

**PENYELESAIAN ANALITIK PERSAMAAN MASTER
UNTUK MODEL *TOTALLY ASYMMETRIC EXCLUSION*
PROCESS (TASEP) DENGAN SATU KEKISI**

E. P. Founda Noviani dan W. S. B. Dwandaru
*Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi,
Jurusan Pendidikan Fisika, Universitas Negeri Yogyakarta
Karang Malang, Yogyakarta
Email: wipsarian@yahoo.com*

Abstrak

Persamaan Master adalah sebuah persamaan diferensial fenomenologis orde pertama yang penyelesaiannya memberikan evolusi waktu dari (fungsi) peluang suatu sistem fisis. Jika informasi tentang kelajuan transisi dari satu keadaan (mikroskopis) ke keadaan yang lain telah diketahui, maka persamaan ini secara formal dapat diselesaikan. Dalam kajian ini, persamaan Master akan diterapkan untuk mencari solusi dari sebuah model matematis yang dikenal sebagai *the totally asymmetric exclusion process* (TASEP). Aplikasi persamaan Master ini dibatasi pada sebuah kasus sederhana, dimana kekisi yang digunakan hanya berjumlah satu buah. Kajian ini, sejauh yang penulis ketahui, belum pernah dipublikasikan sebelum ini. TASEP berkaitan erat dengan pemodelan sistem-sistem fisis, seperti: lalu lintas kendaraan, lintasan sekumpulan semut, motor protein, sampai protein sintesis.

Kata kunci: persamaan Master, TASEP

Pendahuluan

Manusia dapat memahami gejala-gejala alam karena berkembangnya ilmu Fisika. Gejala-gejala atau fenomena alam ini selanjutnya dimanfaatkan untuk meningkatkan kualitas dan kesejahteraan hidup masyarakat. Dilihat dari dinamikanya, gejala-gejala alam dapat dibagi menjadi dua, yaitu: gejala alam yang berada dalam keadaan setimbang atau statik (*equilibrium phenomena*), dan gejala alam yang tak-setimbang

(*non-equilibrium phenomena*). Termasuk ke dalam gejala alam setimbang adalah peristiwa-peristiwa fisis yang tak tergantung waktu sehingga perubahannya bersifat stasioner. Gejala-gejala semacam ini telah banyak dipelajari di dalam fisika, terutama melalui kacamata fisika statistik dan termodinamika. Sebaliknya, gejala-gejala alam yang tak-setimbang belum banyak dipelajari. Fenomena-fenomena alam yang dinamikanya masih tergantung waktu dan perilakunya tidak dapat diprediksi,

seperti gempa bumi, turbulensi, perilaku sekompok burung yang terbang, perilaku sekelompok semut, protein sintesis, dan motor protein tergolong dalam gejala-gejala alam yang tak-setimbang. Tingkat kompleksitas peristiwa-peristiwa tak-setimbang justru menjadi daya tarik tersendiri untuk diselidiki. Di dalam fisika statistik misalnya, konsep-konsep yang berlaku di dalamnya dikembangkan untuk menjelaskan perilaku mikroskopis penyusun-penyusun sistem pada gejala-gejala fisis yang setimbang. Fisika statistik (setimbang) tidak dapat menjangkau gejala-gejala alam yang tak setimbang.

Salah satu cara untuk menangani kerumitan sistem-sistem tak setimbang adalah dengan pemodelan. Dalam artikel ini akan dibahas penyelesaian analitik sebuah model fisis tak setimbang, yakni *totally asymmetric exclusion process* (TASEP). Model ini biasanya digunakan sebagai model baku untuk mempelajari *driven diffusive systems*. Contoh sistem-sistem seperti ini adalah protein sintesis, motor protein, perilaku sekelompok semut, dan lalu lintas kendaraan. TASEP adalah sebuah model fisis tak-setimbang dimana partikel-partikel inti keras (*hard core*) dalam kekisi satu dimensi (1D) dapat melompat ke kekisi sebelah kanan dengan peluang tertentu jika tidak ada partikel lain yang menduduki kekisi tetangga sebelah kanan tersebut. Model ini pada awalnya digunakan untuk mempelajari kinematika biopolimerisasi [1,2]. Pada perkembangannya model ini banyak digunakan

untuk mempelajari *transport* satu dimensi [3]. Bahkan, performa jaringan internet tanpa kabel dapat dipelajari melalui model ini [4]. Dalam penelitian ini, khusus akan dibahas tentang model TASEP yang hanya terdiri dari satu kekisi atau $N = 1$, dengan N adalah jumlah kekisi.

Dari perspektif fisika statistik klasik, model TASEP dapat dibahas menggunakan persamaan Master. Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial orde-satu yang mendeskripsikan evolusi waktu dari fungsi probabilitas suatu sistem fisis. Dengan demikian, persamaan diferensial ini harus dicari solusinya sehingga diperoleh himpunan fungsi-fungsi probabilitas yang bergantung waktu. Kemudian, dapat ditentukan hierarki fungsi-fungsi korelasi, dari *one-body quantity* (kepadatan), *two-body quantity* dan seterusnya. Berbagai metode dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan Master bergantung pada model fisis yang diteliti [5,6,7,8,9]. Dalam artikel ini akan ditunjukkan penyelesaian model TASEP dengan satu kekisi menggunakan persamaan Master.

Tujuan yang hendak dicapai dalam kajian ini adalah

1. Menyelesaikan secara eksak persamaan Master untuk model TASEP yang terdiri dari satu kekisi.
2. Menentukan sifat-sifat fisis model TASEP dengan satu kekisi melalui kepadatan (*one-body density*), ρ , dan rapat arus (*current density*), J .

Kajian ini diharapkan bermanfaat untuk menambah wawasan tentang

model-model fisis yang dapat diselesaikan secara eksak untuk mewakili sistem-sistem fisis yang sebenarnya.

Kajian Pustaka

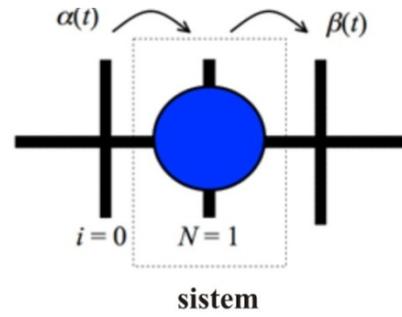
Sejalan dengan definisi persamaan Master yang telah disinggung di atas, secara matematis persamaan ini dapat dituliskan sebagai [10,11,12,13]:

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \sum_{n'} [w_{nn'}(t)P_{n'}(t) - w_{n'n}(t)P_n(t)], \quad (2.1)$$

dengan n, n' adalah keadaan mikroskopis (konfigurasi), $P_n(t)$ adalah fungsi peluang suatu sistem fisis untuk berada pada keadaan mikroskopis n pada waktu t , $w_{nn'}(t)$ adalah laju transisi dari keadaan mikroskopis n' ke keadaan n pada waktu t . Salah satu fitur yang menarik dari persamaan Master (2.1) adalah karakteristik fisis suatu sistem fisis tersimpan dalam laju transisi $w_{nn'}$ [13]. Dengan kata lain, laju transisi mendefinisikan sistem fisis yang sedang dipelajari. Oleh karena itu, jika himpunan laju transisi dari suatu sistem telah diketahui, maka pada prinsipnya, persamaan Master dapat diselesaikan.

TASEP dengan batas terbuka (*open boundary*) dan terdiri dari satu kekisi adalah kasus khusus dari pemodelan umum sistem dua keadaan (*two state system*). Sistem ini hanya terdiri dari dua keadaan (konfigurasi) mikroskopik. Dengan demikian, ada dua fungsi peluang yang berkaitan dengan dua laju transisi (*transition rates*). **Gambar 1** berikut adalah ilustrasi yang

menggambarkan model TASEP dengan satu kekisi.



Gambar 1. TASEP dengan batas terbuka dan terdiri dari kekisi tunggal. Kekisi digambarkan dengan garis tebal hitam yang ditandai dengan $i = 0, 1$. Lingkaran yang menempati kekisi $N = 1$ adalah sebuah partikel inti keras (*hard core particle*). Sistem yang ditinjau ditandai kotak garis putus-putus. Suatu partikel dapat memasuki kekisi $N = 1$ dari kekisi ke-0 ($i = 0$) dengan laju $\alpha(t)$ [ditunjukkan dengan anak panah di sebelah kiri kekisi $N = 1$] jika tidak ada partikel di kekisi $N = 1$. Jika ada partikel di kekisi $N = 1$, partikel tersebut dapat meninggalkan kekisi dengan laju $\beta(t)$ [ditunjukkan dengan anak panah di sebelah kanan kekisi $N = 1$].

Sebuah partikel dapat memasuki kekisi yang kosong dengan laju (*rate*) $\alpha(t)$ dan keluar dari kekisi (yang terisi) dengan laju keluar $\beta(t)$. Dalam hal ini, diperoleh $n = \{\tau_1\} \equiv 1, 2$ dengan $n = 1 = \{\tau_1 = 1\}$ adalah keadaan mikroskopis dimana kekisi diisi oleh partikel, dan $n = 2 = \{\tau_1 = 0\}$ adalah keadaan dimana kekisi kosong (tidak ditempati oleh partikel). τ_1 adalah okupansi kekisi $N = 1$. Dengan demikian, probabilitas kekisi diisi oleh partikel atau kosong pada waktu t , masing-masing adalah $P_1(t)$ dan $P_2(t)$. Diasumsikan sistem berevolusi mulai dari $t = 0$ dengan keadaan awal

diberikan oleh $P_1(t=0) = P_1(0)$ dan $P_2(t=0) = P_2(0)$. Selanjutnya, kedua probabilitas tersebut memenuhi syarat normalisasi,

$$\sum_n P_n(t) = P_1(t) + P_2(t) = 1, \quad (2.2)$$

untuk setiap waktu t . Laju perpindahan (transisi) dinyatakan sebagai $w_{12}(t) = \alpha(t)$ dan $w_{21} = \beta(t)$.

Bahasan Utama

Persamaan Master untuk TASEP dengan sebuah kekisi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t)}{\partial t} &= w_{12}(t)P_2(t) - w_{21}(t)P_1(t) \\ &= \alpha(t)P_2(t) - \beta(t)P_1(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(t)}{\partial t} &= w_{21}(t)P_1(t) - w_{12}(t)P_2(t) \\ &= \beta(t)P_1(t) - \alpha(t)P_2(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Menggunakan persamaan normalisasi (2.2) dan menyusun ulang persamaan (3.1) dan (3.2), maka didapatkan

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + [\alpha(t) + \beta(t)]P_1(t) = \alpha(t), \quad (3.3)$$

dan

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + [\alpha(t) + \beta(t)]P_2(t) = \beta(t). \quad (3.4)$$

Persamaan (3.3) dan (3.4) adalah persamaan diferensial linear orde satu yang diperoleh dari persamaan diferensial parsial sebelumnya, yakni (3.2) dan (3.1). Persamaan (3.1) dan

(3.2) dapat dimodifikasi menjadi diferensial penuh [persamaan (3.3) dan (3.4)] karena $P_1(t)$ dan $P_2(t)$ hanya merupakan fungsi waktu saja.

Tugas utama sekarang adalah menyelesaikan persamaan (3.3) dan (3.4) untuk mendapatkan solusi $P_1(t)$ dan $P_2(t)$. Persamaan-persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan mengalikan masing-masing ruas dengan faktor pengali:

$$\exp\left(\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'\right).$$

Pertama, diselesaikan terlebih dahulu persamaan (3.3). Mengikuti langkah di atas maka,

$$\begin{aligned} e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ + e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} [\alpha(t) + \beta(t)]P_1(t) \\ = \alpha(t)e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Di sisi lain, diperoleh pula persamaan yang bersasal dari aturan perkalian (*product rule*):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} P_1(t) \right) \\ = e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ + e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} [\alpha(t) + \beta(t)]P_1(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ruas kanan persamaan (3.6) tidak lain adalah ruas kiri dari persamaan (3.5). Dengan memasukan persamaan (3.6) ke persamaan (3.5) maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'} P_1(t) \right) \\ = \alpha(t)e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')]dt'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.5) telah dimodifikasi menjadi persamaan (3.7) yang lebih mudah diintegrasikan. Selanjutnya, kedua ruas (3.7) diintegrasikan, sehingga didapat:

$$\begin{aligned} & e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} P_1(t) \\ &= \int_0^t \alpha(t) e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} dt + \mathcal{A}_1, \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & P_1(t) \\ &= \frac{\left\{ \int_0^t \alpha(t) e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} dt + \mathcal{A}_1 \right\}}{e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dengan metode yang sama, ekspresi $P_2(t)$ dapat diturunkan dari persamaan (3.4) dan didapat:

$$\begin{aligned} & P_2(t) \\ &= \frac{\left\{ \int_0^t \beta(t) e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} dt + \mathcal{A}_2 \right\}}{e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

\mathcal{A}_1 dan \mathcal{A}_2 masing-masing adalah konstanta dari fungsi-fungsi probabilitas $P_1(t)$ dan $P_2(t)$. Kedua konstanta ini dapat ditentukan dari syarat awal, $P_1(0)$ dan $P_2(0)$. Dengan memasukkan $t = 0$ pada persamaan (3.9) dan (3.10), maka didapatkan,

$$\mathcal{A}_1 = P_1(0) \quad \text{dan} \quad \mathcal{A}_2 = P_2(0). \quad (3.10)$$

Persamaan (3.8) dan (3.9) adalah hasil akhir untuk fungsi probabilitas yang dicari. Fungsi ini ternyata hanya bergantung pada $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$.

Selanjutnya kepadatan partikel dapat ditentukan dengan persamaan berikut:

$$\rho_1(t) = \sum_{n=1,2} \tau_{1,n} P_n(t) = P(1, t), \quad (3.11)$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \rho_1(t) \\ &= \frac{\left\{ \int_0^t \alpha(t) e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} dt + \rho_1(0) \right\}}{e^{\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dimana $\rho_1(0) = P_1(0)$. Dari persamaan (3.12) dapat diamati bahwa kerapatan hanya bergantung pada laju loncatan (*hopping rates*), $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$. Selanjutnya dinamika TASEP yang berubah terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1(t)}{dt} &= \frac{dP_1(t)}{dt} \\ &= \alpha(t)[1 - \rho_1(t)] - \beta(t)\rho_1(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Persamaan di atas didapat dengan memasukan $\rho_1(t) = P_1(t)$ ke persamaan (3.3) kemudian disusun ulang.

Persamaan (3.13) tidak lain merupakan persamaan kontinuitas yang berbentuk:

$$\frac{d\rho_1(t)}{dt} = -[J_{\text{out}}(t) - J_{\text{in}}(t)], \quad (3.14)$$

dengan

$$J_{\text{in}}(t) = \alpha(t)[1 - \rho_1(t)], \quad (3.15)$$

dan

$$J_{\text{out}}(t) = \beta(t)\rho_1(t). \quad (3.16)$$

$J_{\text{in}}(t)$ dan $J_{\text{out}}(t)$, masing-masing adalah rapat arus partikel yang masuk dan keluar kekisi.

Menggunakan kembali persamaan (3.12) untuk disubstitusikan ke

persamaan (3.15) atau (3.16), akan didapatkan:

$$J_{in}(t) = \alpha(t) \left[1 - e^{-\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} \right. \\ \left. \left\{ \int_0^t \alpha(t') e^{\int_0^{t'} [\alpha(t'') + \beta(t'')] dt''} dt' + \rho_1(0) \right\} \right] \quad (3.17)$$

dan

$$J_{out}(t) = \beta(t) \left[e^{-\int_0^t [\alpha(t') + \beta(t')] dt'} \right. \\ \left. \left\{ \int_0^t \alpha(t') e^{\int_0^{t'} [\alpha(t'') + \beta(t'')] dt''} dt' + \rho_1(0) \right\} \right] \quad (3.18)$$

Terlihat dari persamaan (3.17) dan (3.18) bahwa rapat arus tidak bergantung pada kepadatan partikel. Rapat arus hanya bergantung pada laju lompatan $\alpha(t)$ dan $\beta(t)$.

Berikutnya diamati pada beberapa kasus yang lebih khusus. Pertama ditinjau kasus dimana laju lompatan tidak bergantung pada waktu; $\alpha(t) = \alpha$ dan $\beta(t) = \beta$. Dari persamaan (3.12), kepadatan partikel akan mempunyai bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$\rho_1(t) = e^{-\int_0^t [\alpha + \beta] dt'} \left\{ \int_0^t \alpha e^{\int_0^{t'} [\alpha + \beta] dt''} dt' \right. \\ \left. + \rho_1(0) \right\} \\ = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \left(\rho_1(0) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-[\alpha + \beta]t}. \quad (3.19)$$

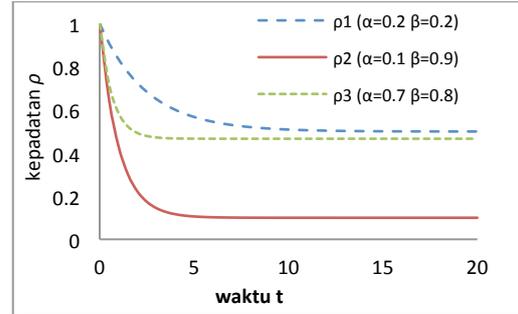
Probabilitas sistem dalam keadaan kosong menjadi:

$$P_2(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \left(P_2(0) - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) e^{-[\alpha + \beta]t}. \quad (3.20)$$

Ada dua suku di ruas kanan persamaan (3.19). Suku pertama adalah konstanta yang tak bergantung pada waktu, yaitu rasio antara *input hopping rate* dan jumlahan *input* dan *output*

hopping rates. Suku kedua adalah fungsi waktu, dimana nilainya berkurang secara eksponensial seiring waktu berjalan. Di suku terakhir, $(\alpha + \beta)$ pada faktor eksponensial adalah konstanta pengurangan yang menentukan seberapa lama sistem mencapai keadaan *steady state*.

Berikut adalah grafik kepadatan partikel sebagai fungsi waktu dengan *hopping rates* yang berbeda dan $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.



Grafik 1. Profil kepadatan partikel sebagai fungsi waktu dengan beberapa variasi laju lompatan.

Terlihat dari ketiga kurva di atas bahwa semakin besar nilai $\alpha + \beta$, semakin cepat kepadatan menuju keadaan *steady state*. Rapat arus juga dapat diperoleh sebagai berikut:

$$J_{in}(t) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \\ - \alpha \left(\rho_1(0) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-[\alpha + \beta]t}, \quad (3.21)$$

dan

$$J_{out}(t) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \\ - \beta \left(\rho_1(0) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-[\alpha + \beta]t}. \quad (3.22)$$

Jika kerapatan awal dibuat sama dengan nol; $\rho_1(0) = 0$, kemudian rapat arus saat $t = 0$ masing-masing adalah $J_{in}(0) = 0$ dan $J_{out}(0) = 0$, seiring berjalannya waktu, partikel menempati kekisi $N = 1$, $J_{in}(t)$ akan berkurang, sedangkan $J_{out}(t)$ dan $\rho_1(t)$ akan semakin bertambah. Sekali partikel menempati suatu kekisi, probabilitas suatu partikel lain untuk masuk ke kekisi tersebut adalah nol (0) karena terjadi tolakan inti keras atau *hard core repulsion* (kecuali jika partikel yang menempati kekisi tersebut telah keluar dari kekisi). Oleh karenanya $J_{in}(t)$ semakin berkurang (dan $J_{out}(t)$ semakin bertambah). Setelah waktu berjalan sangat lama, rapat arus $J_{in}(t)$ dan $J_{out}(t)$ akan sama dan menjadi tetap, sehingga sistem mencapai kondisi stasioner. Lebih lanjut, konstanta pengurangan $(\alpha + \beta)$ pada persamaan (3.21) dan (3.22) menentukan seberapa cepat sistem mencapai keadaan stasioner (*steady state*). Semakin besar nilai $(\alpha + \beta)$, maka sistem akan semakin cepat mencapai keadaan stasioner.

Dalam keadaan stasioner, besaran waktu t dapat dibuat mendekati tak hingga, sehingga akan dihasilkan persamaan kerapatan sebagai:

$$\rho_1|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (3.23)$$

Suku kedua dari persamaan (3.19) akan berkurang secara eksponensial menjadi sama dengan nol (0) seiring waktu berjalan mendekati tak hingga. Sehingga hanya tertinggal suku pertama yang nilainya konstan.

Tabel 1. Perhitungan kepadatan partikel pada keadaan *steady state* dengan berbagai variasi laju lompatan.

α	B	ρ
0.1	0.9	0.10
0.8	0.3	0.73
0.2	0.2	0.50
0.5	0.5	0.50
0.7	0.8	0.47

Rapat arus pada keadaan stasioner (*steady state*) diperoleh dari persamaan (3.21) dan (3.22) akan menjadi:

$$J_{in}|_{t \rightarrow \infty} = J_{out}|_{t \rightarrow \infty} = J = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}. \quad (3.24)$$

Tabel 2. Perhitungan rapat arus pada keadaan *steady state* dengan berbagai variasi laju lompatan.

α	B	J
0.1	0.9	0.09
0.8	0.3	0.22
0.2	0.2	0.10
0.5	0.5	0.25
0.7	0.8	0.37

Terlihat sangat jelas dari persamaan (3.24) bahwa pada keadaan stasioner, rapat arus tidak sama dengan nol tetapi menjadi konstan terhadap ruang (kekisi) dan waktu. Menurut persamaan (3.14) dan (3.24), sistem akan mencapai keadaan stasioner saat

$$\frac{d\rho_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{untuk } t \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Kesimpulan dan Saran

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan Master dapat digunakan untuk mencari solusi eksak model TASEP dengan satu kekisi.
2. Untuk α dan β yang tak gayut waktu, ternyata terjadi pengurangan kepadatan partikel secara eksponensial.
3. Dalam keadaan *steady state*, kepadatan partikel dinyatakan sebagai

$$\rho_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta'}$$

dengan rapat arus partikel

$$J = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta'}$$

Untuk penelitian selanjutnya, menarik untuk dikaji aplikasi persamaan Master untuk penyelesaian eksak model TASEP gayut waktu dengan dua kekisi atau lebih. Dengan demikian, dapat diteliti pula perilaku fisis model TASEP tersebut, terutama kepadatan dan rapat arus partikelnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] MacDonald, C., Gibbs, J., dan Pipkin, A. 1968. Kinetics of Biopolymerization on Nucleic Acid Templates, *Biopolymers*, **6**: 1-25.
- [2] Pipkin, A. dan Gibbs J. 1966. *Biopolymers*, **4**: 3-15.
- [3] Parmeggiani, A., Franosch, T. dan Frey, E. 2004. Totally Asymmetric Simple Exclusion Process with Langmuir Kinetics, *Phys. Rev. E* **70**: 046101-046121.
- [4] Srinivasa, S. dan Haenggi, M. 2010. The TASEP: A Statistical Mechanics Tool to Study the Performance of Wireless Line Networks. Makalah ini disajikan dalam *Proceedings of 19th IEEE International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN '10)*, Zurich, Switzerland, 2-5 Agustus.
- [5] Schutz, G. M. 1997. Duality relations for asymmetric exclusion process, *J. Stat. Phys.* **88**: 427-445.
- [6] Derrida, B., Domany, E. dan Mukamel, D. 1992. An exact solution of the one dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries, *J. Stat Phys.* **69**: 667-687.
- [7] Heims, S. P. 1965. Master Equation for Ising Model, *Phys. Rev.* **138**: A587-A590.
- [8] Keizer, J. 1972. On the solutions and the steady states of a master equation, *J. Stat. Phys.*, **6**: 67-72.
- [9] Nicolis G. dan Mansour, M. M. 1984. Onset of spatial correlations in nonequilibrium systems: A master equation description, *Phys. Rev. A* **29**: 2845-2853.
- [10] van Vliet, C. M. 2008. *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, World Scientific.
- [11] Zwanzig, R. 2001. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Oxford: Oxford University Press.
- [12] Kreuzer, H. J. 1981. *Monographs on the Physics and Chemistry of*

Materials: Non-equilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations, Oxford: Oxford Science Publications.

- [13] Bellac, M. L. 2007. Non Equilibrium Statistical Mechanics. Makalah ini disajikan dalam *Lectures Given at Les Houches*

Predoctoral School, Perancis, 26 Agustus – 7 September.