$ yaitu $R(1) = e$.

2) *Pole* sederhana

Jika $f(z)$ memiliki *pole* sederhana pada $z = z_0$, maka residunya ditentukan dengan mengalikan $f(z)$ dengan $(z - z_0)$ dan mengevaluasi hasilnya pada $z = z_0$.

Contoh 7:

Diketahui $f(z) = \frac{z}{(2z+1)(5-z)}$, maka tentukan $R(-\frac{1}{2})$ dan $R(5)$

Jawab:

untuk $R(-\frac{1}{2})$: kalikan $f(z)$ dengan $(z + \frac{1}{2})$, bukan $(2z + 1)$, dan evaluasi hasilnya untuk $z = -\frac{1}{2}$:

$$(z + \frac{1}{2})f(z) = (z + \frac{1}{2})\frac{z}{(2z+1)(5-z)} = \frac{z}{2(5-z)}$$

maka

$$R(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}}{2(5+\frac{1}{2})} = -\frac{1}{22}$$

untuk $R(5)$:

$$(z-5)f(z) = (z-5)\frac{z}{(2z+1)(5-z)} = -\frac{z}{2z+1}$$

maka $R(5) = -\frac{5}{11}$.

cara lain:

Jika $f(z)$ dapat dituliskan sebagai $\frac{g(z)}{h(z)}$ dimana $g(z)$ bersifat analitik dan tidak nol pada $z = z_0$ dan $h(z_0) = 0$ serta $h'(z_0) \neq 0$ maka

$$R(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dengan $h'(z_0)$ adalah turunan pertama dari $h(z)$ pada $z = z_0$.

Contoh 8:

Dari soal sebelumnya: $f(z) = \frac{z}{(2z+1)(5-z)}$ maka $g(z) = z$ dan $h(z) = (2z+1)(5-z)$ serta $h'(z) = 2(5-z) + (2z+1)(-1) = -4z + 9$ sehingga

$$R(z_0) = \frac{z_0}{-4z_0 + 9}$$

$$R(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}}{2+9} = -\frac{1}{22}$$

$$R(5) = \frac{5}{-20+9} = -\frac{5}{11}$$

3) Multi *pole*

Jika $f(z)$ memiliki *pole* untuk orde n, maka metode menentukan residunya adalah:

Kalikan $f(z)$ dengan $(z - z_0)^m$ dimana m adalah bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan orde n dari *pole*, differensialkan hasil kalinya sebanyak $(m - 1)$ kali lalu bagi dengan $(m - 1)!$ dan evaluasi hasilnya pada $z = z_0$.

Atau dapat dituliskan sebagai:

$$R(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \bigg|_{z=z_0} \tag{12}$$

Contoh 9:

Tentukan residu dari $f(z) = \frac{z \sin z}{(z-\pi)^2}$ pada $z = \pi$

Jawab:

Kita ambil $m = 3$ (sama dengan orde *pole*-nya) sehingga $(m - 1) = 2$

$$R(\pi) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z \sin z \bigg|_{z=\pi} = \frac{1}{2}(-z \sin z + 2 \cos z) \bigg|_{z=\pi} = -1$$

7 Penerapan Teorema Residu

Teorema residu dapat diterapkan untuk mengevaluasi bentuk integral berhingga. Pelajari contoh berikut:

Contoh 10:

Tentukan integral dari

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$$

Jawab:

Jika variabelnya diganti dengan $z = e^{i\theta}$, maka ketika θ bergerak dari 0 ke 2π, nampak z bergeser pada lintasan lingkaran $|z| = 1$ pada arah berlawanan dengan arah jarum jam, sehingga diperoleh integral kontur. Bentuk integral ini dapat diselesaikan dengan teorema residu:

Dipilih $z = e^{i\theta}$ maka $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ atau $d\theta = \frac{1}{iz} dz$, dan
$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Substitusi ke soal semula

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \oint_C \frac{\frac{1}{iz} dz}{5 + 2(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{5z + 2z^2 + 2} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{(2z+1)(z+2)}$$

dengan C adalah lingkaran berjejari 1. Dari bentuk di atas, $f(z)$ memiliki *pole* pada $z = -\frac{1}{2}$ dan $z = -2$, namun hanya $z = -\frac{1}{2}$ yang berada di dalam C, sehingga residu untuk $f(z)$ pada $z = -\frac{1}{2}$ adalah:

$$R(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{(2z+1) + 2(z+2)} \bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4z+5} \bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

sehingga $I = \frac{1}{i} 2\pi i R(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$

Untuk integral dari 0 hingga π, maka nilainya adalah separonya, yaitu $\frac{1}{3}\pi$.