

BAB III

MODEL MATEMATIK SISTEM FISIK

1. Deskripsi Karakteristik Sistem Fisik

Beberapa sistem dinamik, seperti mekanik, listrik, termal, hidraulik dan sebagainya dapat dikarakteristikan dengan persamaan diferensial. Persamaan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa hukum fisika yang berlaku pada sistem yang ditinjau, misalnya hukum Newton untuk sistem fisik, hukum Kirchhoff untuk sistem listrik dan sebagainya.

Deskripsi matematik dari karakteristik dinamik suatu sistem disebut model matematik. Langkah pertama dalam analisis suatu sistem dinamik adalah menurunkan modelnya terlebih dahulu. Model matematik tersebut dapat disajikan dalam bentuk yang berbeda, tergantung pada sistem beserta kondisi sekeliling objek yang ditinjau. Sebagai contoh dalam persoalan optimasi sistem misalnya, cocok menggunakan persamaan diferensial orde pertama. Sementara dalam analisis respon transien atau frekuensi suatu sistem satu masukan satu keluaran menggunakan fungsi alih akan lebih tepat. Setelah model matematik suatu sistem diperoleh, maka berbagai piranti analisis termasuk komputer dapat digunakan dalam analisis maupun sintesis.

Keterlibatan alat bantu komputer sangat tepat apabila model matematik yang ditinjau demikian kompleks dan dituntut agar hasil yang didapat memiliki ketelitian tinggi. Sebaliknya, jika tidak dituntut atau diperlukan ketelitian yang sangat tinggi, cukup dengan menentukan model yang disederhanakan secara layak. Dalam hal ini kita dapat mengabaikan beberapa sifat fisis dari sistem yang ditinjau, namun model matematik linear (persamaan diferensial biasa) yang diinginkan dapat tersusun melalui parameter-parameter yang sangat diperlukan. Pengabaian pengaruh sifat-sifat fisis tersebut benar-benar telah dipertimbangkan terlebih dahulu, sehingga didapat kesesuaian yang baik antara hasil analisis model matematik dengan hasil studi eksperimen pada sistem fisik yang dikaji. Dengan kata lain model matematik linear parameter terkumpul dapat disusun dalam bentuk persamaan diferensial linear pula.

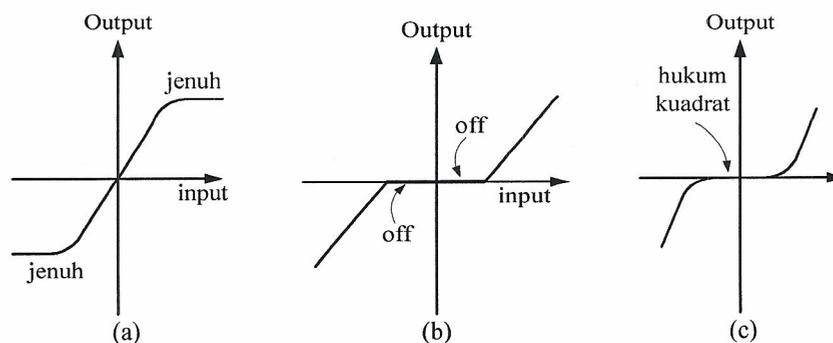
Model matematik suatu sistem dikatakan linear apabila memenuhi prinsip Superposisi dan homogenitas. Dalam hal ini respon yang dihasilkan oleh penggunaan secara serentak dua buah fungsi penggerak yang berbeda adalah sama dengan respon dari dua buah respon individualnya. Model tersebut dapat diilustrasikan sebagai suatu sistem yang memiliki respon $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan dua masukan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ sedemikian rupa. Selanjutnya respon sistem tersebut terhadap masukannya dapat disusun:

$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$; akan didapat keluaran misal saja:

$a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$; dimana a_1 dan a_2 konstan.

Dari rumusan tersebut di atas mudah dipahami bahwa pada sistem linear, respon terhadap beberapa masukan dapat dihitung dengan mencari respon terhadap tiap-tiap masukan dan menjumlahkan hasilnya. Jika parameternya konstan (time invariant), akan diselesaikan dengan persamaan diferensial linear parameter konstan (linear time invariant = linear koefisien konstan).

Sekalipun beberapa hubungan fisis sering kali dinyatakan dengan persamaan linear, namun dalam kebanyakan kasus hubungan yang sebenarnya adalah tidak benar-benar linear. Pada kenyataannya, suatu studi sistem fisik yang cermat menyatakan bahwa sistem linear hanya benar-benar linear pada daerah kerjanya. Masalah peredam (damping) yang terjadi pada sistem fisik, mungkin linear untuk operasi kecepatan rendah dan menjadi non linear pada kecepatan tinggi dan gaya redaman mungkin jadi sebanding dengan kuadrat kecepatan kerjanya. Contoh kurva ketidaklinearan ini ditunjukkan pada Gambar III.1.



Gambar III.1. Kurva Karakteristik ketidaklinearan (a) Saturasi, (b) Daerah mati, (c) Hukum kuadrat.

2. Persamaan Diferensial Sistem Fisik.

Sistem dinamik seperti mekanik, listrik, hidraulik, thermal, dan sebagainya, dapat “dikarakteristikan” dengan persamaan diferensial. Respon suatu sistem dinamik terhadap suatu masukan (fungsi penggerak) dapat diperoleh dengan persamaan diferensial. Persamaan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan hukum fisika seperti Newton dan Kirchhoff.

a. Translasi Mekanik

Pada sistem translasi mekanik terdapat tiga (3) elemen pokok, yaitu masa, gaya, dan friksi (gesekan). Masa adalah elemen inerti; apabila suatu gaya dikenakan padanya, maka akan menghasilkan gaya reaksi yang besarnya sama dengan hasil kali antara masa dan percepatannya, sedang arahnya berlawanan dengan percepatannya itu sendiri.

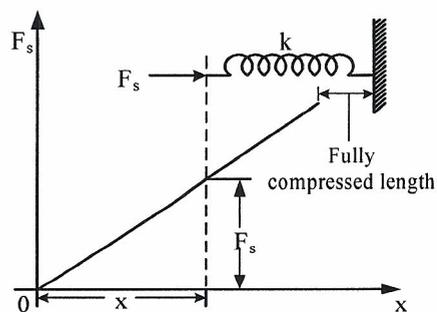
Persamaan gaya tersebut adalah:

$$F_M = Ma$$

dimana

M	=	masa (kg)
a	=	percepatan (m/dtk ²)
F _M	=	gaya (N)

Apabila pegas dikenai gaya luar, maka akan dihasilkan gaya reaksi yang mencoba untuk mengembalikan kondisi pegas ke panjang yang asli seperti semula. Selama deformasi kecil dapat dipertahankan, maka pegas seolah-olah merupakan elemen linear, yang karakteristiknya seperti Gambar III.2.



Gambar III.2. Karakteristik pegas.

Pada daerah gesekan yang linear persamaan gayanya adalah:

$$F_s = Kx$$

Dimana

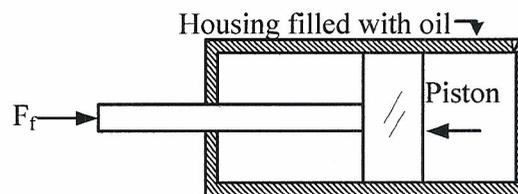
x	=	perubahan kondisi pegas (m)
F _s	=	gaya pegas (N)
K	=	konstanta kekakuan pegas (N/m).

Pada gerakan sistem mekanik yang bersentuhan dengan dinding permukaan mekanik itu sendiri akan menimbulkan gesekan (friksi). Dalam sistem kendali

gesekan tersebut lazim disebut friksi viskos (viscous friction). Gaya friksi tersebut dirumuskan:

$$F_f = fv, \text{ dimana } \begin{array}{l} v = \text{kecepatan gesekan relative (m/dtk)} \\ F_f = \text{gaya friksi viskos (N)} \\ f = \text{koefisien friksi viskos (N/m/dtk)}. \end{array}$$

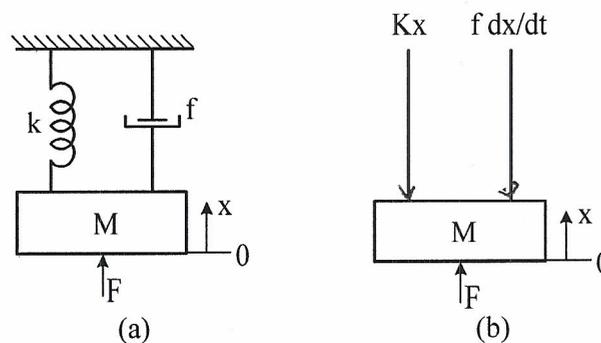
Gaya friksi akan melawan kecepatan dengan arah yang berlawanan. Untuk mempermudah pemahaman tentang gaya friksi ini dapat diilustrasikan pada pemakaian dan proses kerja dari sebuah “dashpot” seperti Gambar III.3.



Gambar III.3. Konstruksi dashpot

Dashpot terdiri dari sebuah piston dan silinder berisi bahan bakar, antara keduanya dipisahkan oleh celah yang sangat sempit. Setiap gerakan antara piston dan silinder dihalangi/dihambat oleh bahan bakar dengan gaya friksi (F_f).

Sistem mekanik dari kerja dashpot di atas ditunjukkan pada gambar berikut ini. Dari penyederhanaan sistem mekanik di bawah, masa (M) ditempatkan pada pegas yang memiliki tingkat “kekakuan” (K) dan dashpot yang berkoefisien friksi viskos (f) dengan gaya luar (F). Arah pemindahan masa (X) ini adalah positif. Sementara posisi nol diambil dimana masa dan pegas berada pada titik setimbang statisnya.



Gambar III.4. Sistem masa-pegas-dashpot (a) dan diagram bodi (b)

Dengan menerapkan hukum Newton untuk gerakan masa pada bodi, persamaannya dapat ditulis

$$F - f \frac{dx}{dt} - Kx = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{atau}$$

$$F = M \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx \quad \dots\dots\dots (III-1)$$

Persamaan tersebut adalah persamaan diferensial orde dua yang linear dan berkoefisien konstan.

b. Asselerometer Mekanik.

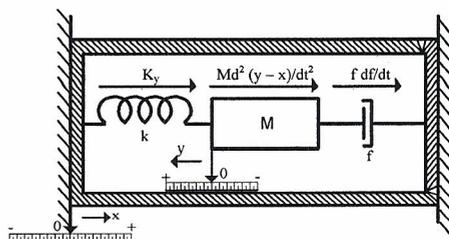
Dalam bentuk yang disederhanakan sebuah asselerometer terdiri dari sebuah sistem pegas-massa-dashpot sebagaimana ditunjukkan pada Gambar III.5. Biasanya rangka asselerometer ini ditempatkan pada bagian yang bergerak/berputar pada kendaraan bermotor. Tatkala kendaraan bergerak membuat asselerometer juga turut digerakan, sehingga pegas pun bergeser dan menghasilkan gaya yang cukup untuk mempercepat geseran massa secepat gerakan rangka asselerometernya.

Geseran atau simpangan pegas ini terukur langsung melalui sebuah potensiometer geser linear yang sebanding dengan percepatannya.

Keterangan:

x = perpindahan slider (kontak gaser) karena gerakan mesin kendaraan (bodi asselerometer) yang bertitik stel di pangkal rangka.

y = perpindahan slider (kontak gaser) karena gerakan massa yang bertitik stel di rangka asselerometer.



Gambar III.5. Diagram asselerometer yang disederhanakan.

Arah gerakan (+) dan (-) untuk x dan y seperti gambar.

Karena geseran y dari titik stel terukur, maka gaya masa (M) terhadap pegas = $-Ky$ dan terhadap friksi viskos = $-f.dy/dt$. Gerakan massa (y) ke arah positif dari titik stelnya adalah sejauh $(y - x)$. Dengan demikian persamaan gaya dari sistem tersebut menjadi:

$$M \frac{d^2(y-x)}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = 0 \quad \text{atau}$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = M \frac{d^2x}{dt^2} = Ma \quad \dots\dots\dots \text{(III-2)}$$

dimana: a = percepatan masukan.

Bila asselerometer mendapat (dikenai) percepatan yang konstan, maka perpindahan y juga konstan (steady state), sehingga derivatif y menjadi nol. Dalam hal ini adalah:

$$Ma = Ky \quad \text{atau} \quad a = (K/M) y.$$

Disini berarti pula bahwa geseran y yang tetap (steady state) merupakan pengukur percepatan masukan yang konstan.

c. Sistem Rotasi Mekanik.

Tiga komponen dasar dari sistem rotasi mekanik yaitu momen inersia, torsi pegas dan friksi viskos. Apabila sebuah benda berputar (motor listrik berbeban), maka akan menghasilkan torsi lawan yang sama dengan hasil kali antara momen inersia dan percepatannya. Torsi tersebut arahnya berlawanan (menentang) percepatan sudut putarnya, dan dirumuskan:

$$T_j = Ja, \quad \text{dimana: } J = \text{Momen inersia (kg-m}^2\text{)}$$

$$a = \text{Percepatan sudut putar (rad/sec}^2\text{)}$$

$$T_j = \text{torsi (N-m).}$$

Sebagai contoh torsi lawan berupa puntiran poros yang dikenai torsi luar. Torsi lawan poros ini dapat dikarakteristikan dengan persamaan:

$$T_s = K\theta, \quad \text{dimana: } T_s = \text{Torsi lawan (N-m)}$$

$$\theta = \text{Puntiran (radian)}$$

$$K = \text{Konstanta torsi (N-m/rad).}$$

Sementara friksi viskos terjadi saat rangka bodi berputar dan bergesekan dengan bodi rangka yang lain. Torsi lawan akan berlawanan arah dengan kecepatan sudut putarnya, dan diformulasikan:

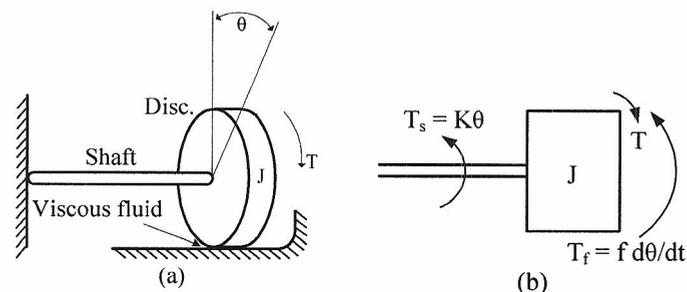
$$T_f = f\omega, \quad \text{dimana: } T_f = \text{torsi lawan friksi viskos (N-m)}$$

$$\omega = \text{kecepatan sudut putar relatif diantara sisi}$$

$$\text{rangka bodi (rad/sec)}$$

$$f = \text{koefisien friksi viskos (N-m/rad/sec)}.$$

Gambar III. 6 memiliki konstanta-konstanta: momen inersia roda/beban J , tingkat kehalusan/kekasaran poros K , koefisien friksi/viskos f dan torsi luar yang digunakan penyebab puntiran poros T .



Gambar III.6. (a) Sistem rotasi mekanik (b) Diagram rangka bodi

Dari Gambar. III. 6. b, persamaan torsinya adalah:

$$T - f \frac{d\theta}{dt} - K\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{atau}$$

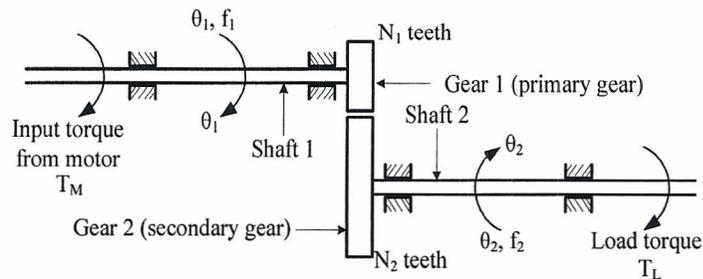
$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + K\theta \quad \dots \dots \dots \text{ (III-3)}$$

Persamaan sistem di atas merupakan persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan.

d. Roda Gerigi Pereduksi Kecepatan Putar.

Roda gerigi (gear train) ini banyak digunakan pada sistem kendali untuk memperoleh kecepatan putar yang sesuai antara motor dan unit beban. Biasanya pada operasi servo motor yang berkecepatan tinggi tapi torsinya rendah. Dengan demikian sistem mekanik roda gerigi ini merupakan piranti penyesuaian seperti halnya pada trafo pada sistem listrik.

Gambar .III.7. berikut ini menunjukkan sebuah motor yang memutar beban melalui 2 roda gerigi yang dikopel menjadi satu. Gerigi N_1 disebut primer dan gerigi N_2 sekunder (analog dengan kumparan primer dan sekunder pada trafo). Pindahkan sudut putar dari poros 1 dan 2 dinyatakan dengan θ_1 dan θ_2 . Momen inersia dan friksi viskos motor dan gerigi 1 dinyatakan dengan J_1 dan f_1 , sedang gerigi 2 dan beban dinyatakan dengan J_2 dan f_2 .



Gambar III.7. Sistem gerigi mekanik

Untuk poros pertama, persamaannya adalah:

$$J_1\theta_1 + f_1\theta_1 + T_1 = T_M \quad \dots\dots\dots (III-4)$$

Dimana T_M adalah torsi yang dikembangkan oleh motor dan T_1 adalah torsi beban pada roda gerigi 1.

Untuk poros yang kedua

$$J_2\theta_2 + f_2\theta_2 + T_L = T_2 \quad \dots\dots\dots (III-5)$$

Dimana T_2 adalah torsi yang ditransmisikan ke roda gerigi 2 dan T_L = torsi beban. Dimisalkan radius roda gerigi 1 = r_1 dan roda gerigi 2 = r_2 . karena jarak pemindahan pada permukaan masing-masing roda gerigi sama dan linear, maka $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$. sementara jumlah gerigi pada setiap permukaan roda selalu proporsional terhadap radius gerigi, maka didapat rasio:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad \dots\dots\dots (III-6)$$

Disini tingkat kehalusan gesekan poros roda gerigi dianggap tak berhingga sehingga tidak ada daya hilang dalam proses transformasi dan akibatnya hasil kerja roda gerigi 1 dan 2 adalah sama. Oleh sebab itu:

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \quad \dots\dots\dots (III-7)$$

Bila persamaan (III-6) dan (III-7) dikombinasikan didapat:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} \dots\dots\dots (III-8)$$

Selanjutnya persamaan (III-8) didiferensiasi dua kali, sehingga diperoleh relasi kecepatan putaran dan percepatan, yaitu:

$$\frac{\ddot{\theta}_2}{\ddot{\theta}_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{N_1}{N_2} \dots\dots\dots (III-9)$$

Oleh sebab itu bila ($N_1 / N_2 < 1$), dari persamaan (III-8) dan (III-9) di atas akan terjadi pengurangan/penurunan kecepatan putaran dan memperkuat torsi.

Dengan meniadakan T_1 dan T_2 dari persamaan (III-4) dan (III-5) dengan bantuan dari persamaan (III-6), didapat:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2} \left(J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 + T_L \right) = T_M \dots\dots\dots (III-10)$$

Bila θ_2 diadukan dari persamaan (III-10) dengan bantuan persamaan (III-9), diperoleh hasil:

$$\left[J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right) f_2 \right] \dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right) T_L = T_M \dots\dots\dots (III-11)$$

Jadi ekuivalen dari momen inersia dan friksi viskos roda gerigi pada poros 1 adalah:

$$J_{1 \text{ ek}} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 \quad \text{dan} \quad f_{1 \text{ ek}} = f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right) f_2$$

Sehubungan dengan itu, ekuivalen momen inersia dan friksi pada persamaan (III-11) dapat ditulis sebagai:

$$J_{1 \text{ ek}} \ddot{\theta}_1 + f_{1 \text{ ek}} \dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right) T_L = T_M$$

Disini (N_1 / N_2) T_L adalah forsi beban pada poros 1. demikian halnya untuk θ_1 dan θ_2 dari persamaan (III-10) dengan bantuan persamaan (III-9), ekuivalen momen inersia dan friksi viskos roda gerigi di bagian poros beban adalah:

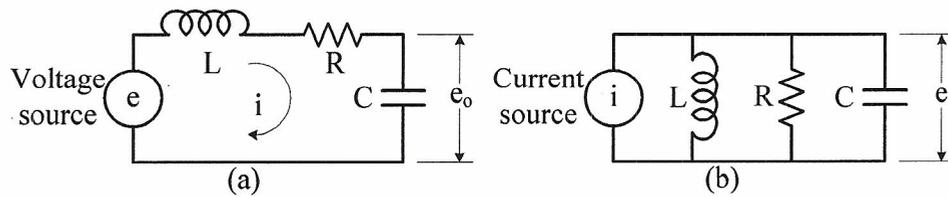
$$J_{2 \text{ ek}} = J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 J_1 \quad \text{dan} \quad f_{2 \text{ ek}} = f_2 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right) f_1$$

Adapun persamaan torsi pada poros beban, dapat diekspresikan sebagai:

$$J_{2 \text{ ek}} \ddot{\theta}_2 + f_{2 \text{ ek}} \dot{\theta}_2 + T_L = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) T_M$$

e. Sistem Listrik

Resistor, induktor dan kapasitor adalah tiga komponen pokok dalam untai listrik. Rangkaian tersebut dapat dianalisis dengan menggunakan hukum Kirchhoff tegangan maupun arus. Berikut ini akan dianalisis rangkaian L-R-C dalam seri (Gambar. III. 8a dan 8b) dengan menggunakan hukum Kirchhoff tegangan.



Gambar III. 8. Rangkaian L-R-C (a) Seri (b) Paralel.

Bentuk persamaan sistem tersebut adalah:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = e \dots\dots\dots \text{(III-12)}$$

$$\frac{1}{C} \int idt = e_o \dots\dots\dots \text{(III-13)}$$

Karena $\int idt = q$, maka persamaan (III-12) menjadi:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e \dots\dots\dots \text{(III-14)}$$

Identik dengan cara di atas, untuk untai parallel dianalisis dengan menggunakan hukum Kirchhoff arus. Persamaannya adalah:

$$\frac{1}{L} \int edt + \frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} = i \dots\dots\dots \text{(III-15)}$$

Karena $\int edt = \Phi$, maka persamaan (III-15) dapat ditulis:

$$C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{L} \Phi = i \dots\dots\dots \text{(III-16)}$$

f. Sistem Analogi

Dengan membandingkan persamaan (III-1) untuk translasi sistem mekanik (Gambar III. 4. a), atau persamaan (III-3) untuk sistem rotasi mekanik (Gambar iii. 8. a), ternyata memiliki kesamaan bentuk. Dalam hal ini pemakaian persamaan diferensial orde 2, sehingga disebut juga sistem analogi. Gaya F (Torsi T) dan tegangan e adalah variabel-variabel yang dianalogikan. Hal ini lazim disebut Analogi Gaya (Torsi)-Tegangan. Daftar variabel-variabel yang dianalogikan tersebut sebagaimana tertulis pada Tabel 1.

Demikian pula halnya persamaan-persamaan (III-1) dan (III-3) serta persamaan (III-16) untuk sistem listrik (Gambar III. 8. b) sangat identik sekali. Dalam hal ini Gaya F (Torsi T) dan arus i adalah variabel-variabel yang dianalogikan. Hal ini lazim disebut Analogi Gaya (Torsi)-Arus. Daftar besaran yang dianalogikan tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 1. Daftar Analogi Gaya (Torsi)-Tegangan

Sistem Translasi Mekanik	Sistem Rotasi Mekanik	Sistem Listrik
Gaya, F	Torsi, T	Tegangan, e
Massa, M	Momen Inersia, J	Induktansi, L
Koef. Friksi viskos, f	Koef. Friksi Viskos, f	Resistansi, R
Kekakuan pegas, K	Kekakuan torsi pegas, K	Kapasitansi (ek), $1/C$
Displacement, x	Angular Displacement, θ	Muatan, q
Kecepatan, \hat{x}	Kecepatan sudut, $\hat{\theta}$	Arus, i

Tabel 2. Daftar Analogi Gaya (Torsi)-Arus

Sistem Translasi Mekanik	Sistem Rotasi Mekanik	Sistem Listrik
Gaya, F	Torsi, T	Arus, i
Massa, M	Momen Inersia, J	Kapasitansi, C
Koef. Friksi viskos, f	Koef. Friksi Viskos, f	Resistansi (ek), $1/R$
Kekakuan pegas, K	Kekakuan torsi pegas, K	Induktansi (ek), $1/L$
Displacement, x	Angular Displacement, θ	Fluksimagnet, Φ
Kecepatan, \hat{x}	Kecepatan sudut, $\hat{\theta}$	Tegangan, e

Konsep sistem analogi di atas sangat berguna, sebagai acuan di dalam mempelajari/menganalisis variasi-variasi sistem yang lain seperti listrik, mekanik, panas, tinggi muka cairan, dan sebagainya. Apabila penyelesaian satu sistem telah diketemukan, maka dapat dikembangkan untuk sistem-sistem analogi yang lain. Pada umumnya cara tersebut banyak dipakai untuk mempelajari sistem non listrik dianalogikan dengan sistem listrik, karena relatif lebih mudah dieksperimenkan.

g. Sistem Tinggi Muka Cairan.

Pada sistem pengendalian tinggi muka cairan hanya dapat digambarkan melalui persamaan diferensial linear bila sistem tersebut mempunyai variasi aliran. Proses ini banyak dijumpai di Industri dimana aliran tersebut disalurkan lewat pipa-pipa dan tanki. Gerakan/aliran sistem tersebut biasanya menghendaki penyelesaian melalui persamaan diferensial tidak linear.

Sistem pengendalian tinggi muka cairan sederhana ditunjukkan seperti Gambar III. 9., dimana tanki mendapat suplai cairan melalui pipa pendek. Pada kondisi tetap tertentu, katakanlah cairan yang mengalir ke dalam tanki $Q_i = Q_o$. Untuk aliran yang bergerak atau berguncang hubungan antara tinggi permukaan dan pengosongan bersifat tidak linear dan dapat digambarkan secara grafik (lihat Gambar III. 10). Secara matematik keadaan tersebut dapat diformulasikan sebagai:

$$Q = k \sqrt{H}$$

Pertambahan cairan yang mengalir ke dalam tanki (ΔQ_i) relatif kecil terhadap harga keadaan tetap tinggi muka cairan semula. Pertambahan aliran cairan ini akan mengakibatkan tinggi muka cairan dalam tanki bertambah sebesar ΔH , demikian pula aliran yang keluar bertambah sebesar ΔQ_o .

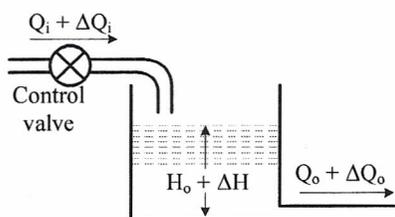
Perubahan aliran cairan yang keluar dari tanki ditandai oleh perubahan ΔH , dan besarnya perubahan dapat dideteksi melalui persamaan yang dilinearkan, yaitu:

$$\Delta Q_o \approx \left. \frac{dQ}{dH} \right|_{H_0} \Delta H \quad \text{atau} \quad \Delta Q_o = \frac{\Delta H}{R}$$

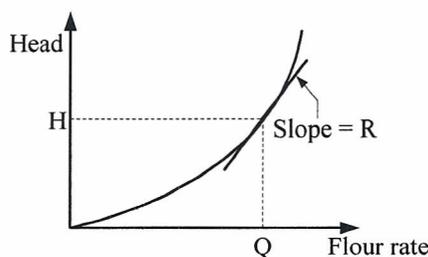
Dimana: $R = \frac{dH}{dQ} \Big|_{H_0} = \frac{2\sqrt{H_0}}{k} \left(\frac{m}{Cub - m/s} \right)$

Disini R didefinisikan sebagai tahanan aliran.

Apabila cairan yang mengalir keluar dari tanki disalurkan melalui pipa yang panjang sekali, maka akan memperbesar nilai tahanan aliran, yang dalam hal ini dapat disamakan dengan besar tahanan pada tanki penampung sebagaimana didefinisikan di atas. Dengan demikian R adalah dianggap sebagai tahanan total aliran cairan pada sistem tanki-pipa tersebut.



Gambar III. 9. Sistem permukaan cairan



Gambar III. 10. Grafik tinggi muka cairan versus kecepatan aliran.

Sistem dinamika aliran ini dapat diuraikan sebagai suatu persamaan setara khusus kecepatan aliran, yaitu:

$$\begin{aligned} \Delta Q_i - \Delta Q_o &= \text{perbandingan cairan tersimpan dalam tanki} \\ &= C \frac{d(\Delta H)}{dt} \dots\dots\dots (III-17) \end{aligned}$$

Satuan C dalam m², yang didefinisikan sebagai kapasitas tanki pada daerah luasan yang ditempati air secara efektif. Bila dilakukan substitusi terhadap ΔQo dari persamaan (III-17), hasilnya didapat:

$$RC \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = R(\Delta Q_i) \dots\dots\dots (III-18)$$

h. Sistem Termal

Persyaratan dasar yang harus dipenuhi guna menggambarkan sistem termal dengan model atau seragam. Dengan demikian untuk melakukan analisis yang cukup cermat diperlukan penggunaan model parameter terdistribusi. Walau

demikian, untuk menyederhanakan analisis, keseragaman temperatur harus diumpamakan benar-benar dicapai, sehingga sistem tersebut dapat digambarkan dengan sebuah model parameter blok yang lebih sederhana.

Sistem termal sederhana ditunjukkan pada Gambar III. 11. Dari gambar tampak bahwa tangki diberi isolasi guna mengeliminir panas yang hilang di udara. Tidak pula ada panas yang terserap pada isolasi, sehingga keseragaman temperatur cairan dalam tanki terjadi setelah ditempatkannya elemen pencampur (mixer). Bila tanpa bantuan mixer, pendistribusian temperatur cairan yang merata dalam tanki sulit dicapai dan bersifat kompleks (menuntut pemecahan pemakaian persamaan diferensial parsial).

Dari sistem ini diketahui bahwa temperature tetap (steady state) cairan yang mengalir ke dalam tanki = θ_i dan yang mengalir keluar dari tanki = θ , sedang panas yang dihasilkan "heater" = H dan besar aliran dari cairan diyakinkan konstan.

Pertambahan panas masukan dari "heater" sebesar ΔH (joule/menit) dari nilai tetapnya memang sangat kecil, namun demikian akan menghasilkan kenaikan panas pada aliran keluaran sebesar ΔH_1 dan panas cairan dalam tanki sebesar ΔH_2 . Pada gilirannya temperatur cairan dalam tanki akan turut naik, demikian pula temperatur cairan yang keluar dari tanki bertambah sebesar $\Delta\theta$ ($^{\circ}\text{C}$). Mengingat tidak terjadi kebocoran panas pada isolasi tanki, maka kenaikan temperatur cairan yang keluar dari dalam tanki dapat diformulasikan sebagai:

$$\Delta H_1 = q_s \Delta\theta$$

dimana q = keajegan banyaknya aliran cairan (kg/menit)
 S = panas spesifik cairan (joule/kg- $^{\circ}\text{C}$).

Formulasi di atas dapat ditulis ulang dalam bentuk:

$$\Delta H_1 = \Delta\theta / R \dots\dots\dots (III-19)$$

Dimana $R = 1/q_s$, yang didefinisikan sebagai tahanan termal dengan satuan $^{\circ}\text{C}/\text{Joule}/\text{menit}$.

Banyaknya panas yang tersimpan di dalam tanki diformulasikan sebagai:

$$\Delta H_2 = M_s \frac{d(\Delta\theta)}{dt}$$

Dimana M = massa cairan dalam tanki (kg).

$d\theta_0/dt$ = kenaikan temperatur dalam tanki

selanjutnya persamaan di atas dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$\Delta H_2 = C \frac{d(\Delta\theta)}{dt} \dots\dots\dots (III-20)$$

dimana $C = MS$, yang didefinisikan sebagai kapasitas termal dengan satuan Joule/°C.

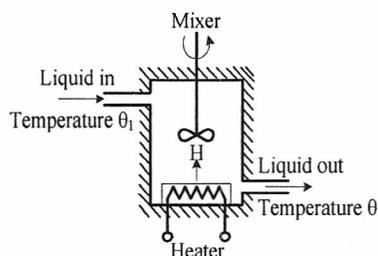
Jadi persamaan aliran panasnya adalah:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta H_1 + \Delta H_2 \\ &= \frac{\Delta\theta}{R} + C \frac{d(\Delta\theta)}{dt} \end{aligned}$$

atau

$$RC \frac{d(\Delta\theta)}{dt} + \Delta\theta = R(\Delta H) \dots\dots\dots (III-21)$$

Persamaan (III-21) di atas menggambarkan persamaan dinamika sistem termal dimaksud dengan asumsi bahwa temperatur sepanjang aliran cairan terjaga konstan. Dalam praktiknya temperatur aliran cairan ini nyatanya mengalami fluktuasi (berubah-ubah) setiap saatnya. Jadi selama ada panas (signal masuk) dari "heater" akan terjadi pertambahan signal yang juga merubah kondisi temperatur cairan sepanjang aliran yang lazim disebut signal pengganggu (disturbance signal).



Gambar III. 11. Sistem pemanasan termal.

Misalkan saja perubahan temperatur cairan yang masuk sebesar $\Delta\theta_i$ dari temperatur ajegnya (steady state). Penambahan temperatur yang diterima dari heater berakibat terjadinya perubahan panas cairan yang terbawa aliran. Persamaan panas aliran ini akan berubah menjadi:

$$\Delta H + \frac{\Delta \theta_i}{R} = \frac{\Delta \theta}{R} + C \frac{d}{dt}(\Delta \theta) \quad \text{atau}$$

$$RC \frac{d}{dt}(\Delta \theta) + \Delta \theta = \Delta \theta_i + R(\Delta H) \dots \dots \dots \text{ (III-22)}$$

Kini lupakan sementara tentang asumsi bahwa keandalan isolasi tanki yang meyakinkan itu. Sebagaimana dikemukakan di atas bahwa temperatur cairan bertambah (naik) sebesar $\Delta \theta$, panas yang mengalir melalui dinding tanki menyebabkan rambatan panas mediumnya bertambah (naik) sebesar:

$$\Delta H_2 = \frac{\Delta \theta}{Rt}$$

Dimana Rt adalah tahanan termal dari dinding tanki. Dengan demikian persamaan (III-22) di atas dapat dimodifikasi menjadi:

$$\Delta H + \frac{\Delta \theta_i}{R} = \left(\frac{\Delta \theta}{R} + \frac{\Delta \theta}{Rt} \right) + C \frac{d}{dt}(\Delta \theta)$$

atau

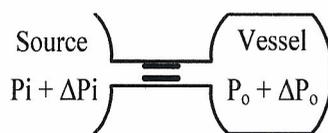
$$RC \frac{d}{dt}(\Delta \theta) + \Delta \theta = \left(\frac{R}{R} \right) \Delta \theta_i + R(\Delta H) \dots \dots \dots \text{ (III-23)}$$

dimana $R = \frac{RRt}{R + Rt} =$ tahanan efektif termal berkenaan dengan panas rambat pada pipa aliran dan dinding tanki diperhitungkan secara paralel yaitu R dan Rt .

Formulasi di atas, pada dasarnya panas yang tersimpan pada dinding tanki masih dapat diabaikan. Dengan mengabaikan asumsi tersebut dapat mempengaruhi (menyederhanakan) besarnya kapasitas termal (C).

i. Sistem Pneumatik.

Sistem pneumatik sederhana ditunjukkan pada Gambar III. 12; dimana sumber pneumatik memasok udara ke dalam sebuah bejana (tabung) melalui sebuah pipa penyalur. Selama drop tekanan pada pipa penyalur masih kecil, dapat dimungkinkan adanya semburan udara yang mengalir. Dengan demikian dinamika sistem tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan linear.



Gambar III. 12. Sistem pneumatic sederhana

Besar aliran udara yang masuk ke dalam tabung berdasar perhitungan tekanan diferensial dapat ditentukan, yaitu:

$$\Delta Q = \frac{\Delta P_i - \Delta P_o}{R} \quad (\text{m}^3/\text{menit}) \quad \dots \dots \dots \quad (\text{III-24})$$

dimana $R \left(\frac{\text{newton}/\text{m}^2}{\text{m}^3/\text{menit}} \right)$ yang didefinisikan sebagai tahanan aliran udara yang mengalir melalui pipa penyalur yang juga merupakan konstanta semburan udara yang mengalir.

Keterangan: P_i = tekanan udara dalam sumber saat steady state (Newton/m²)
 P_o = tekanan udara dalam tabung saat steady state (Newton/m²)
 ΔP_i = perubahan (kecil) tekanan udara dalam sumber
 ΔP_o = perubahan (kecil) tekanan udara dalam tabung

Besar volume udara dalam sumber (P_i) yang diterima tersimpan dalam tabung dan menyebabkan naiknya tekanan didalamnya sebesar ΔP_o adalah $\Delta V = \Delta Q dt$. Volume tersebut berbanding langsung terhadap temperatur tabung untuk tetap konstan. Dalam hal ini dapat diformulasikan sebagai:

$$\Delta V = C \Delta P_o$$

dimana $C = \frac{\Delta V}{\Delta P_o} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{newton}/\text{m}^2} \right)$ yang didefinisikan sebagai kapasitas tabung.

Hasil diferensiasi persamaan ini tiada lain adalah isi udara yang tersimpan dalam tabung, yaitu:

$$\frac{d(\Delta V)}{dt} = C \frac{d(\Delta P_o)}{dt} \quad \dots \dots \dots \quad (\text{III-25})$$

Keseimbangan antara udara yang dialirkan dari sumber (P_i) dan yang tersimpan di dalam tabung (P_o) dapat ditulis:

$$\frac{\Delta P_i - \Delta P_o}{R} = C \frac{d(\Delta P_o)}{dt}$$

atau

$$RC \frac{d(\Delta P_o)}{dt} + \Delta P_o = \Delta P_i \dots\dots\dots (III-26)$$

Dari pembahasan mengenai beberapa variabel dan parameter yang terdapat pada sistem termal, tinggi muka cairan dan sistem pneumatik semuanya dapat dianalogikan ke dalam sistem listrik sebagaimana dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 3. Daftar Analogi Besaran dan Satuannya.

Sistem Listrik	Sistem Termal	Sistem Muka Cairan	Sistem Pneumatik
Muatan, coulomb	Aliran panas, joule	Aliran cairan, m ³	Aliran udara, m ³
Arus, ampere	Besar aliran panas, joule/menit	Besar aliran cairan, m ³ /menit	Besar aliran udara, m ³ /menit
Tegangan, volt	Temperatur, °C	Tinggi permukaan, m	Tekanan, Newton/m ²
Tahanan, ohm	Tahanan, °C/joule/menit	Tahanan, m/m ³ /menit	Tahanan, N/m ² /m ³ /menit
Kapasitansi, farad	Kapasitansi, joule/°C	Kapasitansi, m ³ /m	Kapasitansi, m ³ /Newton/m ²

3. Fungsi Alih

Fungsi alih sistem linear parameter konstan didefinisikan sebagai perbandingan dari transformasi Laplace keluaran (fungsi respons) dan transformasi Laplace masukan (fungsi penggerak), dengan anggapan bahwa semua syarat awal adalah nol. Sebagai contoh perhatikan bentuk umum persamaan diferensial berikut ini.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x + b_m x \dots\dots\dots (III-27)$$

Catatan: disini $n > m$

y = keluaran sistem, x = masukan sistem

Fungsi alih dari sistem di atas diperoleh dengan mencari transformasi Laplace dari kedua ruas persamaan (III-27), dengan menganggap bahwa semua syarat awal adalah nol.

Fungsi alih:

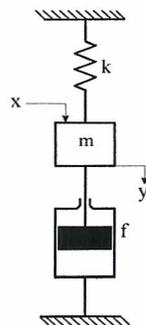
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Fungsi alih adalah suatu ekspresi yang merelasikan keluaran dan masukan suatu sistem linear parameter konstan dalam bentuk parameter sistem dan merupakan sifat dari sistem itu sendiri, tidak tergantung pada fungsi masukan atau penggerak. Fungsi alih mencakup satuan-satuan yang diperlukan untuk merelasikan masukan dengan keluaran. Meskipun demikian, fungsi alih tidak memberikan informasi mengenai struktur fisik dari sistem. Fungsi alih dari beberapa sistem fisik yang berbeda mungkin identik.

Dengan menggunakan konsep ini, kita dapat menyatakan dinamika sistem dengan beberapa persamaan aljabar dalam s . Pangkat tertinggi dari s pada penyebut fungsi alih sama dengan orde suku turunan tertinggi dari s tersebut adalah n , maka sistem tersebut disebut "sistem orde ke- n ".

a. Sistem Translasi Mekanik

Dari gambar III.13 tentang sistem pegas-massa-dashpot, kita dapat menganggap bahwa gaya $x(t)$ sebagai masukan dan perpindahan $y(t)$ dari massa sebagai keluaran. Langkah-langkah yang harus ditempuh adalah sbb:



- (1) Menulis persamaan diferensial dari sistem.
- (2) Mencari transformasi Laplace dari persamaan diferensial sistem yang di dapat dengan menganggap bahwa semua syarat awal nol.
- (3) Mencari perbandingan dari keluaran $Y(s)$ dan masukan $X(s)$. Rasio perbandingan ini adalah fungsi alih yang dicari.

Gambar III.13. Sistem Pegas-Massa-Dashpot.

Dengan menerapkan hukum Newton pada sistem tersebut di atas, kita peroleh:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -f \frac{dy}{dt} - Ky + x \quad \text{atau} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = x \quad \dots \dots \dots \quad (\text{III-28})$$

Dengan mencari transformasi Laplace tiap suku persamaan (III-28) diperoleh:

$$L \left[m \frac{d^2 y}{dt^2} \right] = m \left[s^2 Y(s) - sy(0) - \hat{y}(0) \right]$$

$$L \left[f \frac{dy}{dt} \right] = f [sY(s) - y(0)]$$

$$L(ky) = kY(s)$$

$$L(x) = X(s)$$

Jika kita tentukan syarat awalnya sama dengan nol, sedemikian sehingga $y(0) = 0$ dan $\hat{y}(0) = 0$, maka transformasi Laplace dari persamaan (III-28) dapat ditulis:

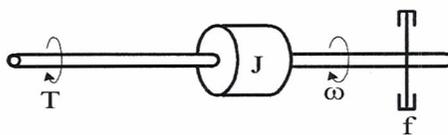
$$(ms^2 + fs + k)Y(s) = X(s)$$

Dengan mencari perbandingan $Y(s)$ dan $X(s)$. Kita peroleh fungsi alih dari sistem tersebut:

$$\text{Fungsi alih } G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} \quad \dots \dots \dots \quad (\text{III-29})$$

b. Sistem Rotasi Mekanik

Dari Gambar III. 14 tampak bahwa sistem rotasi mekanik terdiri dari inersia beban dan peredam gesekan viskos.



Gambar III. 14. Sistem rotasi mekanik.

Keterangan : J = momen inersia beban (kg-m^2)
 f = koefisien gesekan viskos (N-m/rad/det)
 ω = kecepatan sudut (rad/det)
 T = torsi yang dikenakan pada sistem (N-m)

Untuk sistem rotasi mekanik, hukum Newton menyatakan bahwa:

$$J a = \Sigma T \quad \text{dimana:} \quad J = \text{momen inersia beban (kg-m}^2\text{)}$$

$$a = \text{percepatan sudut (rad/det}^2\text{)}$$

$$T = \text{torsi (N-m)}$$

Dengan menerapkan hukum Newton pada sistem tersebut diperoleh:

$$J \dot{\omega} + f\omega = T$$

Dengan menganggap bahwa torsi T yang dikenakan adalah masukan, dan kecepatan sudut putar ω adalah keluaran, maka fungsi alih dari sistem ini didapat sebagai berikut:

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f} \quad \text{dimana:} \quad \Omega(s) = L[\omega(t)]$$

$$T(s) = L[T(t)]$$

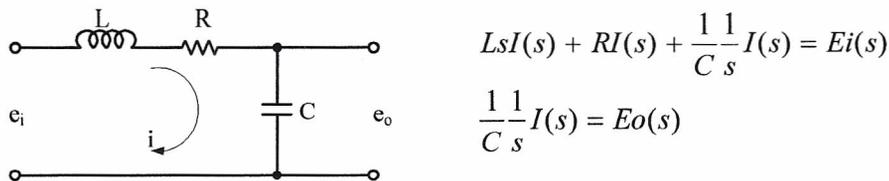
c. Sistem Listrik (Rangkaian L-R-C)

Rangkaian tersebut terdiri dari induktansi L (Henry), tahanan R (Ohm) dan kapasitansi C (farad). Dengan menerapkan hukum Kirchoff pada sistem ini didapat persamaan:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \dots \dots \dots \text{(III-30)}$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \dots \dots \dots \text{(III-31)}$$

Dengan mencari transformasi Laplace dari persamaan (III-30) dan (III-31) dengan menganggap syarat awal nol, diperoleh:



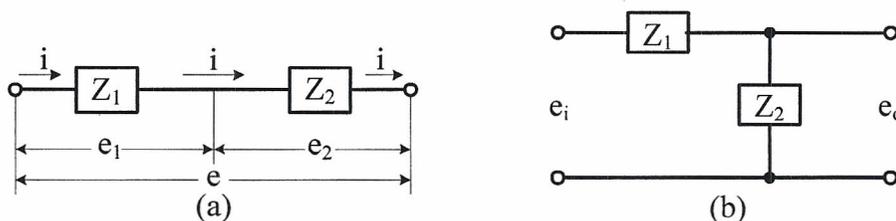
Gambar III. 15. Rangkaian listrik L-R-C.

Jika e_i dianggap sebagai masukan dan e_o sebagai keluaran, maka fungsi alih dari sistem ini adalah:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \dots \dots \dots \text{(III-32)}$$

d. Impedansi Kompleks

Dari Gambar III. 16. Z_1 dan Z_2 menyatakan impedansi kompleks Z dari suatu rangkaian 2 terminal adalah perbandingan antara $E(s)$, transformasi Laplace dari tegangan listrik pada terminal tersebut, dengan $I(s)$, transformasi Laplace dari arus listrik yang melalui elemen tersebut dengan anggapan bahwa semua syarat awal adalah nol, sehingga $Z(s) = E(s) / I(s)$.



Gambar III. 16. Rangkaian listrik impedansi.

Jika elemen 2 terminal tersebut adalah tahanan R , kapasitansi C , dan induktansi L , maka impedansi kompleks dari elemen tersebut masing-masing diberikan oleh R , $1/Cs$, dan Ls . Jika impedansi kompleks itu dihubungkan secara seri, maka impedansi totalnya sama dengan masing-masing impedansi kompleks tersebut. Untuk Gambar III. 16. (b). di atas, fungsi alih rangkaian tersebut adalah:

$$\frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{Z2(s)}{Z1(s) + Z2(s)} \dots\dots\dots (III-33)$$

Sedang sistem yang ditentukan Gambar III. 15. di muka adalah:

$$Z1 = Ls + R ; Z2 = 1/Cs$$

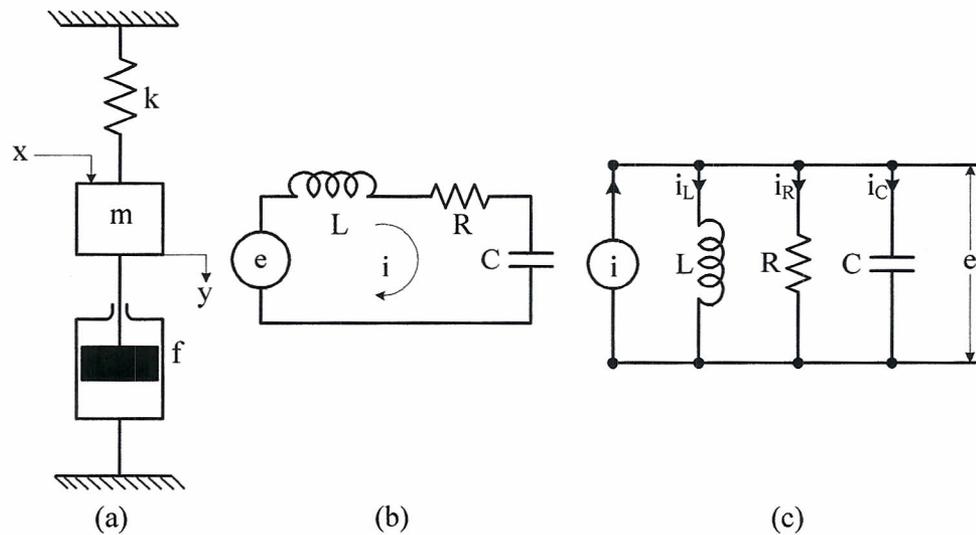
Oleh karena itu fungsi alih $\frac{Eo(s)}{Ei(s)}$ dapat ditulis sebagai:

$$\frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{1/Cs}{Ls + R + 1/Cs} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \dots\dots\dots (III-34)$$

e. Sistem Analogi Mekanik-Listrik

Dari sistem translasi mekanik sebagaimana telah dijelaskan di muka, yaitu sistem pegas-massa-dashpot dapat dianalogikan dengan sistem rangkaian listrik yang terdiri dari tiga komponen pasif L , R dan C . Ketiga komponen pasif tersebut dapat ditinjau dari besaran gaya (torsi) versus tegangan, yaitu L , R dan C dalam

seri dan ditinjau dari besaran gaya (torsi) versus arus, yaitu L, R dan C terpasang paralel. Untuk memudahkan pemahaman kita tentang sistem analogi ini perhatikan Gambar III. 17. berikut ini.



Gambar III. 17. Sistem mekanik (a), Sistem listrik seri (b), dan Sistem listrik paralel (c)

Dari gambar di atas dapat ditulis kembali bentuk persamaan diferensial masing-masing sistem sebagai berikut:

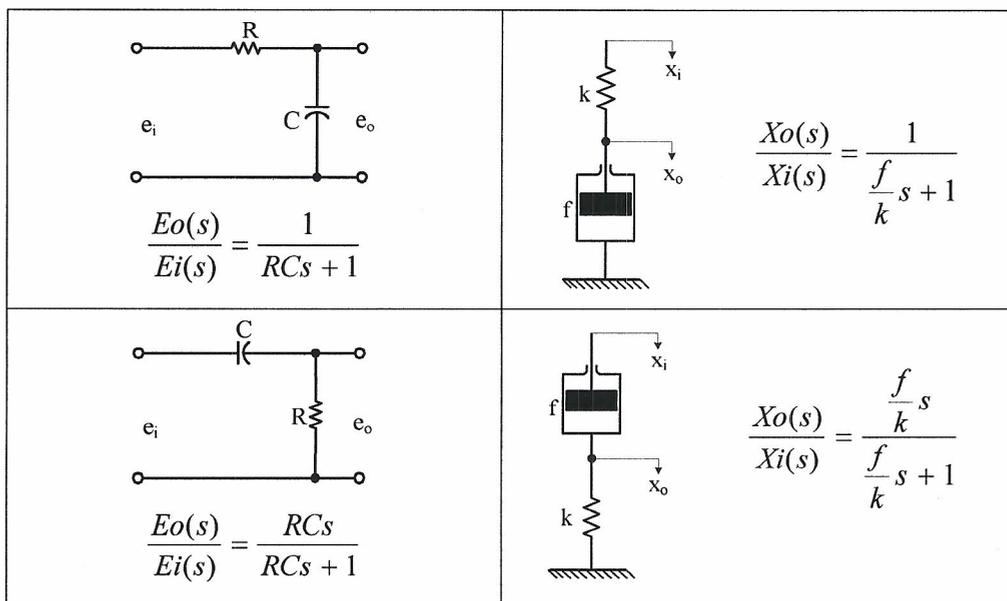
a) Sistem translasi mekanik: $m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = x \dots\dots\dots$ (III-35)

b) Sistem listrik seri: $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e \dots\dots\dots$ (III-36)

c) Sistem listrik paralel: $C \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \phi = i \dots\dots\dots$ (III-37)

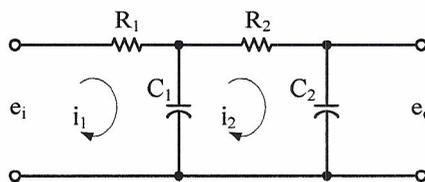
dimana: $\frac{d\phi}{dt} = e$ (ϕ = fluksi magnet paralel)

Secara khusus komponen pasif R dan C dapat diekivalensikan dengan sistem mekanik yang memiliki fungsi alih identik. Dalam hal ini adalah analogi gaya (torsi) versus tegangan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar III. 18.



Gambar III. 18. Sistem analogi beserta fungsi alihnya.

Di dalam menurunkan fungsi alih sistem fisik ke dalam sistem listrik terkadang komponen satu dengan lainnya saling membebani. Komponen RC bertingkat seperti ditunjukkan pada Gambar III. 19.



Gambar III.19. Rangkaian RC bertingkat.

Pada sistem listrik di atas keluaran tingkat pertama (R1, C1) diumpangkan ke masukan tingkat kedua (R2, C2). Dengan kata lain, tingkat kedua akan turut membebani tingkat pertama.

Persamaan untuk sistem tersebut di atas adalah:

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i \dots\dots\dots (III-38)$$

dan

$$\frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 = -e_o \dots\dots\dots (III-39)$$

Dengan mengeliminasi $I_1(s)$ dan $I_2(s)$ dari persamaan (III-38) dan (III-39), akan didapat fungsi alih antara $Eo(s)$ dan $Ei(s)$, yaitu:

$$\frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \dots\dots\dots (III-40)$$

$$\frac{1}{C_2 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) = -\frac{1}{C_2 s}(s) = -E_o(s) \dots\dots\dots (III-41)$$

Persamaan (III-38) dan (III-39), selanjutnya dicari transformasi Laplacenya dengan menganggap bahwa syarat awal sama dengan nol, didapat:

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} \dots\dots\dots (III-42) \end{aligned}$$

Jika $R_1 = R_2 = R$ dan $C_1 = C_2 = C$, maka persamaan (III-42) dapat pula diformulasikan sebagai:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1} \dots\dots\dots (III-43)$$

dimana $\tau = RC$.

Fungsi alih dari masing-masing rangkaian RC adalah $1/(1 + \tau s)$. Dari persamaan (III-42) tampak bahwa keseluruhan fungsi alih kedua rangkaian RC tidak sama dengan hasil kali antara $[1/(R_1 C_1 s + 1)]$ dengan $[1/(R_2 C_2 s + 1)]$, melainkan sebagai pengganti yaitu $1/(\tau^2 s^2 + 3\tau s + 1)$.

Alasannya adalah bahwa saat menurunkan fungsi alih rangkaian RC secara sendiri-sendiri dengan menganggap bahwa pada keluaran tidak dibebani. Dengan kata lain impedansi beban dianggap tak terhingga yang berarti tidak menyerap daya pada keluaran. Namun demikian, bila masukan rangkaian kedua dihubungkan dengan keluaran rangkaian pertama, maka ada sejumlah daya yang diserapnya. Oleh sebab itu, anggapan bahwa tidak ada pembebanan tidak dapat dipenuhi. Mengingat fungsi alih sistem di atas didapat dengan anggapan tidak ada pembebanan, maka fungsi alih tersebut tidak berlaku.

f. Sistem Termal

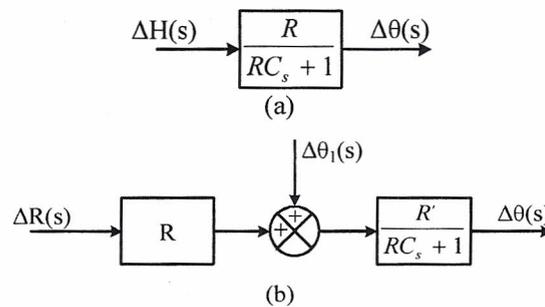
Apabila fungsi alih dari suatu sistem fisik telah dapat ditentukan atau ditetapkan, maka dapat diilustrasikan dengan diagram blok sederhana yang

menggambarkan hubungan antara masukan dan keluaran sistem yang ditinjau tersebut. Melalui visualisasi blok ini akan mempercepat dan mempermudah pengujian dan/atau penyelesaian persamaan-persamaan yang dimiliki sistem fisik tadi. Dengan demikian hubungan antar blok fungsi alih suatu sistem atau subsistem menjadi lebih sederhana dan mudah untuk diselesaikan dengan memakai persamaan sistem linear koefisien konstan.

Dari persamaan (III-23) yang menyatakan fungsi alih dari sistem termal sebagaimana ditunjukkan pada Gambar III. 11, adalah:

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta H(s)} = \frac{R}{RC_s + 1} \dots\dots\dots (III-44)$$

Diagram blok fungsi alih tersebut dapat ditunjukkan seperti pada Gambar III. 20. berikut ini:



Gambar III. 20. Diagram blok sistem termal

g. Fungsi Alih Gelombang Sinus

Fungsi alih respon tunak (steady state response) suatu sistem kendali dengan masukan sinusoida dapat ditentukan dengan cara mengganti s dengan $j\omega$. Fungsi alih dari aselerometer seperti ditunjukkan pada Gambar III. 5 misalnya, adalah didapat dari persamaan (III-2), yaitu:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ms^2}{Ms^2 + fs + K} = \frac{s^2}{s^2 + f/M.s + K/M}$$

Fungsi alih sinusoidal dari aselerometer mekanik tersebut dapat pula ditulis dalam bentuk lain yaitu:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + f/M(j\omega) + K/M} \dots\dots\dots (III-45)$$

persamaan (III-45) ini menyatakan karakteristik yang dimiliki aselerometer mekanik jika digunakan sebagai piranti pengukur pergeseran yang berubah-ubah menyerupai gelombang sinus. Bila frekuensi sinyal masukan gelombang sinus $X(j\omega)$ ini sangat rendah, katakanlah $\omega < \omega_n = \sqrt{(K/M)}$, maka fungsi alih yang ditulis pada persamaan (III-45) dapat didekati dengan persamaan:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \approx \frac{-\omega^2}{K/M}$$

Untuk frekuensi yang sangat rendah ($\omega < \omega_n$) akan menyebabkan sinyal keluaran yang rendah dan munculnya noise (desah) yang sulit dihilangkan dari sistem tersebut. Dengan demikian pengukuran pergerakan mekanik berfrekuensi rendah memakai aselerometer tidak lagi reliabel. Sebaliknya untuk frekuensi yang sangat tinggi ($\omega > \omega_n$), fungsi alih sebagaimana tertulis pada persamaan (III-45) dapat didekati dengan formula:

$$Y(j\omega)/X(j\omega) \approx 1$$

Jadi pada frekuensi yang sangat tinggi, keluaran aselerometer akan selalu mengikuti perubahan pergerakan masukannya. Pada rentang frekuensi seperti ini sistem aselerometer dapat digunakan untuk mengukur suatu gerakan bergelombang terutama pada seismografik.

Untuk percepatan suatu masukan berbentuk sinusoidal, fungsi alih respon tunak dari aselerometer ini dirumuskan sebagai:

$$\frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + f/M(j\omega) + K/M} \dots \dots \dots \text{(III-46)}$$

Selama kondisi $\omega < \omega_n = \sqrt{(K/M)}$ dapat bertahan, fungsi alih dari aselerometer dapat didekati dengan formula:

$$\frac{Y(j\omega)}{A(j\omega)} \approx \frac{M}{K}$$

Dari uraian di atas mudah difahami bahwa aselerometer cocok untuk mengukur percepatan suatu gerakan berbentuk gelombang sinus dari frekuensi nol (percepatan konstan) hingga frekuensi (ω_n) tertentu, tergantung pada spesifikasi jenis aselerometer yang digunakan.

h. Motor Servo

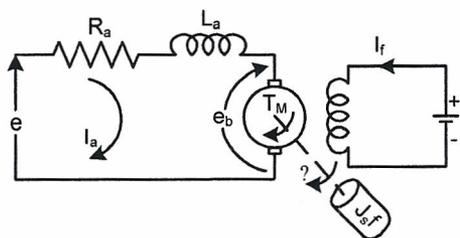
Di dalam pengendalian atau pengaturan sistem servo yang konstruksi dasarnya sama dengan motor dc, dibedakan dalam dua modus pengendalian. Perbedaan dimaksud adalah (1) modus pengendalian armature dengan arus medan tetap dan (2) pengendalian medan dengan arus armature tetap.

1) Pengendalian Armatur

Dalam aplikasi sistem servo, motor dc ini umumnya dioperasikan pada daerah kurva kemagnetan yang linear. Oleh sebab itu fluksi pada celah udara sebanding dengan arus medanya, dalam hal ini adalah:

$$\Phi = K_f i_f \dots\dots\dots (III-47)$$

Model pengendalian motor dc dengan armature terkendali ditunjukkan pada Gambar III. 21 berikut ini.



Gambar III.21. Motor dc dengan armatur terkendali

Pada sistem tersebut diketahui :

- Ra = tahanan armature (Ohm)
- La = induktansi kumparan arm. (H)
- ia = arus armature (A)
- if = arus kumparan medan (A)
- e = tegangan armature (V)
- eb = emf. lawan (V)
- Tm = torsi motor (N-m)
- \emptyset = sudut putar poros (rad)
- J = momen inersia motor dan beban (kg-m²)
- fo = koefisien gesekan viskos (ekivalen) poros motor dan beban (N-m)/(rad/sec)

Torsi yang dapat dikembangkan oleh motor (Tm) akan sebanding dengan hasil kali antara arus armatur dengan fluksi celah udara, dalam hal ini adalah:

$$T_M = K_1 K_f i_f i_a \dots\dots\dots (III-48)$$

dimana K₁ adalah suatu konstanta.

Pada motor dc armatur terkendali, arus medan selalu terjaga konstan, oleh karena itu persamaan (III-48) dapat ditulis:

$$T_M = K_T i_a \dots\dots\dots (III-49)$$

dimana K_T adalah konstanta dari torsi motor.

Perlu diingat pula bahwa emf lawan pada motor selalu sebanding dengan kecepatannya. Oleh sebab itu persamaanya dapat ditulis sebagai:

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \dots\dots\dots (III-50)$$

dimana K_b adalah konstanta emf lawan.

Persamaan diferensial dari rangkaian armaturnya adalah:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e \dots\dots\dots (III-51)$$

Persamaan untuk torsi adalah:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f_0 \frac{d\theta}{dt} = T_M = K_T i_a \dots\dots\dots (III-52)$$

Dengan mencari transformasi Laplace dari persamaan (III-51) dan (III-52) dengan menganggap syarat awal = 0, didapat:

$$E_b(s) = K_b s \theta(s) \dots\dots\dots (III-53)$$

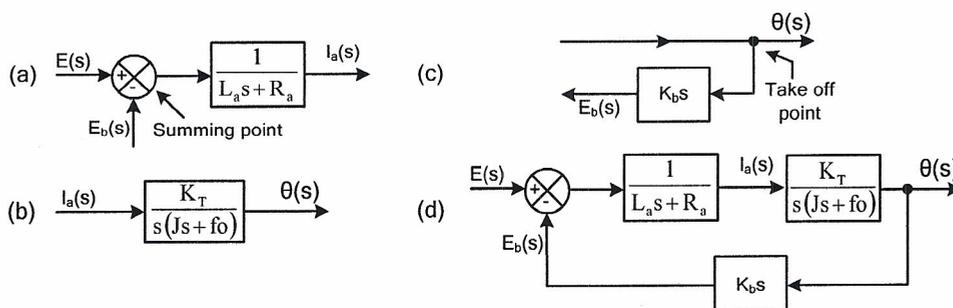
$$(L_a s + R_a) I_a(s) = E(s) - E_b(s) \dots\dots\dots (III-54)$$

$$(J s^2 + f_0 s) \theta(s) = T_M(s) = K_T I_a(s) \dots\dots\dots (III-55)$$

Dari persamaan (III-53) hingga persamaan (III-55), fungsi alih sistem servo tersebut dapat ditulis sebagai:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_T}{s[(R_a + sL_a)(Js + f_0) + K_T K_b]} \dots\dots\dots (III-56)$$

Diagram blok dari persamaan (III-58) dapat ditunjukkan melalui Gambar III.22a, dimana lingkaran blok menyatakan aksi perbedaan atau selisih yang disebut titik penjumlahan (summing point). Untuk persamaan (III-55) ditunjukkan melalui sebuah blok seperti pada Gambar III. 22b.



Gambar III.22. Diagram Blok motor dc armature terkendali

Persamaan (III-54) dapat dinyatakan dengan diagram blok seperti Gambar III. 22c, dimana sinyal dimulai dari suatu titik pemberangkatan (a take off point) dan diumpankan ke blok umpan balik. Gambar III. 22.d merupakan diagram blok lengkap dari sistem tersebut yang merupakan gabungan dari Gambar III. 22.a, b dan c.

Bagian-bagian dari diagram blok tersebut di atas dapat pula digambarkan secara langsung melalui sistem fisik sesuai Gambar III. 21, yaitu memakai fungsi alih yang diturunkan ke dalam rangkaian listrik sederhana. Besar tegangan rangkaian armaturnya adalah $E(s)$ dengan emf lawan $E_b(s)$. Tegangan jaringan ($E - E_b$) terjadi pada rangkaian linear berupa tahanan dan induktor yang terhubung secara seri serta mempunyai fungsi alih $1/(sL_a + R_a)$. Hasilnya berupa arus armature sebesar $I_a(s)$. Torsi yang dapat dikembangkan oleh motor pada arus medan yang konstan adalah $K_T I_a(s)$. Torsi ini akan memutar beban pada kecepatan $\theta(s)$ melawan momen inersia J dan gesekan viskos dengan koefisien f_0 [fungsi alihnya adalah $1/(Js + f_0)$]. Sinyal emf lawan $E_b = K_b \theta(s)$ diambil dari kecepatan dengan cara mengintegrasikan kecepatan $\theta(s)$, yaitu $1/s$. Hasil keseluruhan ditunjukkan pada Gambar III. 23 yang ekuivalen dengan Gambar III. 22 dengan menukar titik pemberangkatan dari $\theta'(s)$ ke $\theta(s)$.

Rangkaian induktansi armature L_a biasanya diabaikan, oleh karena itu fungsi alih dari motor dengan armature terkendali (persamaan III-56) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_T / R_a}{Js^2 + s(f_0 + K_T K_b / R_a)} \dots \dots \dots \text{(III-57)}$$

Faktor $(f_0 + K_T K_b / R_a)$ menyatakan bahwa emf lawan motor secara efektif akan memperbesar gesekan viskos dari sistem tersebut. Dalam hal ini adalah $f = f_0 + K_T K_b / R_a$, sehingga persamaan (III-57) akan berubah menjadi:

$$\frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_T / R_a}{s(Js + f)} \dots \dots \dots \text{(III-58)}$$

Selanjutnya fungsi alih yang dinyatakan pada persamaan (III-58) dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu:

$$\frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_m}{s(sT_m + 1)} \dots \dots \dots \text{(III-59)}$$

dimana : $K_m = K_T/R_a f =$ konstanta penguatan motor

$T_m = J/f =$ tetapan waktu motor.

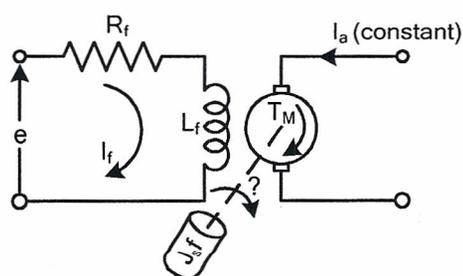
Konstanta motor K_T dan emf lawan K_b keduanya saling berhubungan erat. Kedua hubungan tersebut dapat dideduksikan seperti di bawah ini. Dalam satuan matriks, K_b dalam V/rad/sec dan K_T dalam N-m/amper.

- Daya listrik yang diubah dalam bentuk mekanik:
 $e_b i_a = K_b \theta i_a$ watt
- Daya pada poros (dalam bentuk mekanik):
 $T_\theta = K_T i_a \theta$ watt
- Pada saat kecepatan tunak dicapai, kedua daya besarnya seimbang. Dalam hal ini adalah:
 $K_b \theta i_a = K_T i_a \theta$ atau $K_b = K_T$ (dalam satuan MKS)

Hasil tersebut di atas di dalam prakteknya akan banyak memberikan keuntungan, sebagai misal besar K_b dapat diukur lebih mudah dengan ketelitian yang lebih tinggi bila disbanding K_T .

2) Pengendalian Medan

Motor dc dengan medan terkendali ditunjukkan pada Gambar III.23.



Gambar III. 23. Motor dc dengan medan terkendali

Pada sistem ini diketahui:

$R_f =$ tahanan kumparan medan (Ohm)

$L_f =$ induktansi kumparan medan (H)

$e =$ tegangan medan yang dikendalikan (V)

$i_f =$ arus medan (Amper)

$T_M =$ torsi yang dikembangkan motor (N-m)

$J =$ momen inersia ekivalen motor dan beban yang dikenakan pada poros (kg - m²)

f = koefisien gesekan viskos (ekivalen) dari motor dan beban yang dikenakan pada poros (N-m/rad/sec)

θ = sudut putar poros motor (rad)

Dalam pengendalian motor DC medan terkendali, arus armature diterima atau dicatu dari sumber arus tetap. Oleh karena itu berdasarkan persamaan (III-48), maka torsi motor akan identik yaitu:

$$T_M = K_I K_f i_a = K_T i_f \dots\dots\dots (III-60)$$

Dimana K_T adalah suatu konstanta.

Persamaan untuk rangkaian kumparan medannya adalah:

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e \dots\dots\dots (III-61)$$

Adapun persamaan torsinya dapat ditulis sebagai:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T_M = K_T i_f \dots\dots\dots (III-62)$$

Dengan mencari transformasi Laplace dari persamaan (III-61) dan (III-62) dengan menganggap syarat awal = 0, didapat:

$$(L_f s + R_f) I_f(s) = E(s) \dots\dots\dots (III-63)$$

$$(J s^2 + f s) \theta(s) = T_M(s) = K_T \cdot I_f(s) \dots\dots\dots (III-64)$$

Dari kedua persamaan diatas fungsi alih dari motor adalah:

$$\frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_T}{s(L_f s + R_f)(J s + f)} = \frac{K_m}{s(\tau_f s + 1)(\tau_{me} s + 1)} \dots\dots\dots (III-65)$$

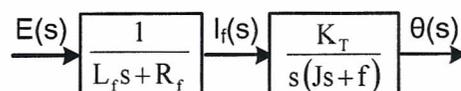
dimana :

$K_m = K_T/R_{af} =$ konstanta penguatan motor

$\tau_f = L_f/R_f =$ tetapan waktu dari rangkaian medan

$\tau_{me} = J/f =$ tetapan waktu mekanik

Diagram blok dari pengendalian motor dc dengan medan terkendali didapat dari persamaan (III-63) dan (III-64), sebagaimana ditunjukkan pada Gambar III.24.



Gambar III. 24. Diagram blok motor dc medan terkendali

Untuk motor dc medan terkendali ukuran kecil sangat menguntungkan, karena selain penguat daya servonya rendah juga arus armature yang dicatu dari sumber arus tetap tidak terlalu besar. Untuk pengendalian motor-motor berukuran besar akan lebih murah bila menerapkan skema armature terkendali. Selain itu pada armature terkendali ini, emf lawan akan memberi redaman tambahan yang ditimbulkan oleh gesekan beban.

4. Aljabar Diagram Blok

Sebagaimana telah dijelaskan di muka, bahwa hubungan antara karakteristik masukan-masukan dari suatu sistem linear atau elemen dari sistem linear dinyatakan oleh fungsi alihnya.

$$G(s) = C(s)/R(s)$$

Dimana $R(s)$ = transformasi laplace variable masukan

$C(s)$ = transformasi laplace variable keluaran

Karakteristik di atas lebih tepat bila disajikan dalam bentuk diagram blok sistem loop tertutup seperti ditunjukkan pada Gambar III.24.a. Keluaran $C(s)$ diumpan-balikkan ke titik penjumlahan untuk dibandingkan dengan masukan acuan $R(s)$. Keluaran blok, $C(s)$ diperoleh dengan mengalihkan fungsi alih $G(s)$ dengan blok masukan $E(s)$. Fungsi alih umpan balik $H(s)$ (lihat Gambar III.24.b), adalah berupa besaran keluaran yang harus diubah atau dimodifikasi kedalam suatu besaran yang sesuai dengan masukan acuan. Sinyal umpan balik yang diumpan-balikkan ke titik penjumlahan untuk dibandingkan dengan sinyal masukan tersebut adalah:

$$B(s) = H(s)C(s).$$

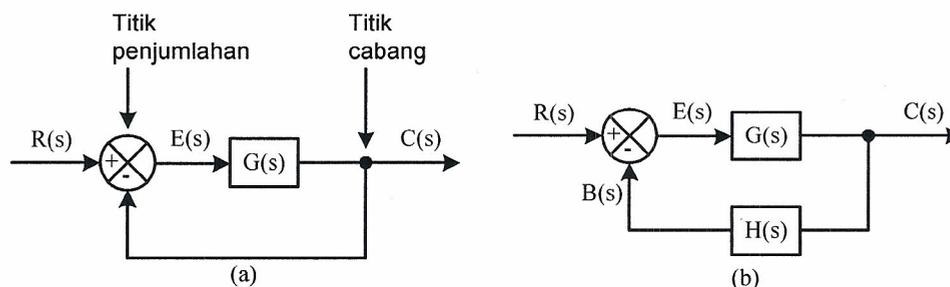
Dimana $B(s)$ = sinyal umpan balik

$H(s)$ = fungsi alih dari elemen umpan balik

$C(s)$ = sinyal keluaran

Perbandingan antara sinyal umpan balik $B(s)$ dengan sinyal kesalahan $E(s)$ disebut fungsi alih loop terbuka. Atau dapat pula ditulis:

$$\text{Fungsi loop terbuka} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$



Gambar III. 24. Diagram blok sistem loop tertutup (a) dan sinyal umpan balik pada sistem loop tertutup (b).

Adapun perbandingan antara sinyal keluaran $C(s)$ dengan sinyal kesalahan penggerak $E(s)$ disebut fungsi alih umpan maju. Atau dapat pula ditulis:

$$\text{Fungsi alih umpan maju} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Jika fungsi alih elemen umpan balik sama dengan satu, maka fungsi alih loop terbuka dan fungsi alih umpan maju juga sama dengan satu. Untuk sistem yang ditunjukkan pada Gambar III.24.b, keluaran $C(s)$ dan masukan $R(s)$ dapat direlasikan sebagai berikut:

$$C(s) = G(s) E(s) \dots\dots\dots (III-66)$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s) C(s) \dots\dots\dots (III-67) \end{aligned}$$

Eliminasi $E(s)$ dari persamaan (III-66) dan (III-67), akan memberikan:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s) [R(s) - H(s) C(s)] \\ &= G(s) R(s) - G(s)H(s)C(s) \end{aligned}$$

$$\text{atau } \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \dots\dots\dots (III-68)$$

Fungsi alih yang membandingkan sinyal keluaran $C(s)$ dengan sinyal masukan $R(s)$ disebut fungsi alih Loop tertutup. Fungsi alih ini merealisasikan dinamika sistem Loop tertutup dengan dinamika elemen umpan maju dan elemen umpan balik.

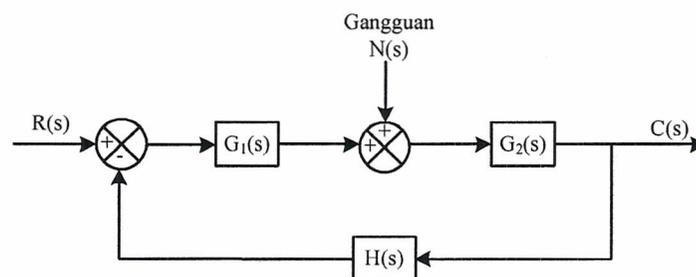
Dari persamaan (III-68), $C(s)$ didapat dari:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \dots\dots\dots (III-69)$$

Dari formulasi di atas jelas bahwa keluaran sistem loop tertutup bergantung pada fungsi alih loop tertutup dan sifat dari masukannya.

Jika pada sistem loop tertutup mengalami suatu gangguan, maka sistem tersebut memiliki dua masukan (masukan acuan dan gangguan). Di sini masing-masing masukan dapat diperhitungkan secara bebas terhadap yang lain, sedang keluaran lengkapnya diperoleh dengan menjumlahkan keluaran yang disebabkan oleh masing-masing masukan.

Gambar III. 25 menunjukkan suatu sistem loop tertutup yang mengalami suatu gangguan. Dalam menguji pengaruh gangguan $N(s)$, kita dapat menganggap bahwa sistem mula-mula dianggap diam dengan kesalahan nol.



Gambar III. 25. Sistem loop tertutup yang dikenai gangguan

Selanjutnya kita dapat menghitung respon $C_N(s)$ hanya terhadap gangguan. Respon ini dapat diperoleh dari:

$$\frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Respon terhadap penerapan serentak dari masukan acuan dan gangguan dapat diperoleh dengan menjumlahkan kedua respon tersebut. Dengan kata lain, respon $C(s)$ terhadap penerapan serentak dari masukan acuan $R(s)$ dan gangguan $N(s)$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_N(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + N(s)] \end{aligned}$$

Sekarang tinjau kasus untuk $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ dan $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$.

Pada kasus ini, fungsi alih loop tertutup $C_N(s)/N(s)$ mendekati nol, dan pengaruh gangguan ditekan. Ini merupakan keunggulan sistem loop tertutup. Sebaliknya,

Selengkapnya, dalam meninjau respon terhadap masukan acuan $R(s)$ kita dapat menganggap bahwa gangguan luar $N(s)$ adalah nol. Kemudian respon $C_R(s)$ terhadap masukan acuan $R(s)$ dapat diperoleh dari:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

fungsi alih loop tertutup $C_R(s)/R(s)$ mendekati $1/H(s)$ jika penguatan $G1(s)G2(s)H(s)$ bertambah besar. Ini berarti bahwa jika $|G1(s)G2(s)H(s)| \gg 1$, maka fungsi alih loop tertutup $C_R(s)/R(s)$ menjadi tidak tergantung pada $G1(s)$ dan $G2(s)$ dan menjadi berbanding terbalik dengan $H(s)$ sehingga variasi $G1(s)$ dan $G2(s)$ tidak mempengaruhi fungsi alih loop tertutup $C_R(s)/R(s)$. Ini merupakan keunggulan lain dari sistem loop tertutup. Dengan demikian jelas dapat dilihat bahwa pada setiap loop tertutup berumpan balik satu, $H(s) = 1$, cenderung menyamakan masukan keluaran.

a. Prosedur Penggambaran Diagram Blok

Untuk menggambarkan diagram blok suatu sistem, pertamakali tulis persamaan yang menggambarkan perilaku dinamik tiap komponen, kemudian ubahlah persamaan tadi ke dalam transformasi Laplace, dengan menganggap semua syarat awal nol, selanjutnya sajikan masing-masing persamaan transformasi Laplace ini dalam suatu blok. Akhirnya, rakit elemen-elemen tersebut menjadi suatu diagram blok lengkap.

Sebagai contoh, kita tinjau rangkaian listrik R-C sebagaimana ditunjukkan pada Gambar III.26.a. Persamaan untuk rangkaian tersebut adalah:

$$i = \frac{ei - eo}{R} = \frac{1}{R}(ei - eo) \dots\dots\dots (III-70)$$

$$eo = \frac{\int idt}{C} = \frac{1}{C} \int idt \dots\dots\dots (III-71)$$

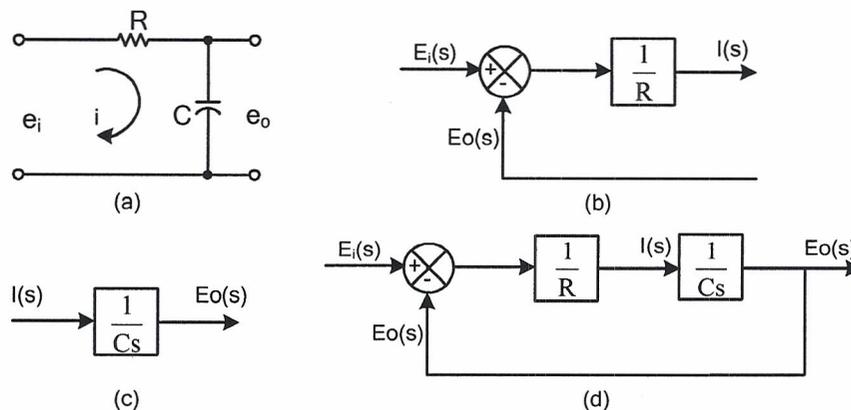
Transformasi Laplace dari persamaan (III-70) atau (III-71), dengan syarat awal nol, menjadi

$$I(s) = \frac{Ei(s) - Eo(s)}{R} \dots\dots\dots (III-72)$$

$$Eo(s) = \frac{I(s)}{Cs} \dots\dots\dots (III-73)$$

Persamaan (III-72) menyatakan operasi penjumlahan, sedangkan diagram bloknya ditunjukkan pada Gambar III.26.b. Persamaan (III-73) dapat dinyatakan dengan blok seperti ditunjukkan Gambar III-26.c. Dengan merakit dua elemen ini

didapat diagram blok keseluruhan dari sistem seperti ditunjukkan pada Gambar III.26.b.



Gambar III. 26. (a) Rangkaian listrik R-C, (b) Penyajian diagram blok dari pers. (III-72), (c) Penyajian diagram blok dari pers. (III-73), (d) Diagram blok lengkap rangkaian listrik R-C

b. Penyederhanaan Diagram Blok

Penting untuk diperhatikan bahwa blok-blok hanya dapat dihubungkan secara seri jika keluaran suatu blok tidak dipengaruhi oleh blok berikutnya, jika ada pengaruh pembebanan antara komponen-komponen ini, maka perlu menggabungkan komponen-komponen tadi menjadi satu blok. Sejumlah blok hubung seri dari komponen tanpa pembebanan, dapat diganti dengan satu blok, dengan fungsi alih sama dengan hasil kali masing-masing fungsi alih tiap komponen.

Diagram blok kompleks yang melibatkan beberapa loop berumpan balik dapat disederhanakan dengan penyusunan kembali selangkah demi selangkah, dengan menggunakan aturan aljabar diagram blok. Beberapa aturan penting dari aljabar ini ditunjukkan pada Tabel III-3. Tabel ini diperoleh dengan menulis persamaan yang sama tetapi dengan cara yang berbeda. Penyederhanaan diagram blok dengan cara penyusunan kembali dan substansi sangat meringankan tugas yang diperlukan untuk analisis matematik berikutnya. Di dalam menyederhanakan diagram blok ini, perlu diingat hal-hal berikut:

- Hasil kali fungsi alih pada arah umpan-maju harus tetap sama.
- Hasil kali fungsi alih pada pengelilingan loop harus tetap sama.

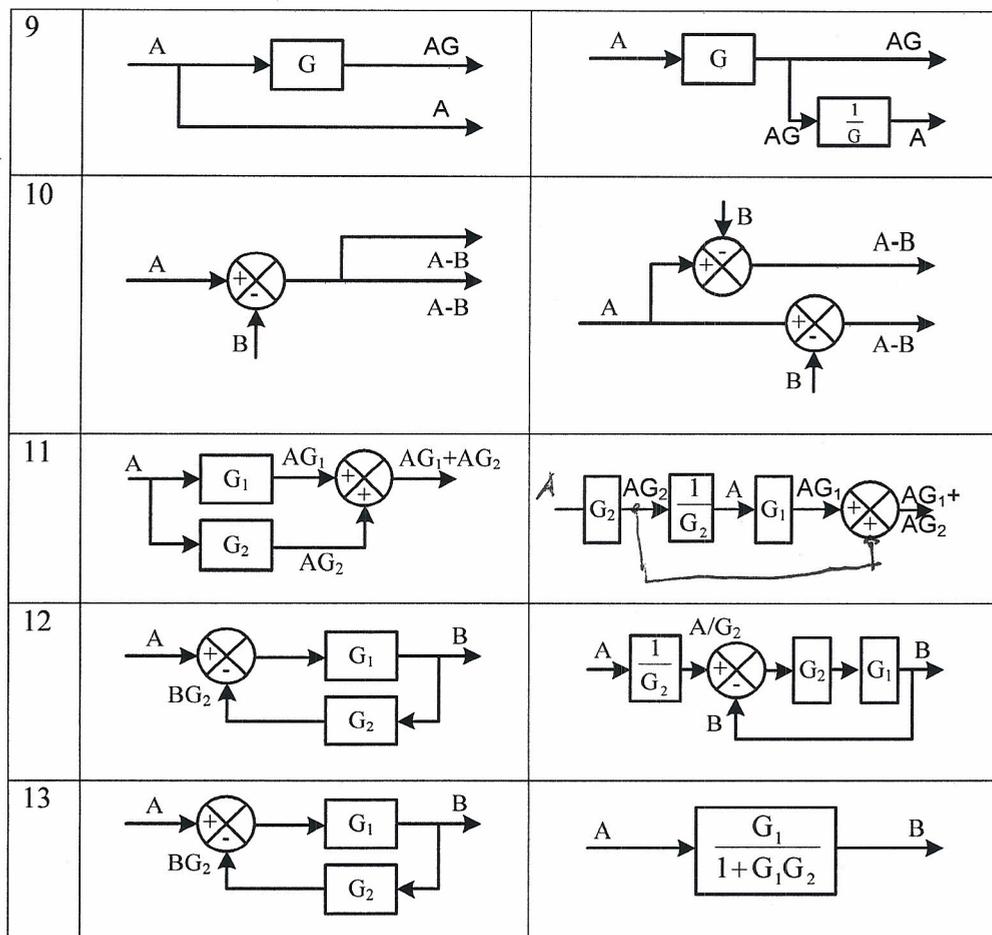
Suatu aturan umum untuk menyederhanakan diagram blok adalah memindah titik cabang dan titik penjumlahan, saling menukar titik penjumlahan dan kemudian menyederhanakan loop umpan-balik di dalamnya.

Tabel III-3. Aturan Aljabar Diagram Blok

No.	Diagram Blok Asal	Diagram Blok Pengganti
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

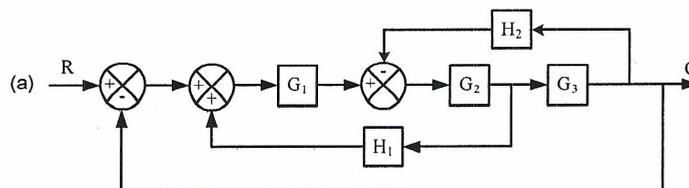
(bersambung)

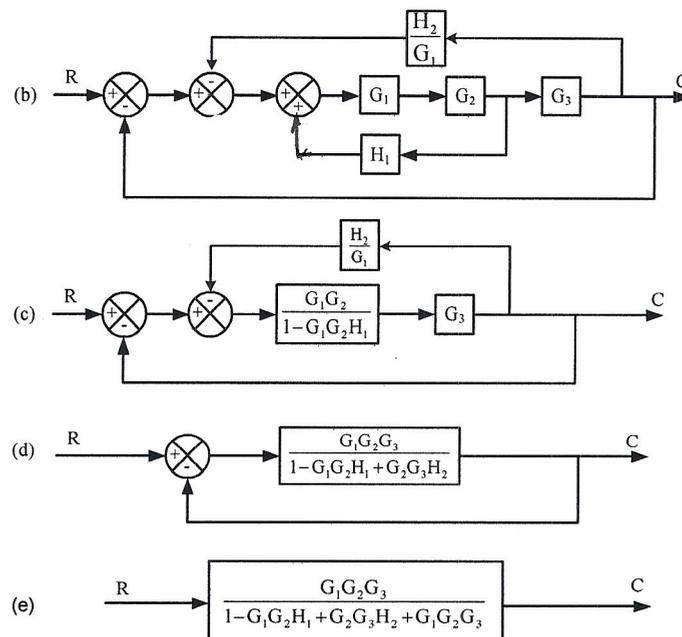
(sambungan)



Sebagai contoh penggunaan aturan Tabel III-3 di atas, ditunjukkan pada Gambar III. 27. Dengan memindahkan titik penjumlahan dari loop umpan-balik negative yang mengandung H_2 keluar loop umpan-balik positif yang mengandung H_1 , kita peroleh Gambar III. 27.b.

Dengan eliminasi loop umpan-balik positif, kita peroleh Gambar III. 27.c. Kemudian dengan eliminasi loop yang mengandung H_2/G_1 , kita peroleh Gambar III. 27.d. Akhirnya dengan eliminasi loop umpan-balik, kita peroleh Gambar III. 27.e.





Gambar III. 27. (a) Sistem Multi loop; (b) – (c) urutan penyederhanaan blok yang ditunjukkan pada (a).

Perlu diketahui bahwa pembilang dari fungsi alih loop tertutup $C(s)/R(s)$ adalah hasil kali fungsi alih dari lintasan umpan-maju. Penyebut dari $C(s)/R(s)$ adalah sama dengan $1 - \Sigma$ (hasil kali fungsi alih dari lintasan masing-masing). Dalam hal ini adalah:

$$\begin{aligned}
 &= 1 - (G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3) \\
 &= 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3
 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian di atas tampak bahwa loop umpan-balik positif menghasilkan suku negatif pada penyebut.

5. Grafik Aliran Sinyal

Diagram blok sangat berguna dalam menyajikan sistem kendali secara grafis. Meskipun demikian, untuk sistem yang sangat kompleks, proses penyederhanaan diagram blok memerlukan waktu yang cukup lama. Suatu pendekatan lain untuk mencari hubungan antar variable sistem kendali yang kompleks adalah pendekatan grafik aliran sinyal, yang dikembangkan oleh S.J. Mason.

a. Pengertian grafik aliran sinyal

Grafik aliran sinyal adalah suatu diagram yang menggambarkan seperangkat persamaan diferensial linear simultan.

Untuk menggunakan metode grafik aliran sinyal pada sistem kendali, pertamakali kita harus mentransformasi persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar dalam s (Laplace).

Grafik aliran sinyal terdiri dari suatu jaringan cabang-cabang berarah yang menghubungkan simpul-simpul. Tiap simpul menyatakan suatu variable sistem, dan tiap cabang yang menghubungkan dua buah simpul berfungsi sebagai pengali sinyal. Perhatikan bahwa sinyal mengalir hanya pada satu arah. Arah aliran sinyal ditunjukkan dengan anak panah yang ditempatkan pada cabang tersebut. Grafik aliran sinyal menggambarkan aliran sinyal dari suatu titik pada sistem ke titik yang lain dan memberikan hubungan antara sinyal-sinyal tersebut.

Seperti yang mungkin diharapkan, grafik aliran sinyal pada dasarnya mengandung informasi yang sama seperti halnya diagram blok. Keunggulan penggunaan grafik aliran sinyal dalam menggambarkan suatu sistem kendali adalah adanya rumus penguatan, yang disebut rumus penguatan Mason, yang memberikan hubungan antar variabel sistem tanpa memerlukan penyederhanaan grafik.

b. Definisi

Sebelum kita bahas grafik aliran sinyal, kita harus mendefinisikan beberapa istilah tertentu.

Simpul adalah suatu titik yang menyatakan suatu variabel atau sinyal.

Transmitansi adalah penguatan antara dua buah simpul.

Cabang adalah segmen garis berarah yang menghubungkan dua buah simpul. Penguatan suatu cabang adalah transmitansi.

Simpul masukan atau sumber adalah simpul yang hanya mempunyai cabang berarah ke luar. Simpul ini melambangkan variabel bebas.

Simpul keluaran atau sink adalah simpul yang hanya mempunyai cabang berarah masuk. Simpul ini melambangkan variabel yang bergantung.

Simpul campur adalah simpul yang mempunyai baik cabang berarah masuk maupun keluar.

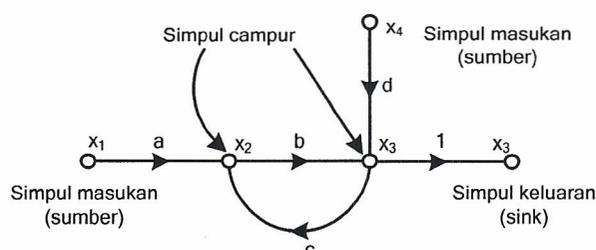
Lintasan adalah jalan yang dilewati oleh cabang-cabang yang berhubungan, pada arah yang ditunjukkan oleh anak panah cabang. Jika tidak ada simpul yang dilewati lebih dari sekali, maka lintasan tersebut adalah terbuka. Jika ujung lintasan mempunyai simpul yang sama dengan pangkal lintasan dan lintasan tidak melewati simpul lain lebih dari sekali, maka bukan merupakan lintasan terbuka atau tertutup.

Loop adalah lintasan tertutup.

Penguatan loop adalah hasil kali transmitansi-transmitansi cabang pada loop tersebut. Loop-loop disebut tidak berentuhan jika tidak mempunyai simpul bersama.

Lintasan maju adalah lintasan dari simpul masukan (sumber) ke simpul keluaran (sink) yang melewati setiap simpul hanya sekali.

Penguatan lintasan maju adalah hasil kali transmitansi-transmitansi cabang lintasan maju.



Gambar III. 28. Contoh grafik aliran sinyal sebuah sistem kendali

c. Sifat-sifat grafik aliran sinyal.

Beberapa sifat penting grafik aliran sinyal adalah sebagai berikut:

- (1) Cabang menunjukkan ketergantungan fungsional suatu sinyal terhadap yang lain. Sinyal hanya lewat pada arah yang ditentukan oleh anak panah cabang.
- (2) Simpul menjumlah sinyal dari semua cabang masuk dan mentransmisi hasil penjumlahan ini ke seluruh cabang keluar.

- (3) Simpul campur, yang mempunyai baik cabang masuk maupun cabang ke luar, dapat dianggap sebagai simpul keluaran (sink) dengan menambah suatu cabang ke luar yang mempunyai transmitansi satu (lihat Gambar III.29). Perhatikan bahwa cabang transmitansi satu diarahkan dari X_3 ke simpul yang lain, juga dinyatakan dengan X_3 . meskipun demikian, perhatikan bahwa kita tidak dapat mengubah suatu simpul campur menjadi suatu sumber dengan metode ini.
- (4) Untuk setiap sistem, grafik aliran sinyalnya adalah tidak unik. Beberapa grafik aliran sinyal yang berbeda dapat digambarkan untuk suatu sistem dengan menuliskan persamaan-persamaan sistem dengan cara yang berlainan.

d. Aljabar grafik aliran sinyal

Grafik aliran sinyal suatu sistem linear dapat digambar dengan menggunakan definisi-definisi yang sudah diberikan sebelumnya. Dalam mengerjakannya, biasanya kita letakkan simpul masukan (sumber) di sebelah kiri dan simpul keluaran (sink) di sebelah kanan. Variabel bebas dan bergantung dari persamaan, masing-masing menjadi simpul masukan (sumber) dan simpul keluaran (sink). Transmitansi cabang dapat diperoleh dari koefisien-koefisien persamaan.

Untuk menentukan hubungan masukan-keluaran, kita dapat menggunakan rumus Mason, yang akan diberikan kemudian, atau kita dapat menyederhanakan grafik aliran sinyal menjadi suatu grafik yang hanya terdiri dari simpul masukan dan keluaran. Untuk menyelesaikannya, kita gunakan aturan berikut:

- (1) Harga suatu simpul yang mempunyai satu cabang masuk, seperti ditunjukkan pada Gambar III.29.a, adalah $x_2 = ax_1$.
- (2) Transmitansi total cabang-cabang yang digandeng (dihubung seri) sama dengan hasil kali semua transmitansi cabang. Jadi cabang-cabang gandengan dapat digabung menjadi satu cabang dengan jalan mengalikan transmitansi-transmitansinya, seperti ditunjukkan pada Gambar III.29.b.
- (3) Cabang-cabang parallel dapat digabungkan menjadi satu cabang dengan jalan menjumlahkan transmitansi-transmitansinya, seperti ditunjukkan pada III.29.c.

(4) Suatu Simpul campur dapat dihilangkan seperti ditunjukkan pada Gambar III.29.d.

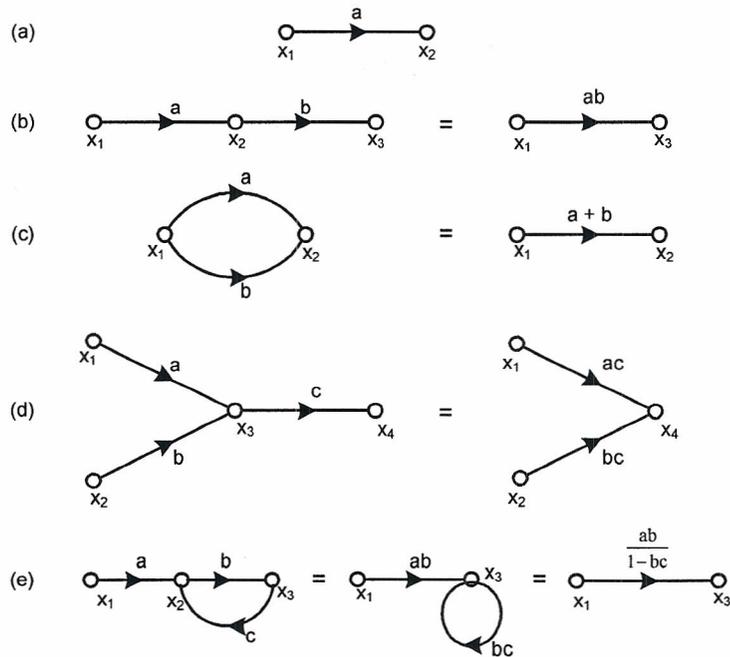
(5) Suatu Loop dapat dihilangkan seperti ditunjukkan pada Gambar III.29.e.

Perhatikan bahwa : $x_3 = bx_2, x_2 = ax_1 + cx_3$

Oleh karenanya : $x_3 = abx_1 + bcx_3 \dots\dots\dots$ (III-74)

atau $x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1 \dots\dots\dots$ (III-75)

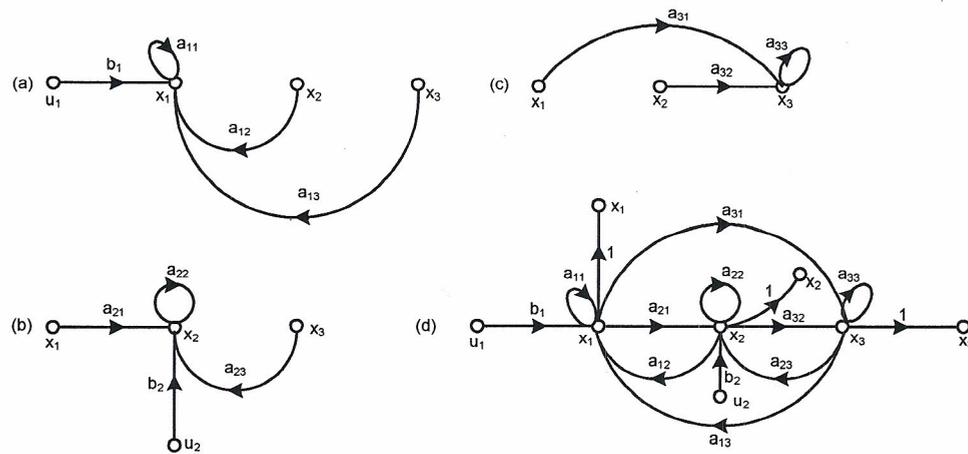
Persamaan (III-74) berkaitan dengan diagram yang mempunyai sebuah loop diri dengan transmitansi bc . Eliminasi loop diri menghasilkan persamaan (III-75), yang secara jelas menunjukkan bahwa transmitansi keseluruhan adalah $ab/(1 - bc)$.



Gambar III. 29. Grafik aliran sinyal dan penyederhanaannya.

e. Penyajian grafik aliran sinyal sistem linear

Grafik aliran sinyal secara luas digunakan dalam analisis sistem linear. Di sini grafik dapat digambar dari persamaan sistem atau dapat digambar dari pengamatan sistem fisik. Penyederhanaan biasa dengan menggunakan aturan-aturan di depan memberikan hubungan antara variabel masukan dan keluaran.



Gambar III. 30. Grafik aliran sinyal

Perhatikan sistem yang didefinisikan oleh beberapa persamaan berikut:
dari Gb. III.30.d)

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \dots \dots \dots \text{(III-76)}$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \dots \dots \dots \text{(III-77)}$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \dots \dots \dots \text{(III-78)}$$

u_1 dan u_2 adalah variabel-variabel masukan; x_1 , x_2 , dan x_3 adalah variabel-variabel keluaran. Grafik aliran sinyal sistem ini, yakni penyajian grafis tiga persamaan simultan yang menunjukkan ketergantungan antar variabel, dapat diperoleh sebagai berikut. Pertama tempatkan x_1 , x_2 , dan x_3 , seperti ditunjukkan pada Gambar III 30 (a). perhatikan bahwa a adalah transmitansi antara x_1 dan x_1 . Persamaan (III.76) menyatakan bahwa x_1 sama dengan jumlah empat sinyal $a_{11}x_1$, $a_{12}x_2$, $a_{13}x_3$, dan b_1u_1 . Grafik aliran sinyal yang menggambarkan persamaan (III.76) ditunjukkan pada Gambar III.30(a). persamaan $a_{21}x_1$, $a_{22}x_2$, dan b_2u_2 . grafik aliran sinyalnya ditunjukkan pada Gambar III.30(b). grafik aliran sinyal yang melambangkan persamaan (III.78) ditunjukkan pada Gambar III.30(c).

Grafik aliran sinyal yang menggambarkan persamaan (III.76), (III.77). dan (III.78) selanjutnya diperoleh dengan menggabungkan Gambar III.30(a), (b), dan (c). akhirnya diagram aliran sinyal lengkap untuk persamaan simultan tersebut di atas ditunjukkan pada Gambar III.30(d).

f. Grafik aliran sinyal sistem kendali

Beberapa grafik aliran sinyal sistem kendali yang sederhana ditunjukkan pada Gambar III. 31. Untuk grafik sederhana itu, fungsi alih lup tertutup ($C(s)/R(s)$ atau $C(s)/N(s)$) dapat diperoleh secara mudah dengan pengamatan. Untuk grafik aliran sinyal yang lebih kompleks, rumus penguatan Mason cukup berguna.

g. Rumus penguatan Mason untuk grafik aliran sinyal

Dalam beberapa kasus praktis, kita ingin menentukan hubungan antara variable masukan dan variabel keluaran adalah penguatan keseluruhan, atau transmitansi keseluruhan antara dua buah simpul ini.

Rumus penguatan Mason, yang dapat digunakan untuk menentukan penguatan keseluruhan, diberikan oleh:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

dimana

P_k = penguatan atau transmitansi lintasan maju ke k

Δ = determinan grafik

= $1 - (\text{jumlah semua penguatan lup yang berbeda}) + (\text{jumlah hasil kali penguatan dari semua kombinasi yang mungkin dari dua lup yang tidak bersentuhan}) - (\text{jumlah hasil kali penguatan dari semua kombinasi yang mungkin dari tiga lup yang tidak bersentuhan}) + \dots$

$$1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum L_a$ = jumlah dari semua penguatan lup yang berbeda

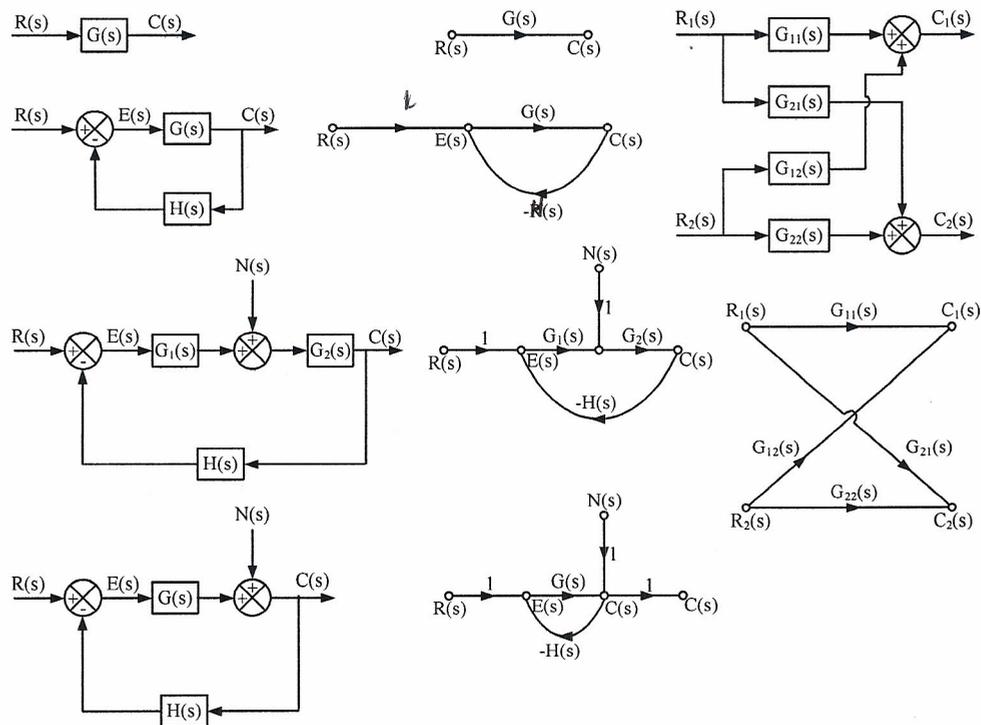
$\sum L_b L_c$ = jumlah hasil kali penguatan dari semua kombinasi yang mungkin dari dua lup yang tidak bersentuhan.

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = jumlah hasil kali-penguatan dari semua kombinasi yang mungkin dari tiga lup yang tak bersentuhan.

Δ_k = kofaktor dari determinan lintasan maju ke k dengan menghilangkan lup-lup yang menyentuh lintasan maju ke k.

Perhatikan bahwa penjumlahan dilakukan dengan mengambil seluruh lintasan yang mungkin, dari masukan hingga keluaran.

Berikut ini akan menjelaskan penggunaan rumus penguatan Mason dengan diberikan dua buah contoh. Gambar III.30.(a) Grafik aliran sinyal yang menggambarkan persamaan (III.76); (b) Grafik aliran sinyal yang menggambarkan persamaan (III.77); (c) Grafik aliran sinyal yang menggambarkan persamaan (III.78); Grafik aliran sinyal lengkap untuk sistem yang dinyatakan oleh persamaan (III.76), (III.77), dan (III.78).



Gambar III. 31. Diagram blok dan diagram aliran sinyalnya.

Pada sistem ini hanya ada satu lintasan maju antara masukan $R(s)$ dan keluaran $C(s)$. Penguatan lintasan maju tersebut adalah: $P_1 = G_1 G_2 G_3$.

Dari Gambar III.33, kita lihat bahwa terdapat tiga loop individual. Penguatan loop-loop ini adalah:

$$L_1 = G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = - G_2 G_3 H_2$$

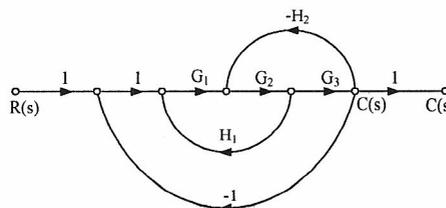
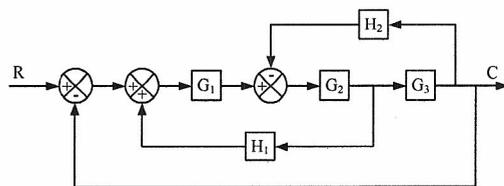
$$L_3 = - G_1 G_2 G_3$$

Perhatikan bahwa karena semua loop mempunyai cabang bersama, maka tidak ada loop yang tidak bersentuhan. Sehingga determinan diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) \\ &= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3\end{aligned}$$

Kofaktor Δ_1 dari determinan sepanjang lintasan maju yang menghubungkan simpul masukan dan simpul keluaran diperoleh dengan menghilangkan loop-loop yang menyentuh lintasan ini. Karena lintasan P_1 menyentuh semua loop, maka kita peroleh $\Delta_1 = 1$. Dengan demikian, penguatan keseluruhan antara masukan $R(s)$ dan keluaran $C(s)$, atau yang diperoleh dari Gambar III. 33 dan Gambar III. 32 memberikan hasil yang sama, yakni:

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} \\ &= \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}\end{aligned}$$



Gambar III. 32. Sistem multi loop

Gambar III. 33. Grafik aliran sinyal untuk Gb. III. 32.

Contoh 4-5. Perhatikan sistem yang ditunjukkan pada Gambar III. 34. Cari fungsi alih loop tertutup $C(s)/R(s)$ dengan menggunakan rumus penguatan Mason.

Pada sistem ini terdapat tiga lintasan maju antara masukan $R(s)$ dan keluaran $C(s)$. penguatan lintasan maju tersebut adalah:

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5; P_2 = G_1G_6G_4G_5; P_3 = G_1G_2G_7$$

Pada sistem ini terdapat empat loop individual, penguatan loop-loop ini adalah:

$$L_1 = -G_4H_1; L_2 = -G_2G_7H_2; L_3 = -G_6G_4G_5H_2 \text{ dan } L_4 = G_2G_3G_4G_5H_2$$

Loop L_1 tidak menyentuk loop L_2 (loop L_1 menyentuk loop L_3 , dan loop L_2 menyentuk loop L_3).

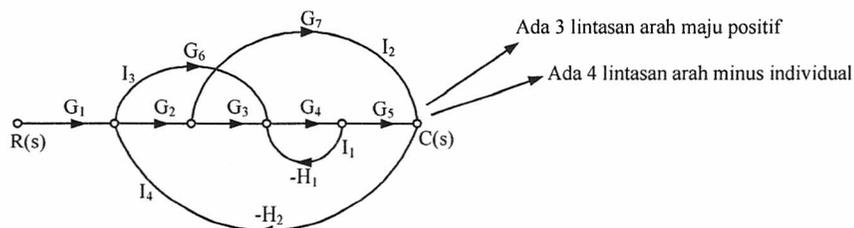
Sehingga determinan Δ diberikan oleh

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2 \quad (\text{III-79})$$

Kofaktor Δ_1 diperoleh dari dengan menghilangkan loop-loop yang menyentuk P_1 , sehingga, dengan menghilangkan L_1, L_2, L_3, L_4 dan $L_1 L_2$ dari persamaan (III-79), kita peroleh $\Delta_1 = 1$. dengan cara yang sama, kofaktor Δ_2 adalah $\Delta_2 = 1$. kofaktor Δ_3 diperoleh dengan menghilangkan L_1, L_2, L_3, L_4 dan $L_1 L_2$ dari persamaan (III-79), yang menghasilkan $\Delta_3 = 1 - L_1$.

Selanjutnya fungsi alih loop tertutup $C(s)/R(s)$ adalah:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = P &= \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2} \end{aligned}$$

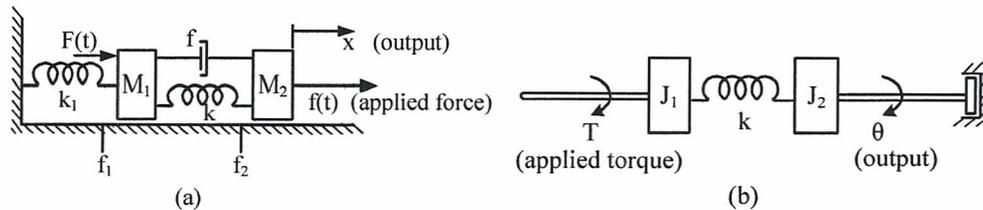


Gambar III. 34. Grafik aliran sinyal suatu sistem

Penerapan grafik aliran sinyal biasanya adalah pada penggambaran diagram sistem. Seperangkat persamaan yang menggambarkan sistem linear dinyatakan oleh grafik aliran sinyal dengan menetapkan simpul yang menyatakan variable sistem dan saling menghubungkan simpul-simpul tersebut dengan transmitansiberbobot danberarah, yang menyatakan hubungan antar variable. Rumus penguatan Mason dapat digunakan untuk menentukan hubungan antara suatu masukan dan suatu keluaran. Sebagai kemungkinan lain, variabel-variabel dalam system dapat dieliminasi satu demi satu dengan teknik penyederhanaan. Rumus penguatan Mason sangat berguna terutama dalam menyederhanakan diagram system yang besar dan kompleks dalam satu langkah, tanpa memerlukan penyederhanaan selangkah demi selangkah.

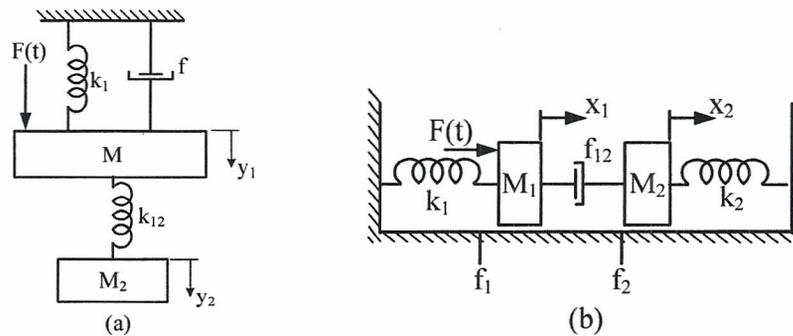
Soal-soal Latihan

- Carilah fungsi alih dari sistem mekanik sebagaimana ditunjukkan pada Gambar s.III.1 berikut ini.



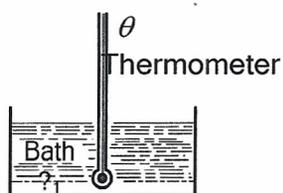
Gambar S. III. 1

- Tulis persamaan diferensial system mekanik sebagaimana ditunjukkan pada Gambar s.III.2a. Juga carilah analogi rangkaian listrik yang mendasarkan pada analogi gaya-tegangan.



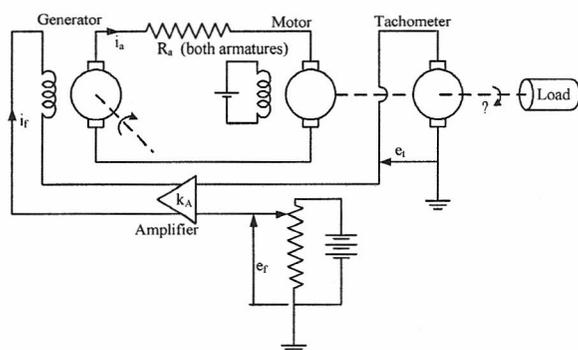
Gambar S. III. 2. (a) dan (b)

- dari Gambar s.III.2b. di atas lakukanlah analisis seperti pada nomor 2, hanya saja disini mendasarkan pada analogi gaya-arus.
- Gambar s.III.3 menunjukkan sebuah thermometer yang dimasukkan ke dalam bak mandi berisi air dengan temperature Θ_i . Carilah fungsi alih $\Theta(s)/\Theta_i(s)$ dari thermometer beserta analogi listriknya. Disini thermometer dianggap memiliki kapasitansi panas sebesar C yang menyimpan panas dengan tahanan sebesar R . Berapakah besar temperatur yang ditunjukkan oleh thermometer pada saat dimasukkan ke dalam bak-air tersebut.



Gambar S. III. 3

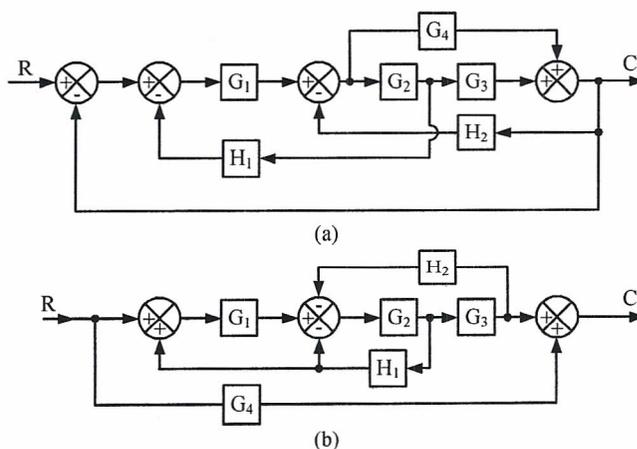
5. Pada pengendalian kecepatan putaran seperti pada Gambar s.III.4. konstanta dari medan generator diabaikan. Pada putaran yang konstan generator menghasilkan tegangan $K_g V/\text{amp}$ medan. Motor penguat terpisah memberikan emf sebesar $K_b/\text{rad}/\text{sec}$ dan torsi yang dihasilkannya sebesar $K_T N\text{-m}/\text{amp}$. Momen inersia bersama antara motor dan beban adalah $J \text{kg-m}^2$, sementara faktor gesekan yang terjadi diabaikan. Konstanta tachometer = $K_t \text{ Volt}/\text{rad}/\text{sec}$. dan elemen penguatannya $K_A \text{ amp}/\text{Volt}$. Gambarlah diagram blok sistem tersebut dan carilah fungsi alih $\omega(s)/E_i(s)$, dimana ω adalah kecepatan putar beban. Pada saat motor benar-benar diam, tiba-tiba tegangan e_i sebesar 100 Volt dikenakan pada system tersebut, tentukan perubahan kecepatan putar beban yang sebenarnya jika diketahui :



- $J = 6 \text{ kg-m}^2$
- $K_g = 50 \text{ V}/\text{Amp}$.
- $K_t = 0,2 \text{ V}/\text{rad}/\text{sec}$.
- $K_A = 4 \text{ Amp}/\text{V}$
- $K_B = 4 \text{ V}/\text{rad}/\text{sec}$.
- $K_T = 1,5 \text{ N-m}/\text{amp}$
- $R_a = 1 \text{ Ohm}$

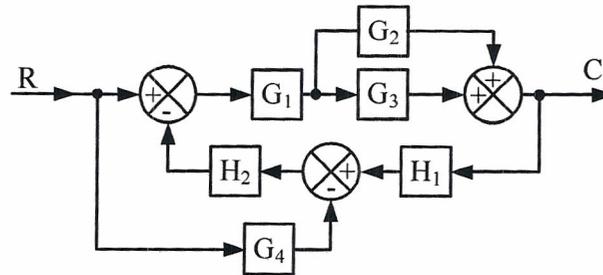
Gambar S. III. 4.

6. Dengan menggunakan diagram blok reduksi, carilah fungsi alih sistem loop tertutup seperti ditunjukkan pada gambar S.III.5.



Gambar S. III. 5.

7. Evaluasi dan gambarlah grafik aliran sinyal dari system loop tertutup yang diagram bloknnya ditunjukkan pada Gambar S.III.6.



Gambar S. III. 6.