

## BAB V

### ANALISIS RESPON WAKTU (TRANSIENT)

#### 1. Pengantar

Dalam prakteknya sinyal masukan sistem kendali umumnya tidak diketahui sebelumnya (bersifat random), sehingga masukan sesaat sulit untuk dianalisis. Di dalam menganalisis maupun merencanakan sistem kendali harus ada satu dasar perbandingan performansi dari berbagai sistem kendali. Dasar ini dapat disusun dengan menetapkan sinyal uji tertentu dan membandingkan respon yang terjadi terhadap sinyal-sinyal masukannya.

Sinyal masukan uji (test input signals) yang sering digunakan adalah fungsi tangga, fungsi ramp, fungsi sinusoidal, fungsi percepatan, fungsi impuls, dan sebagainya. Penggunaan sinyal uji ini dapat dibenarkan, karena terdapat korelasi antara karakteristik sistem terhadap sinyal masukan uji tersebut. Dari berbagai sinyal uji yang dijelaskan diatas dapat dilakukan analisis dengan mudah, karena sinyal-sinyal tersebut merupakan fungsi waktu yang sangat sederhana. Respon waktu sistem kendali terdiri dari respon "transien" dan "steady state". Respon transient adalah respon sistem yang berlangsung dari keadaan awal sampai keadaan akhir, sedang respon steady state adalah kondisi keluaran sesudah habis respon transien hingga waktu relatif tak terhingga.

Karakteristik (perilaku dinamik) keluaran sistem kendali yang paling penting adalah kestabilan mutlak, yang menandai sistem tersebut stabil ataukah tidak stabil. Sistem kendali berada dalam kesetimbangan atau keluaran berada dalam keadaan yang tetap, jika tanpa adanya gangguan atau masukan baru. Sistem kendali dengan parameter konstan akan berubah menjadi tidak stabil, bila keluaran sistem berosilasi secara menerus atau membesar tanpa batas dari kondisi setimbangnya manakala dikenai suatu gangguan. Dengan demikian pemakaian analisis persamaan diferensial linear menjadi tidak berlaku.

Karakteristik selain kestabilan mutlak yang perlu diketahui yaitu kestabilan relatif dan kestabilan tunak ( steady state ). Respon transien sistem kendali sering menunjukkan osilasi teredam sebelum mencapai kondisi steady

state. Jika keluaran steady state sistem tidak sama dengan masukannya maka sistem tersebut mempunyai kesalahan kondisi steady state. Kesalahan inilah yang merupakan tolok ukur ketelitian suatu sistem.

## 2. Sinyal-sinyal Uji Standar

- a. Sinyal Step. Step adalah sinyal yang nilainya berubah dari satu level (biasanya nol) ke level yang lain (A) dalam waktu yang sama (zerotime). [Lihat Gambar V.1.a.]. secara matematik fungsi stepnya dapat dinyatakan sebagai:

$$r(t) = Au(t) \text{ dimana } u(t) \begin{cases} = 1, \text{ bila } t > 0 \\ = 0, \text{ bila } t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (V-1)$$

Transformasi Laplacanya dapat ditulis :

$$R(s) = \frac{A}{s}$$

- b. Sinyal Ramp. Ramp adalah sinyal yang nilai startnya nol dan bertambah besar secara linier bersama waktunya. [Lihat Gambar V.1.b.]. Secara matematik dapat ditulis :

$$r(t) = \begin{cases} At, \text{ bila } t > 0 \\ = 0, \text{ bila } t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (V-2)$$

Transformasi Laplacanya dapat ditulis :

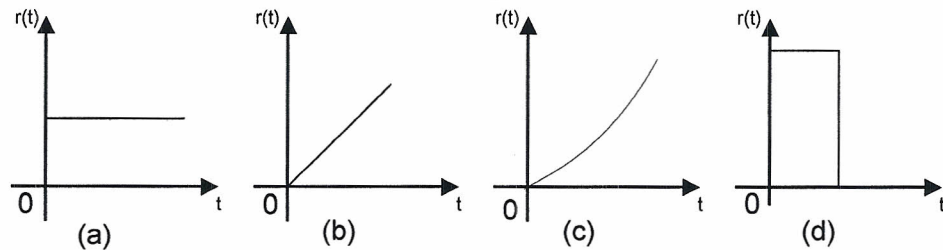
$$R(s) = \frac{A}{s^2}$$

- c. Sinyal Parabolik. Gambar V.1.c. sinyal uji berupa parabolik. Secara matematik sinyal tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$r(t) = \begin{cases} \frac{At^2}{2}, \text{ bila } t > 0 \\ = 0, \text{ bila } t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (V-3)$$

Transformasi Laplacennya dapat ditulis :

$$R(s) = \frac{A}{s^3}$$



**Gambar V.1. Sinyal-sinyal uji standar (a) Step, (b) Ramp, (c) Parabolik, (d) Impulsa**

- d. Sinyal Impulsa. Sinyal Impulsa didefinisikan sebagai sinyal yang memiliki nilai nol pada saat  $t = 0$  dan tak terhingga amplitudonya. Hal ini lazim disebut fungsi  $\delta$  yang memiliki formula khusus yakni :

$$\delta(t) = 0, \text{ bila } t \neq 0$$

$$\text{atau } \int_{-\Sigma}^{+\Sigma} \delta(t) dt = 1, \text{ dimana } \Sigma \text{ dominan bernilai nol}$$

Mengingat didalam praktiknya sebuah impulsa yang sempurna tidak pernah dicapai, hal ini biasanya didekati oleh sebuah pulsa dengan kelebaran relatif kecil tapi memiliki luasan tertentu (lihat Gambar .V.1.d.).

Fungsi impulsa yang merupakan derivatif sebuah fungsi step, secara matematik dapat ditulis :

$$\delta(t) = u'(t)$$

Transformasi Laplace dari impulsa ini adalah :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 = R(s)$$

Response impulsa dari suatu sistem dengan fungsi alih  $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$ , diberikan oleh:

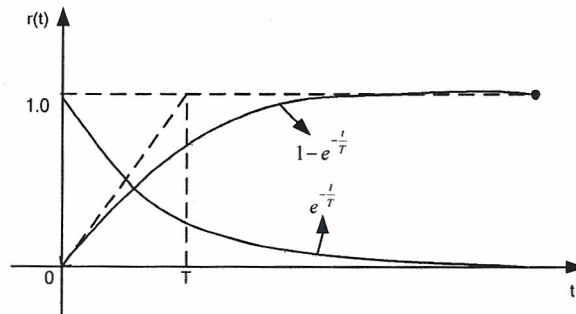
$$C(s) = G(s) R(s) = G(s) \quad \text{atau}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) \quad \dots \dots \dots \quad (V-4)$$

Dengan kata lain respon impulsa suatu sistem yang dinyatakan dengan  $g(t)$ , adalah inversi dari transformasi Laplace dari fungsi alihnya sendiri. Dengan mengambil inversi dari transformasi Laplacanya, didapat :

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

hasil transformasi tersebut secara grafis dapat disajikan seperti Gambar V.2.



**Gambar V.2. Respon sinyal step dan sistem orde pertama**

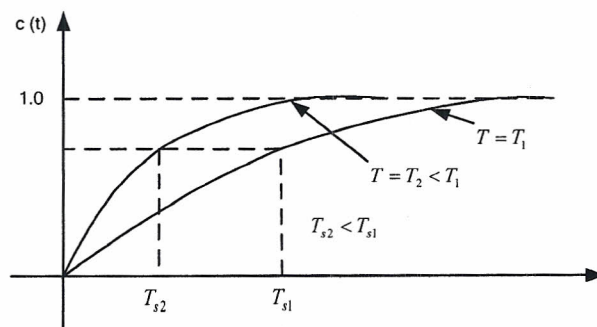
Dari gambar tampak bahwa respon keluaran bertambah secara eksponensial dari harga nol sampai harga akhir sebesar 1,0. kemiringan (slope) dari kurva tersebut adalah saat  $t = 0$ , yang diberikan oleh :

$$\frac{dc}{dt} \left[ = \frac{1}{T} e^{-t/T} \right] = \frac{1}{T}$$

$t = 0$

dimana  $T$  = tetapan waktu dari sistem.

Tetapan waktu  $T$  ini memberikan ciri seberapa cepat sistem cenderung berkembang menuju harga akhirnya. Kecepatan respon tersebut secara kuantitatif dapat didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan bagi respon keluaran berapa %-age yang dicapai terhadap harga akhirnya. Tetapan waktu yang besar menyatakan respon sistem yang sangat lamban, sebaliknya untuk  $T$  yang kecil menyatakan respon sistem yang cepat sekali. Untuk jelasnya perhatikan grafik tetapan waktu dimaksud pada Gambar V.3 berikut ini :



**Gambar V.3. Efek tetapan waktu pada sistem respon**

Respon kesalahan dari sistem tersebut dapat ditulis :

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-t/T}$$

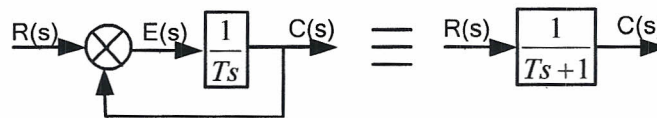
Sementara kesalahan steady statenya dapat ditulis :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Dimana T = tetapan waktu dari sistem.

**3. Respon Waktu Sistem Orde Pertama**

Perhatikan diagram blok suatu sistem di bawah ini (Gambar V.4) yang secara matematik menyatakan sistem pneumatik, dengan persamaan dinamika sistemnya sebaga berikut :



**Gambar V.4. Diagram blok sistem orde pertama**

Fungsi alih dari gambar diatas adalah

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \dots\dots\dots (V-5)$$

Pada bahasan berikut ini akan dianalisis respon suatu sistem dengan sinyal uji masukan "step" dan "Ramp" dengan kondisi syarat awal = 0.

**a. Respon Terhadap Sinyal Uji Masukan Step (Orde Pertama)**

Untuk sinyal uji step [  $R(s) = 1/s$  ], dari persamaan (V-2), respon keluaran yang didapat adalah :

$$C(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$

**b. Respon Terhadap Sinyal Uji Masukan Ramp**

Dari persamaan ( V-5 ), respon keluaran untuk sinyal uji masukan Ramp [  $R(s) = 1/s^2$  ] diberikan oleh :

$$C(S) = \frac{1}{s^2(T + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1}$$

Inversi Transformasi Laplace dari persamaan diatas didapat :

$$c(t) = t - T(1 - e^{-t/T})$$

Sinyal kesalahannya adalah :

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

dan kesalahan steady statenya diberikan oleh :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$$

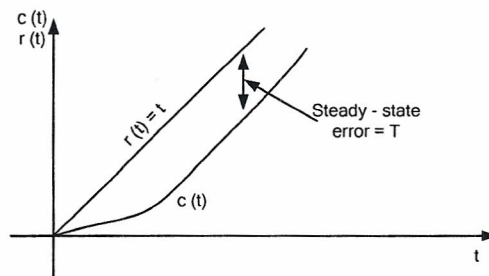
Jadi untuk sistem orde pertama dengan menerapkan sinyal uji masukan ramp, didapat kesalahan steady state = T, yang berarti sama dengan tetapan waktu dari sistem seperti ditunjukkan pada Gambar V. 5.

Pengurangan tetapan waktu ini mengakibatkan tidak hanya meningkatkan kecepatan respon saja, tetapi juga berkurangnya kesalahan steady state dengan sinyal uji masukan "ramp".

Jika kita uji derivatif dari respon c(t), adalah :

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

Hasil ini ternyata identik dengan respon sistem yang menerapkan sinyal uji masukan "step". Respon transient dengan menerapkan sinyal uji masukan "ramp" ternyata tidak ada informasi tambahan tentang kecepatan respon dari sistem.



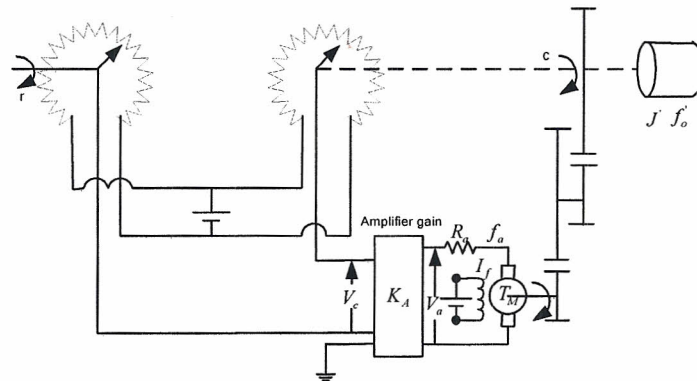
**Gambar V.5. Respon Sistem Orde Pertama Dengan Input Ramp**

Oleh karena itu hanya diperlukan untuk melakukan pengujian kesalahan steady state saja, dan secara langsung dapat dicari dengan teori harga final, yaitu :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(Ts - 1)} \right] = T \end{aligned}$$

#### 4. Respon Waktu Sistem Orde Kedua

Dengan memperhatikan pengendalian posisi servo (Gambar V.6.), dimana beban mekanik yang bersesuaian dengan porosnya (inshaft). Dua buah potensiometer untuk menyatakan sinyal masukan dan sinyal keluaran yang proporsional. Posisi "slider" antar keduanya menunjukkan perbedaan antara sinyal masukan yang diset dan sinyal keluaran yang terjadi (posisi poros).



Gambar V.6. Skema diagram Pengendali Posisi Servo

Sinyal kesalahan  $V_e = K_p (r - c)$ , dimana :

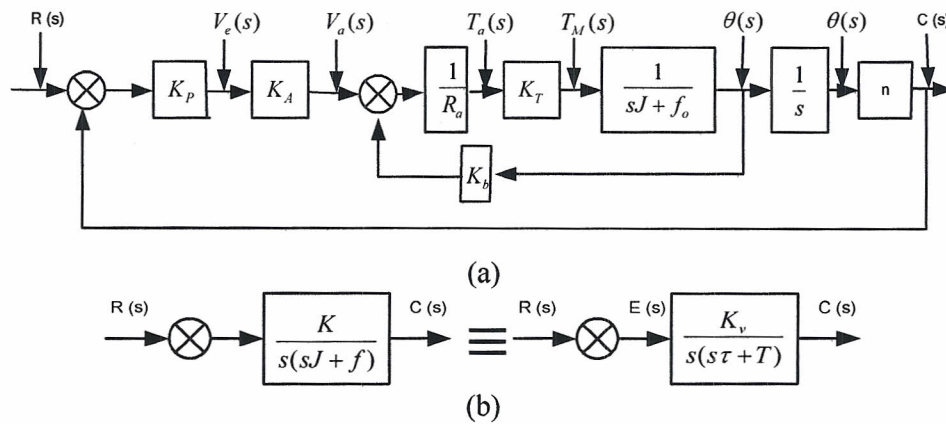
$r$  = referensi posisi poros (rad)

$c$  = keluaran posisi poros (rad)

$K_p = K_s =$  konstanta/sensitivitas potensiometer (V/rad)

Sinyal kesalahan  $V_e$  akan dikuatkan oleh faktor  $K_a$  (amplifier gain) yang akan digunakan untuk mencatu arus armatur sebuah motor dc dengan arus medan ( $I_f$ ) konstan dari sebuah sumber tetap. Setiap terjadi sinyal kesalahan menjadikan bertambahnya torsi motor yang selanjutnya ditransmisikan keporos keluaran melalui gearing dengan ratio,  $n \left[ n = \frac{\text{kecepatan poros beban } c}{\text{kecepatan poros beban } \theta} \right]$

Torsi yang ditransmisikan tadi akan memutar poros keluaran pada arah putar tertentu sedemikian, sehingga mengurangi kesalahan yang terjadi mendekati dan/atau = 0. Diagram blok dari sistem diatas (Gambar V.6), ditunjukkan pada gambar V.7 dibawah ini. Disini  $J$  dan  $f_o$  masing-masing menyatakan ekivalent dari momen inersia beban dan gesekan (friksi) yang terjadi pada poros motor dan beban.



**Gambar V.7. Diagram Blok dari Gambar I.6 (a) dan Penyederhanaan Diagram Blok (b)**

Fungsi alih pada loop bagian dalam (motor) dapat ditulis sebagai :

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T/R_a}{s(sJ + f)}; \text{ dimana } f = f_o + \frac{K_T K_b}{R_a}$$

Diagram bloknya sekarang dapat disederhanakan dalam bentuk (dari Gambar V.7b).

$$K = K_p K_A K_T \frac{n}{R_a}$$

Fungsi alih berikutnya dalam bentuk tetapan waktu dapat ditulis :

$$G(s) = \frac{K_v}{s(T_s + 1)}; \text{ dimana } K_v = \frac{K}{f} \text{ dan } T = \frac{J}{f}$$

Gambar V.7b diatas adalah diagram blok sistem orde pertama yang sesungguhnya yang menyertakan integrasi arah maju (forward path integration).

**a. Respon Sistem Orde Kedua Terhadap Sinyal Uji Masukan Step**

Dari Gambar V.7b fungsi alih dari sistem secara keseluruhan adalah :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_v}{Ts^2 + s + K_v} = \frac{K_v/T}{s^2 + 1/s + K_v/T} \dots \dots \dots (V-6)$$

Formula diatas dapat pula ditulis dalam bentuk yang terstandar sebagai berikut :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{p(s)}{q(s)} \dots \dots \dots (V-7)$$



dimana :

$$\xi = \text{faktor redaman} = \frac{1}{2\sqrt{(K_v T)}} = \frac{1}{2\sqrt{(KJ)}}$$

$$\omega_n = \text{frekuensi alami tanpa redaman} = \sqrt{(K_v/T)} = \sqrt{(K/J)}$$

Respon waktu setiap sistem dikarakteristikan dengan akar dari penyebut  $q(s)$  selanjutnya disebut polinomial karakteristik dan ditulis :

$$q(s) = 0 \dots\dots\dots (V-8)$$

Persamaan karakteristik dari sistem dimaksud dapat ditulis :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Akar dari persamaan karakteristik diberikan oleh :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

untuk  $\xi < 1$

$$s_1 s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)} = \xi\omega_n \pm j\omega_d$$

dimana :  $\omega_d = \omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)}$ , yang disebut frekuensi alami terendam.

Sistem kendali secara normal direncanakan dengan faktor redaman  $\xi < 1$ , dan yang seperti inilah yang akan dibahas sekarang.

Dari persamaan (V-7) yang menerapkan sinyal uji masukan step, respon keluarannya diberikan oleh :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s[s + \omega_n - j\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)}][s + \omega_n + j\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)}]} \dots\dots\dots (V-9)$$

Inversi Laplace dari persamaan (V-9) didapat dengan metode residu, yaitu :

$$c(t) = \left. \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=0} + 2R_1 \left. \frac{\omega_n^2}{s[s + \omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)}]} \right|_{s = \omega_n - j\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)}} e^{-\xi\omega_n t} + e^{-j\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)} t} \dots\dots\dots (V-10)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\omega_n t}}{\sqrt{(1 - \xi^2)}} \sin \left[ \omega \sqrt{(1 - \xi^2)} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - \xi^2)}}{\xi} \right] \dots\dots\dots (V-11)$$

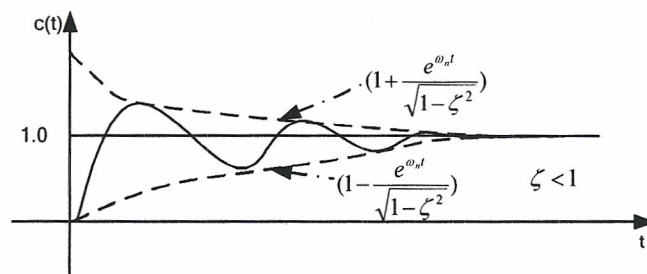
Harga steady state dari  $c(t)$  dinyatakan sebagai :

$$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 1$$

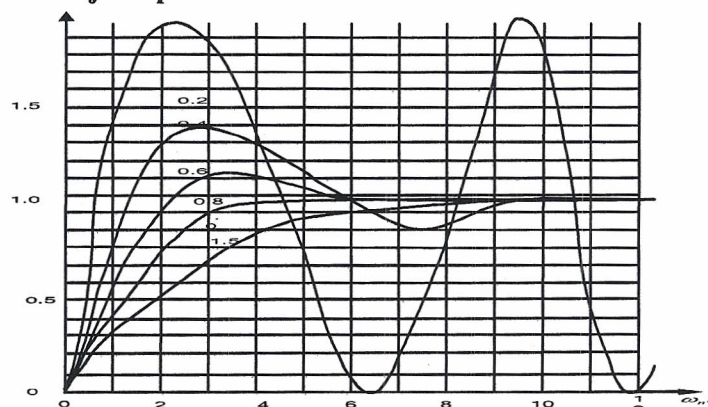
Respon waktu sistem orde kedua dengan redaman kurang ( $\xi < 1$ ) diperoleh dari persamaan (V.11) yang diilustrasikan dengan Gambar V.8 dibawah, berupa gelombang sinus. Respon menambah harga steady state  $C_{ss} = 1$  ini, kesalahan steady statenya mendekati nol. Respon akan berupa osilasi sinusoda yang menerus jika  $\xi = 0$ , sebagaimana tampak pada persamaan (V-11) diatas. Secara matematik respon waktu pada kasus ini diberikan oleh :

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

Apabila ternyata  $\xi$  naik, respon menjadi lebih kecil daripada saat isolasi menerus hingga mencapai redaman kritis (non osilasi menerus) untuk  $\xi = 1$  dan menjadi atau mencapai redaman lebih untuk  $\xi > 1$ . Kedua Kurva redaman  $\xi > 1$  dan  $\xi < 1$  dapat digambarkan seperti pada Gambar berikut ini

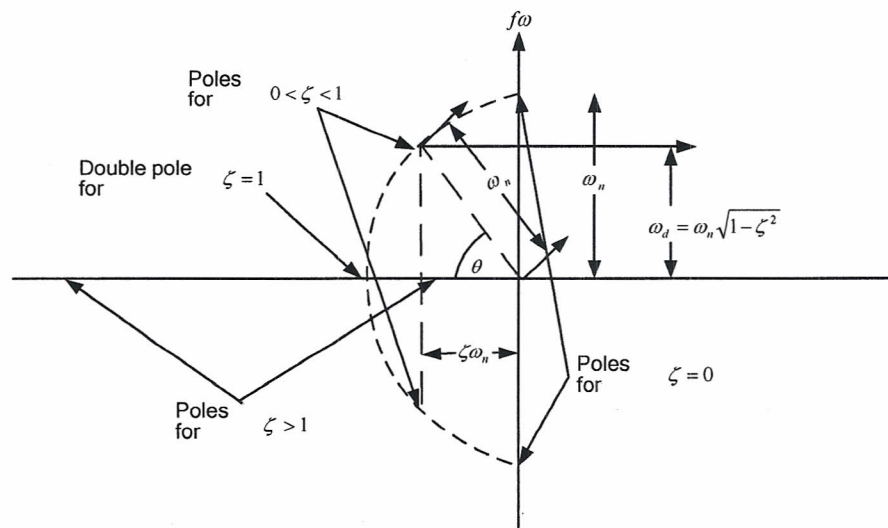


**Gambar V.8. Respon Sistem Orde Kedua Redaman Kurang Dengan Sinyal Uji Step**



**Gambar V.9. Kurva Respon Orde Kedua Dengan Sinyal Uji Tetap**

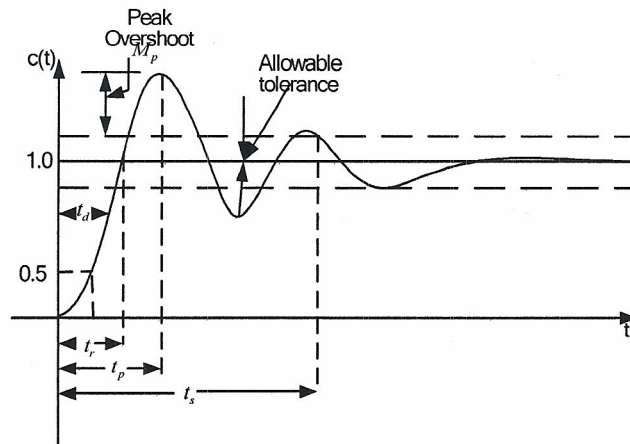
Sistem orde kedua sebagaimana telah diuraikan dimuka "Locus Pole-nya" dapat dilukiskan seperti pada Gambar V.10 dengan  $\omega_n$  terjaga konstan dan  $\zeta$  bervariasi antara  $0 - \infty$ . Bila bertambah besar, pole juga akan berpindah kedudukan disepanjang busur yang dibatasi sumbu imajiner beradius  $\omega_n$ , dengan titik temu pada  $\sigma = -\omega_n$ . Selanjutnya berpisah menuju sumbu nyata dengan dua arah; satu menuju nol dan satu lagi menuju tak terhingga. Untuk  $0 < \zeta < 1$ , pole berupa konjugate kompleks membentuk sudut  $\theta = \cos^{-1} \zeta$  dengan sumbu nyata negatif.



**Gambar V.10. Kedudukan lokasi pole untuk orde kedua**

#### b. Spesifikasi Respon Waktu

Sistem kendali sebagaimana dijelaskan dimuka umumnya dirancang memiliki faktor redaman lebih kecil dari satu, misalnya pada respon berupa osilasi dari masukan sinyal step. Pada sistem kendali orde yang lebih tinggi lagi biasanya memiliki pole-pole konjugate kompleks dengan faktor redaman lebih besar dari satu yang cenderung melampaui pole yang lain. Oleh sebab itu respon waktu sistem kendali orde dua dan orde yang lebih tinggi dengan masukan sinyal step umumnya berupa redaman osilasi alami (Lihat Gambar V.11). Dari gambar tampak bahwa respon memiliki "overshoot" dan "undershoot" yang nyaris tiada batas waktu berhentinya.



**Gambar V.11. Spesifikasi Respon Waktu**

Respon waktu yang dikarakteristikan seperti Gambar V.11 diatas secara kualitatif akan terkait dengan pertanyaan-pertanyaan berikut :

- ❖ Berapa cepat perubahan sistem dalam respon masukannya ?
- ❖ Berapa besar nilai redaman hingga terjadi osilasi ?
- ❖ Berapa lama waktu yang diperlakukan hingga batas akhir respon dicapai ?

Dari ketiga pertanyaan diatas perlu diketahui bahwa perubahan yang terjadi tidak dapat bebas atau netral dari keterkaitan parameter yang satu dengan parameter yang lainnya.

- 1) Waktu tunda (**delay time** =  $t_d$ ), yaitu waktu yang diperlukan respon untuk mencapai 50% dari harga akhir puncak lewatan lebih yang pertama.
- 2) Waktu naik (**rise time** =  $t_r$ ), yaitu waktu yang diperlukan respon untuk naik dari 10% hingga 90% hingga akhir sistem redaman lebihnya atau dari 0 hingga 100% dari harga akhir sistem redaman kurangnya. Untuk lebih jelasnya tentang redaman kurang ini perhatikan Gambar V.11.
- 3) Waktu puncak (**peak time** =  $t_p$ ), yaitu waktu yang diperlukan respon untuk mencapai puncak lewatan (overshoot) dari lewatan yang pertama.
- 4) Lewatan puncak (**peak overshoot** =  $M_p$ ), yaitu harga lewatan puncak atau lewatan maksimum dari kurva respon yang diukur dari harga satu (100%). Jika harga respon keadaan tunaknya tidak sama dengan satu, maka biasa

digunakan persen lewatan puncak yang dirumuskan sebagai (%) lewatan puncak..

$$\% \text{ lewatan puncak} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

**Note** : Dalam sistem kendali keluaran kondisi tunak untuk masukan sinyal step umumnya sama dengan masukannya. Sebagai misal pada sistem orde kedua,  $c(\infty) = c_{ss} = 1$ .

- 5) Waktu penetapan (**setting time** =  $t_s$ ), yaitu waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap pada daerah pita toleransi antara 2% - 5% dari harga akhirnya.
- 6) Kesalahan tunak (**steady state error** =  $e_{ss}$ ), yaitu kesalahan yang merupakan selisih antara keluaran yang sebenarnya dengan keluaran yang diharapkan. Kesalahan lazim diformulasikan sebagai :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

Dari Gambar V.11, tampak bahwa dengan mencermati besaran-besaran  $t_d, t_r, t_p, M_p, t_s$ , dan  $e_{ss}$  bengk dari respon waktu (satuan step) adalah ternyata cukup jelas perbedaannya.

### c. Spesifikasi Respon Waktu Sistem Orde Dua

Berikut ini akan kita cari parameter-parameter waktu naik, waktu puncak, lewatan puncak, dan waktu penetapan dari sistem orde kedua yang diagram bloknya ditunjukkan pada Gambar V.7b dengan mengambil persamaan (V-11), yaitu sistem redaman kurang.

- 1) **Waktu Naik** ( $t_r$ ). Berdasarkan persamaan (V-11) waktu naik  $t_r$  akan diperoleh apabila  $c(t)$  melaju hingga = 1 untuk lewatan pertama, yaitu :

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] = 1$$

Dari persamaan diatas, didapat persamaan untuk  $t_r$ , yakni :

$$t_r = \frac{\pi - \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right]}{\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)}} \dots \dots \dots (V-12)$$

Untuk  $0 < \xi < 1$ , maka :

$$\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right] < 0 \dots \dots \dots (V-13)$$

2) **Waktu Puncak ( $t_p$ )**. Berdasarkan persamaan (V-11), waktu puncak diperoleh dengan mendiferensialkan  $c(t)$  terhadap waktu dan menyatakan turunan ini sama dengan nol, sehingga didapat :

$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{\xi \omega_n}{\sqrt{(1-\xi^2)}} e^{\xi \omega_n t} \sin \left[ \omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right] + \\ &- \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} \cos \left[ \omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right] \dots \dots \dots (V-14) \end{aligned}$$

Dengan merujuk kepada Gambar V.12 dan persamaan (V-14), dapat pula ditulis sebagai berikut :

$$\sin[\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t + \phi] \cos \phi - \cos[\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t + \phi] \sin \phi = 0$$

atau

$$\sin[\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t] = 0 \dots \dots \dots (V-15)$$

Dengan demikian waktu untuk setiap variasi puncak adalah :

$$\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \dots \dots dst.$$

Karena waktu puncak berkaitan dengan lewatan puncak pertama, maka :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)}} \dots \dots \dots (V-16)$$

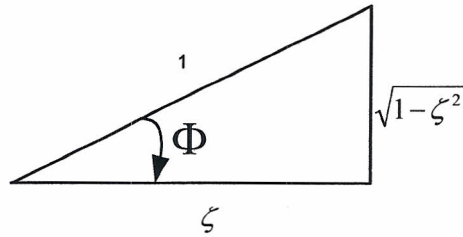
Lewatan kurang (undershoot) pertama dicapai pada :

$$t = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)}}$$

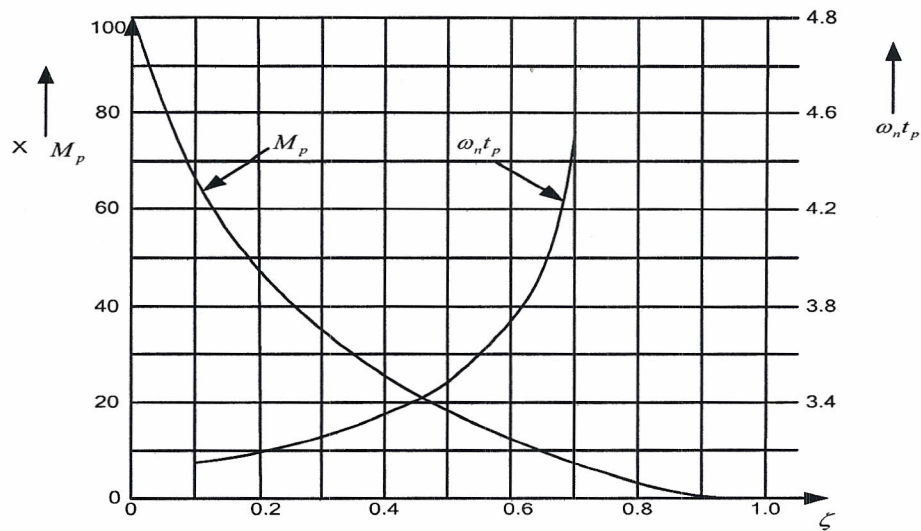
Dan lewatan (overshoot) kedua pada :

$$t = \frac{3\pi}{\omega_n} \sqrt{1-\xi^2}$$

dan seterusnya. Penggambaran kurva puncak  $\omega_n t_p$  versus  $\xi$  ini ditunjukkan pada Gambar V.13.



Gambar V.12. Ilustrasi sudut



Gambar V.13. Kurva  $M_p$  dan  $\omega_n t_p$  versus  $\xi$  untuk sistem

3) **Lewatan Puncak ( $M_p$ ).** Dari persamaan (V-11) dan Gambar V.11,  $M_p$  diperoleh sebagai :

$$\begin{aligned} M_p &= c(t) - 1 \\ &= -\frac{e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \\ &= e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{aligned}$$

Dengan demikian persen lewatan puncaknya adalah :

$$= 100 e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \% \dots\dots\dots (V-17)$$

4) **Waktu Penetapan ( $t_s$ ).** Dari Gambar V-8 dapat kita amati bahwa respon waktu  $c(t)$  diberikan oleh persamaan (V-11) untuk harga  $\xi < 1$ , terjadi osilasi dalam kurva selubung sebelum dicapai kondisi tunak. Respon transiennya diperoleh dari hasil kali antara batas lengkung eksponensial,  $\text{Exp}[-\xi\omega_n t/\sqrt{1-\xi^2}]$  dengan batas osilasi sinusoidal,  $\sin[\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi]$ . Konstanta waktu selubung eksponensialnya adalah  $T = 1/\omega_n$ . Dalam hal ini dapat pula dinyatakan bahwa konstanta waktu tersebut sama dengan  $2\tau$ , dimana  $\tau$  adalah konstanta waktu untuk motor (Gambar V.7b).



**Gambar V.14.** Waktu penetapan untuk harga  $\xi$  yang berbeda-beda

Gambar V.14 menunjukkan respon satuan step versus waktu  $\omega_n t$  untuk harga  $\xi$  yang berbeda-beda. Tampak bahwa berkurangnya harga  $\xi$  dari 1 (redaman kritik), diikuti pula oleh berkurangnya waktu penetapan secara perlahan hingga lewatan puncak (overshoot) menyentuh batas atas pita toleransinya. Sejalan dengan berkembangnya redaman  $\omega_n t_s$  akan melonjak dan kemudian bertambah secara perlahan.

Kurva dari  $\omega_n t_s$  versus  $\sqrt{\xi}$  ini ditunjukkan pada Gambar V.15. waktu penetapan  $\omega_n t_s$  menunjukkan harga terkecil pada kurva tidak kontinyu yang



pertama, yaitu  $\xi = 0,76$  untuk pita toleransi 2% dan  $\xi = 0,68$  untuk pita toleransi 5%. Fakta ini selalu dijadikan pedoman perencanaan sistem kendali yang menghendaki sistem memiliki redaman kurang. Dalam kenyataannya bahkan banyak sistem kendali yang didesain agar redamannya sekecil mungkin, dalam hal ini semua proses dari sistem seperti friksi dan sistem non linear lainnya (pengikat, gear, sabuk pengkopel, dan lain-lain) sering diabaikan. Kenyataannya sistem nonlinear ini tidak dimunculkan dalam pembahasan model matematik sistem linier. Oleh sebab itu agar supaya faktor kesalahan yang terjadi dapat dikompensir, maka wajar bila pada sistem linear didesain sedemikian rupa, seperti penguatan yang lebih tinggi sehingga redamannya rendah, misal  $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{(K_v \tau)}$ .

Untuk mendapatkan redaman yang relatif rendah, yaitu respon waktu yang berosilasi dan waktu penetapannya mudah ditentukan dengan mencari waktu dari kurva selubung sinusoidalnya seperti pada Gambar (*overshoot*) yang berada dalam daerah pita toleransi.

Waktu penetapan khususnya pada selubung lengkung eksponensial untuk pita toleransi 2% adalah :

$$\frac{e^{-\xi \omega_n t_s}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} = 0,02 \text{ atau } e^{\xi \omega_n t_s} \approx 0,02 \text{ (untuk redaman } \xi \text{ rendah)}$$

atau

$$t_s \approx \frac{4}{\xi \omega_n} = 4T \dots \dots \dots \text{ (V-18)}$$

[ $t_s$  mendekati 4 kali konstanta waktu sistem].

Dimana T adalah konstanta waktu dari lengkung eksperimental ( $T=2$ ). Waktu penetapan pita toleransi 5% adalah :

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} = 3T$$

[ $t_s$  mendekati 3 kali konstanta waktu sistem].

Kedua macam waktu penetapan ( $t_s$ ) yang menggunakan kriteria pita toleransi 2% dan 5% diatas, ternyata bahwa waktu penetapan ( $t_s$ ) berbanding terbalik dengan  $\omega_n$ .

5) **Kesalahan Tunak ( $e_{ss}$ ).** Dari persamaan (V-11) untuk masukan step adalah :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - c(t)] = 0$$

Dengan demikian tipe sistem orde kedua seperti dimaksud diatas mempunyai kesalahan tunak nol terhadap masukannya.

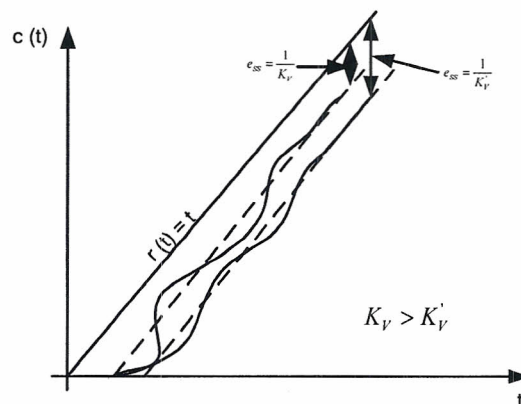
Adapun respon terhadap masukan sinyal ramp [ $r(t) = t, R(s) = 1/s^2$ ], sebagaimana ditulis pada persamaan (V-7) adalah :

$$\begin{aligned} C(t) &= \alpha^{-1} \left[ \frac{\omega_n}{s^2 (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right] \\ &= t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi \right] \end{aligned}$$

Kurva  $c(t)$  untuk harga yang berbeda-beda ditunjukkan pada Gambar V.16.

Kesalahan tunak untuk masukan sinyal ramp ini adalah :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [t - c(t)] = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K_v}$$



**Gambar V.16. respon sinyal ramp sistem orde kedua**

Dari Gambar V.16 dapat dicermati bahwa respon transien alami terhadap masukan sinyal ramp ternyata sama dengan masukan sinyal step. Dalam hal ini berupa osilasi teredam, yang berarti tidak ada informasi baru tentang respon transien dari sistem tersebut.

Pada penjelasan terdahulu baru respon transien suatu sistem dengan masukan sinyal step saja yang diuji, padahal respon transien dengan masukan sinyal ramp pun dapat pula diuji atau dievaluasi. Respon transien dengan masukan

sinyal ramp justru akan memberikan informasi baru terutama mengenai karakteristik kondisi tunaknya. Karakteristik tersebut dapat dievaluasi langsung dengan teorema harga akhir, yaitu :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} - C(s)$$

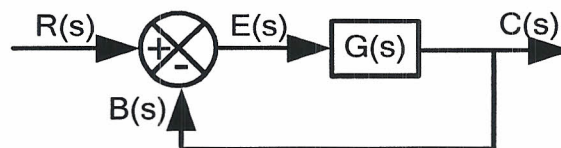
Dengan substitusi  $C(s)$  ke persamaan (V-7), didapat :

$$e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K_v} \dots\dots\dots (V-19)$$

### 5. Kesalahan Kondisi Tunak dan Konstanta Kesalahannya

Dicapainya kesalahan kondisi tunak (steady state) unjuk kerja suatu sistem merupakan aspek yang sangat penting. Untuk itu perencanaan ketepatan dinamika suatu sistem akan tiada berarti, apabila keluaran tunak yang dicapai sangat berbeda dengan harga yang diharapkan dijadikan salah satu alasan. Kesalahan kondisi tunak adalah tingkat ketepatan suatu sistem yang terukur. Kesalahan tersebut dapat timbul dari komponen-komponen sistem non-linier lainnya seperti gesekan statik, gear mekanik, dan sebagainya. Kesemuanya ini dapat merugikan atau memperburuk sistem seperti akurasi elemen penguat dan usia pakai yang tak tahan lama.

Unjuk kerja tunak dari sistem kendali yang stabi; atau mantap pada umumnya ditentukan oleh kesalahan tunaknya itu sendiri, baik itu mengenakan masukan sinyal step, ramp, maupun sinyal parabolik. Untuk pembahasan tentang kesalahan kondisi tunak ini perhatikanlah diagram blok sistem berikut (Gambar V.17). Dari gambar tampak bahwa sinyal masukannya adalah  $R(s)$ , keluaran  $C(s)$ , sinyal umpan balik  $B(s)$ , dan sinyal kesalahan  $E(s)$ . Berdasarkan persamaan (V-17), dapat kita tulis bahwa



**Gambar V.17. Sistem dengan satuan umpan balik.**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \text{ atau } C(s) = E(s)G(s)$$

Dengan demikian :

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) \dots\dots\dots (V-20)$$

Adapun kesalahan kondisi tunaknya dapat dicari dengan menggunakan teorema harga akhir, yaitu :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} \dots\dots\dots (V-21)$$

Dari persamaan (V-21) menunjukkan bahwa kesalahan kondisi tunak ( $e_{ss}$ ) sangat tergantung pada sinyal masukan  $R(s)$  dan fungsi alih arah maju  $G(s)$ . Pengungkapan mengenai kesalahan kondisi tunak untuk berbagai type dengan masukan sinyal uji terstandar ini adalah sebagai berikut :

**a. Dengan masukan "step" satuan [posisi]**

Masukan  $r(t) = u(t)$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Berdasarkan persamaan (V-21), maka dapat kita nyatakan :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K_p} \dots\dots\dots (V-22)$$

Dimana  $K_p = G(0)$ , didefinisikan sebagai konstanta kesalahan posisi.

**b. Dengan masukan "ramp" satuan [kecepatan]**

Masukan  $r(t) = t$  atau  $r(t) = 1$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Berdasarkan persamaan ( V-21 ), maka dapat kita nyatakan :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{1+K_v} \dots\dots\dots (V-23)$$

Dimana

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

didefinisikan sebagai konstanta kesalahan kecepatan.

**c. Dengan masukan "parabolik" satuan [percepatan]**

Masukan  $r(t) = t^2/2$  atau  $r(t) = 1$   
 $R(s) = 1/s^3$

Berdasarkan persamaan (V-21), maka dapat kita nyatakan :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a} \dots\dots\dots (V-24)$$

Dimana

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

Didefinisikan sebagai konstanta kesalahan percepatan.

**6. Tipe-tipe sistem kendali berumpan balik**

Fungsi alih loop terbuka dari sistem dengan umpan balik satuan dapat ditulis dalam dua bentuk standar, bentuk-bentuk "konstanta waktu" dan bentuk "pole-nol". Dari kedua bentuk terstandar ini, G(s) dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$G(s) = \frac{K(T_{c1}s + 1)(T_{c2}s + 1)}{s^n(T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1)} \text{ (bentuk konstanta waktu) } \dots\dots\dots (V-25)$$

$$G(s) = \frac{K'(s + Z_1)(s + Z_2)}{s^n(s + p_1)(s + p_2)} \text{ (bentuk pole-nol) } \dots\dots\dots (V-26)$$

Gain gabungan dari kedua bentuk diatas adalah :

$$K = K' \frac{D_i Z_1}{D_j P_i} \dots\dots\dots (V-27)$$

Dari rumusan gain gabungan persamaan (V-27) di atas sudah cukup guna menentukan kesalahan kondisi tunak kedua bentuk gain tadi. Pada pembahasan berikut akan dipakai gain bentuk konstanta waktu.

Persamaan (V-27) pada penyebutnya menyertakan s" yang bersesuaian dengan banyaknya integrasi dalam sistem. Sementara s yang cenderung menuju nol, sangat berperan menentukan harga dari kesalahan kondisi tunaknya. Sesuai dengan jumlah integrasi dalam fungsi alih loop terbuka G(s), maka sistem kendali pada umumnya dapat diuraikan sebagai berikut.

### a. Sistem Tipe-0

Jika  $n = 0$ , maka kesalahan kondisi tunak untuk berbagai masukan sinyal uji terstandar dapat diperoleh dengan persamaan-persamaan (V-22), (V-23), (V-24) dan (V-25) yaitu :

$$e_{ss} \text{ (posisi)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+K_p} \dots\dots\dots (V-28)$$

$$e_{ss} \text{ (kecepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \infty$$

$$e_{ss} \text{ (percepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2G(s)} = \infty$$

Dengan demikian sebuah sistem dengan  $n = 0$  atau tanpa adanya integrasi dalam  $G(s)$  akan mempunyai suatu konstanta kesalahan posisi, kesalahan kecepatan dan kesalahan percepatan tak terhingga. Kesalahan konstanta posisinya diberikan oleh fungsi alih dari gain loop terbuka  $G(s)$  dalam bentuk konstanta waktu.

### b. Sistem Tipe-1

Jika  $n = 1$ , maka kesalahan kondisi tunak untuk berbagai masukan sinyal uji terstandar adalah :

$$e_{ss} \text{ (posisi)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$e_{ss} \text{ (kecepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K} = \frac{1}{K_v} \dots\dots\dots (V-29)$$

$$e_{ss} \text{ (percepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2G(s)} = \infty$$

Dengan demikian sebuah sistem dengan  $n = 1$  atau dengan satu integrasi dalam  $G(s)$  akan mempunyai kesalahan posisi nol, suatu konstanta kesalahan kecepatan, dan kesalahan percepatan tak terhingga pada kondisi kesalahan tunaknya.

### c. Sistem Tipe-2

Jika  $n = 2$ , kondisi tunak untuk berbagai masukan sinyal uji terstandar adalah :

$$e_{ss} \text{ (posisi)} = \frac{1}{1+G(0)} = 0 \dots\dots\dots (V-30)$$

$$e_{ss} \text{ (kecepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = 0$$

$$e_{ss} \text{ (percepatan)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{K} = \frac{1}{K_v} \dots\dots\dots (V-31)$$

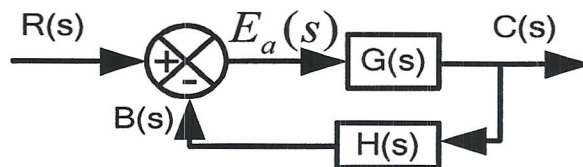
Dengan demikian sebuah sistem dengan  $n = 2$  atau dengan dua integrasi dalam  $G(s)$  akan mempunyai kesalahan posisi nol, kesalahan kecepatan nol dan suatu konstanta kesalahan percepatan pada kondisi kesalahan tunaknya.

Untuk sistem yang bukan berumpan balik satuan (lihat Gambar V.18), selisih antara sinyal masukan  $R(s)$  dan sinyal umpan balik  $B(s)$  adalah berupa sinyal kesalahan atau sinyal penggerak

$$E_a(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \dots\dots\dots (V-32)$$

Dengan demikian sinyal kesalahan penggerak tunaknya adalah :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \dots\dots\dots (V-33)$$



**Gambar V.18. Diagram blok sistem berumpan balik**

Konstanta kesalahan untuk sistem bukan berumpan balik satuan tersebut dapat dicari dengan cara mengganti  $G(s)$  dengan  $G(s)H(s)$  sebagaimana ditunjukkan pada Tabel V.1.

Konstanta kesalahan  $K_p$ ,  $K_v$ , dan  $K_a$  menyatakan kemampuan dari sistem guna mereduksi atau meniadakan kesalahan kondisi tunak. Sebagai misal pada suatu sistem jumlah integrasi dalam  $G(s)$  makin bertambah, maka sistem tersebut dengan cepatnya akan mereduksi atau meniadakan sebesar mungkin kesalahan kondisi tunak yang terjadi.. sekalipun jelas tidak ada pembatasan jumlah integrasi, namun tipe-0, tipe-1, tipe-2 adalah sistem yang paling banyak dan umum digunakan dalam bentuk praktis dilapangan. Sistem yang lebih tinggi dari dua (sistem-tipe-tinggi), yaitu sistem yang memiliki lebih dari dua buah integrasi biasanya tidak digunakan, mengingat akan dua alasan berikut :

- a. Banyak kesulitan dicapainya tingkat stabilitas sistem.
- b. Kesalahan dinamik untuk sistem tertentu cenderung lebih besar dari pada sistem tipe-0, tipe-1, maupun tipe-2, sekalipun penampilan kesalahan kondisi tunak tersebut benar-benar dikehendaki.

**Tabel V.1. Kesalahan kondisi tunak untuk berbagai masukan dan sistem.**

Tipe Masukan	Kesalahan Kondisi Tunak		
	Sistem Tipe-0	Sistem Tipe-1	Sistem Tipe-2
"Step" satuan	$\frac{1}{(1 + K_p)}$	0	0
"Ramp" satuan	$\infty$	$\frac{1}{K_v}$	0
"Parabolik" satuan	$\infty$ $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$	$\infty$ $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$	$\frac{1}{K_a}$ $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$

## 7. Spesifikasi Rancangan Sistem Orde Kedua

Suatu sistem kendali umumnya menghendaki ditemukannya tiga buah spesifikasi respon waktu yaitu akurasi kesalahan kondisi tunak ( $e_{ss}$ ), faktor redaman ( $\zeta$ ), dan waktu penetapan ( $t_s$ ). Seandainya waktu naik ( $t_r$ ) diketahui, maka akan konsisten dengan spesifikasi waktu penetapan ( $t_s$ ), dimana keduanya bergantung pada  $\xi$  dan  $\omega_n$ . Akurasi kesalahan kondisi tunak ini ditentukan oleh ketepatan di dalam memilih harga  $K_p$ ,  $K_v$ , atau  $K_a$  (tergantung dari tipe sistemnya). Adapun faktor redaman untuk sistem kendali pada umumnya kurang dari satu, tepatnya adalah antara 0,70 sampai 0,28 atau dengan lewatan puncak (overshoot) antara 5% sampai 40%. Rentang  $\xi$  tersebut dapat dilukiskan pada salib sumbu lokasi pole loop tertutup seperti pada Gambar V.19.

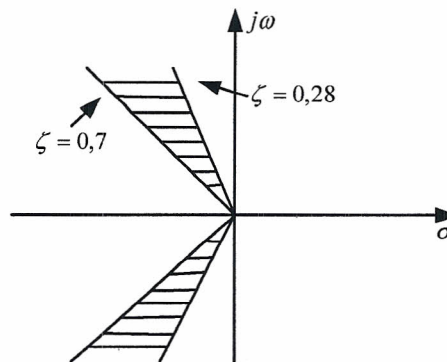
Selanjutnya mari kita uji besar-besaran  $e_{ss}$ ,  $\omega_n$ ,  $\xi$ , dan  $t_s$  untuk sistem orde kedua tipe-1 seperti dibawah ini.

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{(K_v \tau)}}; \omega_n = \sqrt{\left(\frac{K_v}{\tau}\right)} \dots \dots \dots (V-34)$$



$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \text{ (pita toleransi 2\%)} \dots\dots\dots (V-35)$$

$$e_{ss} \approx \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K_v} \text{ (masukan ramp)} \dots\dots\dots (V-36)$$



**Gambar V.19. Lokasi pole untuk sistem orde kedua**

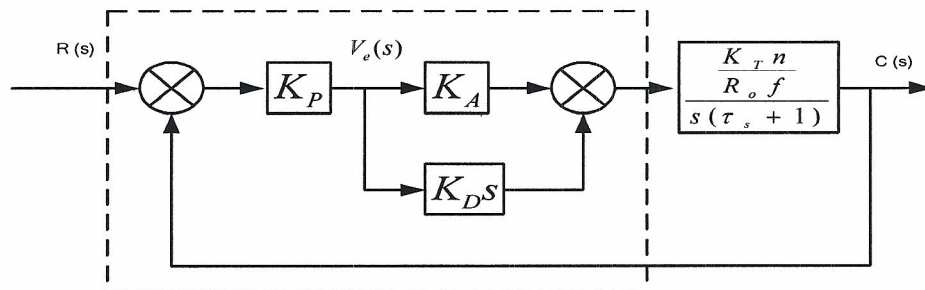
Dari rumusan diatas, konstanta waktu biasanya merupakan harga tetap (ingat konstanta waktu untuk motor pada Gambar V.1). Jadi  $K_v$  (open loop gain), merupakan parameter sistem yang dapat diatur dengan memakai penguat (amplifier). Dari sistem orde kedua ini ternyata hanya ditemukan satu spesifikasi yang tepat. Spesifikasi ini biasanya dibolehkan untuk menyatakan kesalahan kondisi tunak suatu sistem. Dalam kebanyakan sistem apabila ditemukan akurasi kondisi tunak melalui pengaturan-pengaturan loop terbuka, maka harga  $\xi$  berkurang dibawah harga yang ditetapkan dan merugikan terhadap respon sistem dinamik.

Dari pembicaraan diatas dapat disimpulkan bahwa untuk menurunkan dua spesifikasi yang sama-sama netral atau bebas, sistem orde kedua ini perlu dimodifikasi. Perubahan ini disebut "kompensasi" melalui pengaturan penguatan yang tinggi guna menemukan akurasi kondisi tunak dan unjuk kerja sistem yang memuaskan.

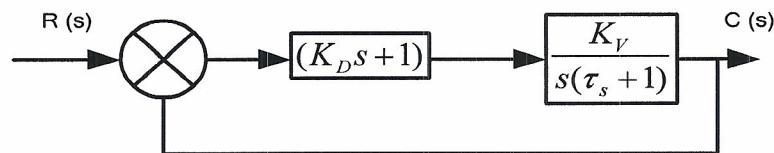
## 8. Kompensasi Derivatif Kesalahan

Suatu sistem dikatakan menggunakan rangkaian kompensasi derivatif kesalahan apabila keluaran sistem yang dihasilkan masih berada pada batas

perubahan sinyal aksinya. Sistem kompensasi yang skemanya ditunjukkan pada Gambar V.5 mudah difahami, dimana pemakaian elemen penguat dapat menghasilkan sinyal keluaran melalui dua cara yaitu : pertama, membandingkan sinyal proporsional dengan derivatif sinyal aksinya dan yang kedua, membandingkan sinyal proporsional dengan sinyal aksinya sendiri. Sistem kendali yang menghasilkan sinyal semacam itu disebut sistem kendali proporsional plus derivatif.



**Gambar V. 20. Sistem kendali proporsional plus derivatif (untuk sistem Gambar V.6)**



**Gambar V.21. Sistem orde kedua dengan kendali derivatif kesalahan**

Sistem kendali posisi sebagaimana Gambar V. 6 yang diagram bloknya seperti ditunjukkan pada Gambar V. 7 dapat dimodifikasi lagi seperti pada Gambar V.20, yang selanjutnya dapat diubah seperti pada Gambar V.21, dimana :

$$K_v = \frac{K_p, K_A, K_T n}{R_a f}$$

$$\tau = \frac{J}{f}$$

$$K_{D'} = \frac{K_p}{K_A}$$

Merujuk pada persamaan (V-21), fungsi alih loop tertutup dari sistem diberikan oleh :

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_v (K_{D'} s + 1)}{\tau s^2 + (1 + K_v K_{D'}) s + K_v} = \frac{\omega_n'^2 + (K_{D'} s + 1)}{s^2 + 2\xi' \omega_n' s + \omega_n'^2}$$

Frekuensi alami beserta redaman dari sistem yang berkompensasi ini diberikan oleh :

$$\omega'_n = \sqrt{\left(\frac{K_V}{\tau}\right)} = \omega_n \dots\dots\dots (V-37)$$

$$\xi' = \frac{1 + K_V K'_D}{2\sqrt{(K_V \tau)}} = \xi + \frac{K'_D}{2} \sqrt{\left(\frac{K_P}{K_A}\right)} \dots\dots\dots (V-38)$$

Apabila kita bandingkan dengan sistem yang dikompensasi dengan yang tidak dikompensasi pada harga  $K_V$  yang sama, ternyata frekuensi alami dari sistem yang dikompensasi tetap tidak berubah sekalipun faktor redaman bertambah besar  $\left(\frac{K'_D}{2}\right) \sqrt{\frac{K_V}{\tau}}$ . Jika kesalahan tunak  $e_{ss}$  dibandingkan dengan masukan kecepatan

tertentu, maka  $K_V$  dari sistem akan menerima besaran  $e_{ss} = \frac{1}{K_V}$  secara tetap,

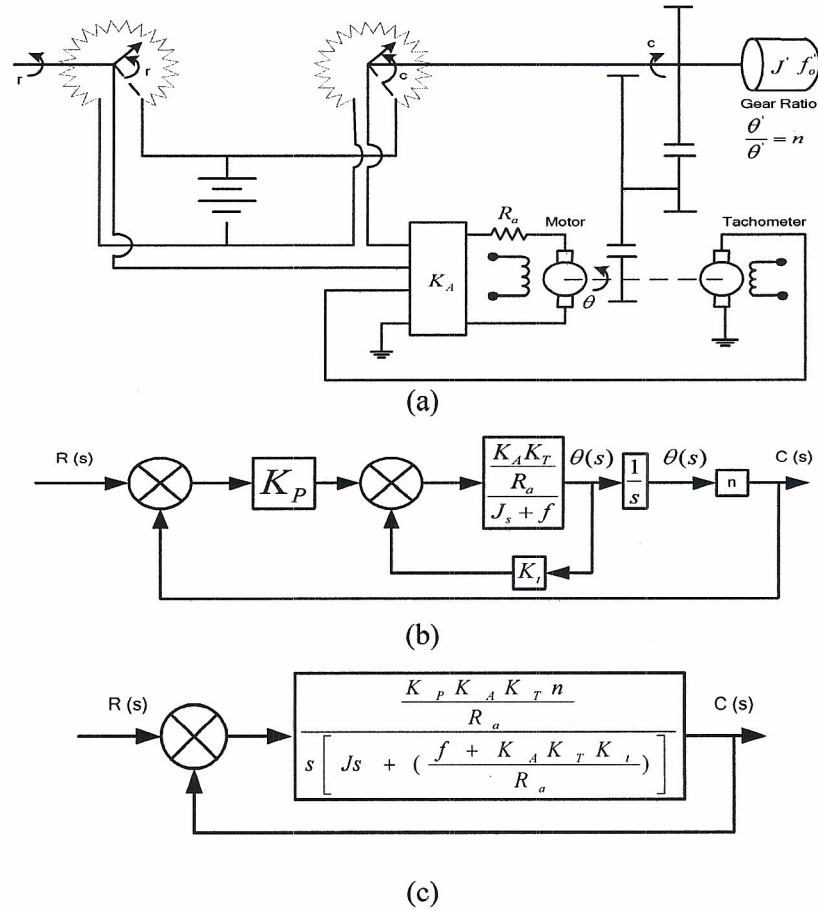
demikian pula besarnya  $K_A$ . Faktor redaman loop tertutup  $\xi'$  dapat ditambah hingga tingkat harga yang diinginkan dengan memilih harga  $K'_D$  yang cocok dari persamaan (V-37).  $K_D = K'_D K_A$  akan memberikan konstanta derivatif terhadap elemen penguatnya.

Keuntungan lain sistem kendali posisi tadi yaitu bertambahnya faktor redaman baik untuk kompensasi dengan  $\omega_n$  yang selalu tetap, maupun berkurangnya waktu penetapan  $t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$ .

## 9. Kompensasi Derivatif Keluaran

Suatu sistem dikatakan menggunakan rangkaian kompensasi derivatif keluaran apabila keluaran yang dihasilkan masih berada pada daerah perubahan variabel terkendali. Pada sistem servo misalnya, cara yang paling umum untuk mendapatkan kompensasi tersebut adalah memakai umpan balik tachogenerator. Kompensasi tipe ini akan ditunjukkan melalui diagram blok sistem kendali posisi, dimana tachogenerator dc dipasang seporos dengan motor yang dikendalikan. Output tachogenerator ( $V_t$ ) ini proporsional terhadap kecepatan putarnya

(derivatif posisi), yaitu  $V_i = K_i \theta$  berupa tegangan feedback negatif yang diumpangkan ke input amplifier (perhatikan gambar berikut)



Gambar V.22. Kompensasi derivatif keluaran. (a) Sistem kendali orde kedua, (b) Blok diagram, dan (c) Penyederhanaan diagram blok

Gambar V.22c yang merupakan diagram blok total dari sistem (fungsi alih), persamaan variabel sistemnya dapat ditulis :

- Konstanta kesalahan kecepatan :

$$K'_V = \frac{K_P K_A K_M n}{R_a f + K_A K_M K_T} \dots \dots \dots (V-39)$$

dimana

$$\tau' = \frac{J R_a}{R_a f + K_A K_M K_T} \dots \dots \dots (V-40)$$

- Frekuensi alami dan faktor redaman dari sistem loop tertutup dapat ditulis:

$$\omega'_n = \sqrt{\left(\frac{K'_v}{\tau'}\right)} = \sqrt{\left(K_v K_A K_T \frac{n}{JR_a}\right)} \dots\dots\dots (V-41)$$

dan

$$\xi' = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{K'_v}{\tau'}\right)} = \frac{(R_a f + K_A K_p K_T)}{2\sqrt{(K_p K_A K_T n JR_a)}} \dots\dots\dots (V-42)$$

Dengan demikian harga  $K'_v$  dan  $\xi'$  dapat ditentukan dari persamaan (V-38) dan (V-41), yaitu :

$$\xi' K'_v = \frac{1}{2} \sqrt{\left(K_p K_A K_T \frac{n}{JR_a}\right)}$$

Sementara harga  $K_A$  dapat dicari melalui persamaan :

$$K_A = 4(\xi' K'_v)^2 \left(\frac{JR_a}{K_p K_T n}\right)$$

Dengan memakai harga dari  $K_A$  dan  $K_T$  yang telah ditemukan, maka konstanta tachogenerator dapat dicari dari persamaan (V-38), yaitu :

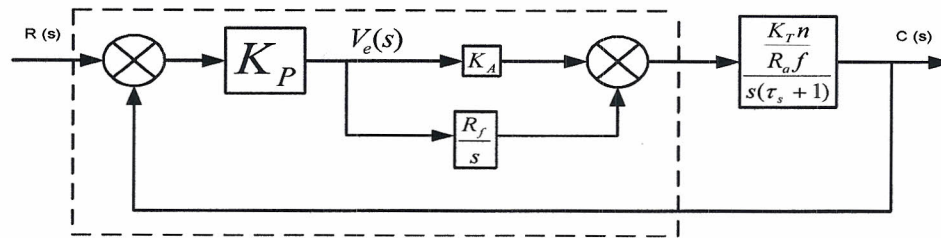
$$K_T = \left[ \frac{K_p n}{K'_v} - \frac{R_a f}{K_A K_T} \right]$$

Dari uraian diatas dapat kita catat bahwa pemilihan harga  $K_A$  dan  $K_T$  dapat dilakukan secara simultan terhadap spesifikasi dari  $K'_v$  dan  $\xi'$ . Untuk menentukan derivatif feedback negatif ini sesekali diperlukan harga  $K_A$  yang cukup besar.

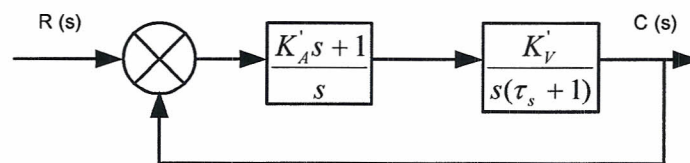
## 10. Kompensasi Integral Kesalahan

Didalam sebuah bagan kompensasi integral kesalahan, respon keluaran sistem sangat bergantung pada pengatur integral sinyal aksinya. Tipe kompensasi ini ditandai dengan adanya elemen kendali (pengatur) yang dapat menghasilkan sinyal keluaran yang terdiri dari dua macam yaitu : pengatur yang proporsional terhadap sinyal aksinya dan proporsional terhadap integralnya itu sendiri. Dengan demikian cara seperti ini disebut pengatur proporsional plus integral (PI-Contoller).

Diagram blok yang menerapkan pengatur proporsional plus integral ini ditunjukkan pada gambar berikut :



(a)



(b)

**Gambar V.23. Pengatur Proporsional plus Integral untuk Gb.Vb (RPC servo)**

Dari hasil penyederhanaan ini dapat ditulis persamaan untuk  $K_p'$  dan  $K_A'$ , yaitu :

$$K_v' = K_p K_t K_T \frac{n}{R_a f}$$

$$K_A' = \frac{K_A}{K_t}$$

Adapun fungsi alih loop tertutupnya ditentukan melalui rumus :

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K_v'(K_A's + 1)}{(s^3 + s^2 + K_v'K_A's + K_v')} \dots\dots\dots (V-43)$$

Kompensasi integral kesalahan ini ternyata berubah dari sistem orde kedua ke sistem orde ketiga. Efek kompensasi sistem dinamik ini tidak dapat divisualisasikan dengan mudah sebagaimana dua tipe kompensasi terdahulu, karena termasuk sistem orde tinggi. Kontribusi yang signifikan dari kompensasi integral kesalahan ini yaitu pada pencapaian unjuk kerja sistem dalam kondisi mantap (steady state). Dalam hal ini nyata sekali adanya penambahan integrasi pada perubahan arah maju dari sistem orde kesatu ke sistem tipe orde kedua dan

kesalahan kecepatan masukannya tereliminir. Dengan demikian pemakaian kompensasi integral kesalahan ini akan menghasilkan wujud nyata kerja sistem yang akurasinya tinggi.

### 11. Contoh-contoh Ilustratif

1) Pengatur proporsional kesalahan dengan feedback satuan negatif, digunakan untuk mengendalikan unjuk kerja sebuah piringan putar dengan momen inersia sebesar  $10 \text{ kgm}^2$ . Elemen kendalinya memberikan torsi sebesar  $60 \text{ N.m/rad}$  kesalahan. Gesekan viskos yang terjadi memberikan faktor redaman sebesar  $0,30$ .

a. Gambarkan grafik aliran sinyal dari sistem tersebut serta carilah  $\frac{\theta_o}{\theta_i}(s)$

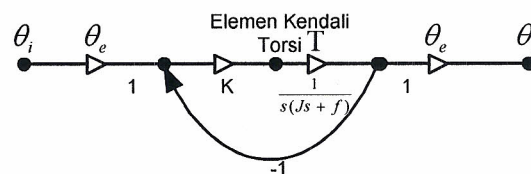
dan  $\frac{\theta_e}{\theta_i}(s)$  dimana  $\theta_i, \theta_e, \text{ dan } \theta_o$  masing-masing adalah sinyal masukan, sinyal kesalahan, sinyal keluaran.

b. Hitung besarnya kesalahan tunak, bila konstanta kecepatan sinyal masukannya  $= 0,04 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ .

c. Jelaskan dengan singkat, modifikasi apa yang dapat dilakukan guna mengeliminir kesalahan dari sistem (pada b), jika sinyal masukannya berupa sinyal ramp.

#### Penyelesaian.

a. Grafik aliran sinyal dapat digambarkan sebagai berikut :



Dari grafik aliran sinyal diatas :

$$\frac{\theta_o}{\theta_i}(s) = \frac{K}{Js^2 + fs + K} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \left(\frac{f}{J}\right)s + \frac{K}{J}}$$

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2 = \frac{60}{10} = 6 \text{ atau } \omega_n = \sqrt{6}$$

$$\frac{f}{J} = 2\xi\omega_n = 2 \times 0,3 \times \sqrt{6} = 0,6\sqrt{6}$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i}(s) = \frac{6}{s^2 + 0,6\sqrt{6}s + 6}$$

Integral dari setiap bagian diperoleh :

$$\begin{aligned} ISTE &= \frac{1}{2\omega_n^2(1-\xi^2)} \left[ \frac{1}{4\xi^2} - (2\xi^2 - 1) \frac{(2\xi^2 - 1)}{4} + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{2} \xi \sqrt{1-\xi^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega_n^2} \left[ \frac{1}{4\xi^2} + 2\xi^2 \right] \end{aligned}$$

Untuk harga  $\omega_n$  yang tetap, ISTE dapat diminimalisir yaitu  $\xi = \frac{1}{(8)^{\frac{1}{4}}} = 0,60$ .

Kini dari grafik aliran sinyal diatas :

$$\frac{\theta_e}{\theta_i}(s) = \frac{s(Js + f)}{Js^2 + fs + K} = \frac{s(s + 0,6\sqrt{6})}{s^2 + 0,6\sqrt{6}s + 6}$$

$$\theta_i(s) = \frac{0,04}{s^2}$$

b. Kesalahan tunaknya :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \times \frac{0,04}{s^2} \times \frac{s(s + 0,6\sqrt{6})}{s^2 + 0,6\sqrt{6}s + 6} = 0,0098 \text{ rad} \right]$$

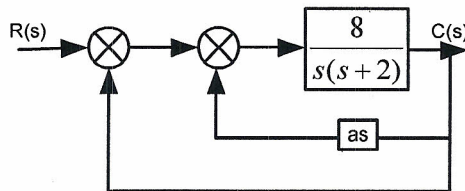
c. Fungsi alih baru dari sistem berkaitan dengan integral kesalahan, menjadi :

$$\left( K + \frac{K_i}{s} \right) = \frac{K_s + K_i}{s} \Rightarrow \text{jika diatasi lebih dari satu kali integral arah maju,}$$

maka sistem menjadi orde-2 dan  $e_{ss}$  akan tereduksi hingga nol untuk input ramp.

2) Gambar skema berikut ini merupakan ilustrasi dari sistem kendali dengan feedback satuan dengan sebuah loop feedback minor (feedback derivatif keluaran).





- Tentukan frekuensi alami dan faktor redaman dari sistem saat feedback derivatif keluarannya terbuka ( $a = 0$ ). Hitung pula kesalahan tunak yang dihasilkan bila masukannya sinyal ramp.
- Hitung konstanta feedback derivatif "a" yang akan memberikan frekuensi redaman sebesar 0,70. Berapakah ratio kesalahan tunak terhadap input ramp tersebut dengan harga "a" yang baru tadi.
- Bagaimanakah caranya mereduksi ratio kesalahan tunak terhadap input sinyal ramp dengan faktor redaman seperti pada (a), sementara redaman yang baru tetap 0,70.

**Penyelesaian.**

- a. Dengan  $a = 0$ , persamaan karakteristik sistemnya adalah :

$$s(s+2)+8=0$$

$$s^2+2s+8=0$$

$$\omega_n = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$2\xi\omega_n = 2$$

$$\diamond \xi = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,353$$

$$\text{Konstanta sistem } K_v = \frac{8}{2} = 4$$

$$\diamond e_{ss} \text{ (untuk input ramp)} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- b. Dengan derivatif feedback ( $a \neq 0$ ), persamaan karakteristik sistemnya :

$$1+G(s) = 1 + \frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1 + \frac{8as}{s(s+2)}}$$

$$s^2 + (2 + 8a)s + 8 = 0$$

$$2\xi\omega_n = 2 + 8a$$

$$2 \times 0,70 \times 2\sqrt{2} = 2 + 8a$$

$$a = 0,245$$

$$\text{Konstanta sistem } K_v = \frac{8}{(2 + 8a)}$$

$$\diamond e_{ss} = \frac{(2 + 8a)}{8} = 0,495$$

- c. Katakanlah harga penguatan arah maju sebesar 8 dapat diatur lebih besar dari  $K_A$ , sehingga persamaan karakteristik sistemnya adalah :

$$s^2 + (2 + aK_A)s + K_A = 0$$

$$2\xi\omega_n = 2 + aK_A \dots\dots\dots (V-44)$$

$$2 \times 0,70\sqrt{K_A} = 2 + aK_A$$

$$\text{Konstanta sistem } K_v = \frac{K_A}{(2 + aK_A)}$$

$$\diamond e_{ss} = \frac{(2 + aK_A)}{K_A} = 0,25 \dots\dots\dots (V-45)$$

Dari persamaan (V-42) dan (V-43), didapat :

$$K_A = 31,36 \text{ dan } a = 0,186.$$

Solusi alternatif untuk menaikkan penguatan  $K_A$ , yaitu dengan menambah sebuah amplifier diantara kedua blok "summing point". Dengan demikian persamaan karakteristik sistem yang baru menjadi :

$$1 + G(s) = 1 + K_A \frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1 + \frac{8as}{s(s+2)}} = 0$$

$$s^2 + (2 + 8a)s + 8K_A = 0$$

$$\diamond 2\xi\omega_n = 2 + 8a$$

$$2 \times 0,70 \times 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{K_A} = 2 + 8a \dots\dots\dots (V-46)$$

$$\text{Konstanta sistem } K_v = \frac{8K_A}{(2+8a)}$$

$$e_{ss} = \frac{(2+8a)}{8K_A} = 0,25 \dots\dots\dots (V-47)$$

Dari persamaan (V-44) dan (V-45), didapat :

$$K_A = 3,92 \text{ dan } a = 0,73$$

**Note :** dari penyelesaian kedua ini diharapkan penguatannya lebih kecil dimana tingkat penguatannya terpisah atau tersendiri.

### Soal-soal Latihan

1. Fungsi alih loop tertutup dari suatu sistem dengan feedback sistem dinyatakan

sebagai  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ , dimana K dan T berupa konstanta positif.

Bagaimanakah cara mereduksi konstanta amplifier ( $K_A$ ) agar lewatan puncak (overshoot) dari sistem yang memakai sinyal masukan "step" juga dapat direduksi dari 75% menjadi 25% ?

2. Fungsi alih loop tertutup dari sistem servo dengan feedback satuan adalah

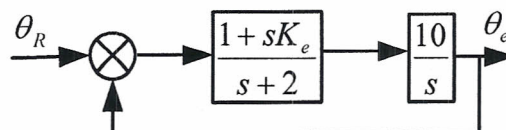
$G(s) = \frac{10}{s(0,1s+1)}$ . Evaluasilah besarnya konstanta kesalahan ( $K_p, K_v$ , dan

$K_A$ ) dari sistem dimaksud. Cari pula kesalahan tunak sistem bila sinyal

masukannya berupa polinomial  $p(t) = a_0 + a_1t + \frac{a_2}{2}t^2$ .

3. Gambar dibawah ini mengilustrasikan sesuatu sistem yang memanfaatkan

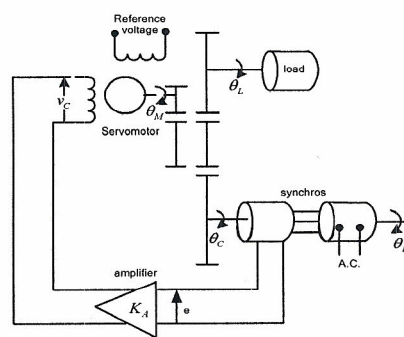
pengatur proporsional plus tentang kealahan. tentukan faktor rentang kesalahan  $K_e$  agar faktor reamannya 0,50. tentukan pula besarnya waktu penetapan, lewatan maksimum dan kesalahan tunak ( untuk sinyal masukan ramp ) tanpa dan pakai pengatur rentang kesalahan. Berikan komentar tentang penggunaan pengatur rentang kesalahan dalam sistem tersebut.



4. Sebuah servo motor (mekanik) digunakan untuk mengendalikan posisi sudut putar ( $\theta_0$ ) sebuah masa yang diatur melalui sinyal masukan ( $\theta_i$ ). Momen ineria pada poros beban yang bergerak =  $200 \text{ kgm}^2$  dan torsinya sebesar  $6,88 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$  kesalahan. Torsi redaman yang dirasakan pada poros beban =  $5 \times 10^3 \text{ Nm/rad/sec}$ .
- Tentukan tanggapan waktu dari servo mekanik tersebut dengan masukan sinyal "step" sebesar satu radian.
  - Tentukan frekuensi osilasi transient, waktu naik hingga lewatan puncak, dan lewatan puncaknya itu sendiri.
  - Tentukan kesalahan tunak yang terjadi bila sinyal masukannya berupa kecepatan sudut putar sebesar satu rpm.
  - Tentukan kesalahan tunak yang terjadi bila torsi pada poros beban tetap sebesar 1200 Nm.
5. Pada sistem kendali posisi sebagaimana gambar dibawah ini, sensitifitas dari detektor kesalahan sinkronya =  $1\text{V}/^\circ \text{ error}$ . Fungsi alih dari motor dinyatakan sebagai :

$$\frac{\theta_m(s)}{V_c(s)} = \frac{K_M}{s(s\tau_M + 1)} ; \text{dimana } K_M = 15 \text{ rad/sec/volt dan}$$

$$\tau_M = 0,15 \text{ sec}$$



- Jika poros masukan diputar dengan kecepatan konstan sebesar  $\pi \text{ rad/sec}$ , tentukan besarnya penguatan dari amplifier (anggap simpangan antara posisi input dan output lebih kecil dari  $5^\circ$ ).

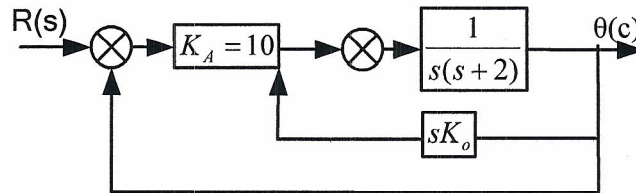
- b. Untuk menambah kecepatan putar sistem dapat dilakukan melalui modifikasi masukan berupa penjumlahan derivatif sedemikian agar keluaran yang dihasilkan :  $V_C(t) = K_A e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt}$ . Selanjutnya tentukan harga  $K_D$  agar faktor redamannya = 0,50. Adakah efek dari modifikasi ini terhadap kesalahan tunak pada (a)? Hitung waktu penetapannya dan bandingkan hasilnya dengan yang diperoleh pada (a).
6. Sistem kendali motor dc penguat medan terpisah dengan arus armatur konstan, detektor kesalahan potensio motor, amplifier dc dan sebuah tachogenerator yang seporos dengan motor. Output tachogenerator diumpan balikkan guna mendapatkan kestabilan sistem. Beberapa besaran penting dari sistem antara lain diketahui :

- Momen inersia motor,  $J_M$   $= 2 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
- Momen inersia beban,  $J_L$   $= 5 \text{ kgm}^2$
- Rasio gear motor dengan beban,  $\frac{\theta_L}{\theta_M}$   $= \frac{1}{50}$
- Rasio gear dengan potensiometer,  $\frac{\theta_L}{\theta_C}$   $= 1$
- Konstanta torsi motor,  $K_T$   $= 2 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$
- Konstanta tachogenerator,  $K_t$   $= 0,2 \frac{\text{V}}{\text{rad/sec}}$
- Sensitifitas detektor kesalahan,  $K_p$   $= 0,6 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$
- Penguatan dari amplifier  $= K_A \frac{\text{Amp}}{\text{Volt}}$

Gesekan motor dan beban serta konstanta waktu kumparan medan diabaikan.

- a. Gambarkan sekematik diagram dari sistem tersebut.
- b. Tentukan fungsi alih dari sistem tersebut.
- c. Hitung konstanta yang diperlukan dan tegangan umpan balik dari tachogenerator agar sistem tersebut mempunyai frekuensi alami sebesar 4  $\text{rad/sec}$  dan faktor redaman = 0,80.

7. Sistem kendali berumpan balik memakai redaman rentang keluaran seperti tergambar dibawah.



- Hitunglah frekuensi alami dan faktor redaman dari sistem pada saat tanpa derivatif feedback ( $K_0 = 0$ ). Berapakah kesalahan tunaknya bila masukannya berupa sinyal "ramp" ?
- Hitunglah konstanta derivatif feedback  $K_0$  bila faktor redaman sistem = 0,60. berapakah kesalahan tunak yang dihasilkan dengan  $K_0$  tersebut bila masukannya tetap sama (ramp).
- Jelaskan, bagaimana kesalahan tunak sistem seperti pada (b) tadi agar hasilnya tetap seperti pada (a), sementara faktor redamannya juga tetap = 0,60.