POPULASI TAK TERBATAS DENGAN PELAYANAN TUNGGAL (M/M/1):(GD/ ∞/ ∞)

By. retnosubekti@uny.ac.id

Penguraian Probabilitas

Penguraian dari single chanel pada model dengan populasi tak terbatas ini akan ditelusur dari 3 kondisi yaitu :

Pada selang waktu t —— t+h

Dengan $\Delta t = h$ dan h sangat kecil

Kejadian	Banyaknya unit pada waktu ke t	# unit pada waktu t+h	# kedatangan	# service
1	n	n	0	0
2	n+1	n	0	1
3	n-1	n	1	0
		$P_n(t+h)..?$		

Dengan probabilitas kedatangan dan pelayanan adalah :

probabilitas kedatangan : Pa = $\lambda.\Delta t$ = $\lambda.$h

probabilitas pelayanan : Ps = $\mu.\Delta t$ = $\mu.$h

probabilitas system pelayanan (busy) : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$(\Delta t)^2 = \mathrm{h}^2 = \phi$$

Selanjutnya akan dicari $P_n(t+h) = P_n(t)$ untuk h sangat kecil

Kejadian 1 .

Probabilitas 1 = $P_n(t)\ (1-\lambda\mathrm{h})(1-\mu\mathrm{h})$

= $P_n(t)\ (1-\lambda\mathrm{h}-\mu\mathrm{h}+\lambda\mathrm{h}\mu\mathrm{h})$

=$P_n(t)\ (1-\lambda\mathrm{h}-\mu\mathrm{h})$ …………1)

Kejadian 2.

Probabilitas 2 = $P_{n+1}(t)\ (1-\lambda\mathrm{h})\mu\mathrm{h}$

$= P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h} - \lambda\text{h}\mu\text{h})$

$=P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h})$ ………….2)

Kejadian 3.

Probabilitas 3 $= P_{n-1}(t)\ (1 - \mu\text{h})\lambda\text{h}$

$= P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h} - \lambda\text{h}\mu\text{h})$

$=P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$ ………….3)

$P_n(t+h) = prob\ 1 + prob\ 2 + prob\ 3$

$P_n(t+h) = P_n(t)\ (1 - \lambda\text{h} - \mu\text{h}) + P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h}) + P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$ ……..4)

Mengingat h = Δt sangat kecil dengan $P_n(t+h) = P_n(t)$ maka persamaan 4) menjadi

$P_n(t) = P_n(t)\ (1 - \lambda\text{h} - \mu\text{h}) + P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h}) + P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$

$P_n(t) - P_n(t)\ (1 - \lambda\text{h} - \mu\text{h}) - P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h}) = P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h})$

$P_{n+1}(t)\ (\mu\text{h}) = P_n(t) - P_n(t)\ (1 - \lambda\text{h} - \mu\text{h}) - P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$

$= P_n(t) - P_n(t) + P_n(t)(\lambda\text{h}) + P_n(t)(\mu\text{h}) - P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$

$=P_n(t)\text{h}(\lambda + \mu) - P_{n-1}(t)\ (\lambda\text{h})$

$P_{n+1}(t)\ (\mu) = P_n(t)(\lambda + \mu) - P_{n-1}(t)\ (\lambda)$

$P_{n+1}(t) = P_n(t)\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_{n-1}(t)\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ ……………5)

Akan diselidiki terlebih dahulu $P_0(t)$ dan $P_1(t)$ untuk mencari $P_n(t)$

$P_0(t)$ artinya dapat diilustrasikan berasal dari kejadian berikut

Kejadian 1. Dengan

- ❖ Tidak ada customer pada waktu t
- ❖ Tidak ada yang datang =1- λh
- ❖ Tidak ada yang sedang di service → μh = 0

$prob\ 1 = P_0(t)(1\text{-}\ \lambda\text{h})\ (1 - \mu\text{h})$

$= P_0(t)(1\text{-}\ \lambda\text{h})\ (1 - 0) = P_0(t)(1\text{-}\ \lambda\text{h})$ ……….6)

Kejadian 2. Dengan

- ❖ ada satu customer pada waktu t
- ❖ Tidak ada yang datang =1- λh
- ❖ ada yang di service → μh

$prob\ 2$ $= P_1(t)$(1- λh). μh

$= P_1(t)(\mu h) - P_1(t)(\lambda h \mu h) = P_1(t)(\mu h)$ ……7)

Maka

$P_0(t+h) = prob\ 1 + prob\ 2$

$= P_0(t)(1-\lambda h) + P_1(t)(\mu h)$

Mengingat h sangat kecil maka $P_0(t+h) = P_0(t)$

$P_0(t) = P_0(t)(1-\lambda h) + P_1(t)(\mu h)$

$= P_0(t) - P_0(t)(\lambda h) + P_1(t)(\mu h)$

$P_0(t)(\lambda h) = P_1(t)(\mu h)$

$P_0(t)(\lambda) = P_1(t)(\mu)$ → $P_0(t) = P_1(t)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$

Maka $P_1(t) = P_0(t)\frac{\lambda}{\mu}$ → $P_1 = P_0\frac{\lambda}{\mu}$ …………………..8)

Selanjutnya dari persamaan 5) yaitu $P_{n+1} = P_n\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

Untuk n=1 → $P_2 = P_1\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

dengan menggunakan P_1 dari persamaan 8) maka

$$P_2 = P_0\frac{\lambda}{\mu}\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= P_0\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - 1\right)$$

$$= P_0\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

untuk P_3 dst, selanjutnya analog sehingga

$$P_3 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Mengingat $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ adalah busy system maka untuk $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ sehingga

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

Selanjutnya akan dicari berapa jumlah harapan unit (customer) dalam system.

X= banyaknya customer dengan probabilitas tertentu P(X)

E(X) = $\sum_x x.p(x)$

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n.(1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n$$

Buktikan $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

Untuk penguraian yang lain silahkan dipelajari referensinya, bagaimana memperoleh W_s, L_q, W_q.

Apabila W_s merupakan waktu menunggu pelanggan dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu pelanggan dalam antrian, maka hubungan W_s, W_q, L_s, L_q dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda_{eff} W_s$$

$$L_q = \lambda_{eff} W_q$$

Persamaan $tersebut$ dikenal dengan nama *Little Law*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun 1961 (Taha, 1982: 600).