

25. PENGKAJIAN MENDALAM TTG LIMIT

- Perhatikan kembali: $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$
 - Definisi Informalnya:

“Jika x mendekati 1, tetapi $x \neq 1$, maka $f(x)$ mendekati 3”
- Bgm dgn: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$?
 - Definisi Informalnya:

“Jika x mendekati c , tetapi $x \neq c$, maka $f(x)$ mendekati L ”

Dgn kata lain, selisih antara $f(x)$ antara L dapat dibuat sekecil mungkin dgn mensyaratkan x cukup dekat tetapi tdk sama dgn c .

Misal ε dan δ bil. bulat positif dan kecil.

Pernyataan:

i.

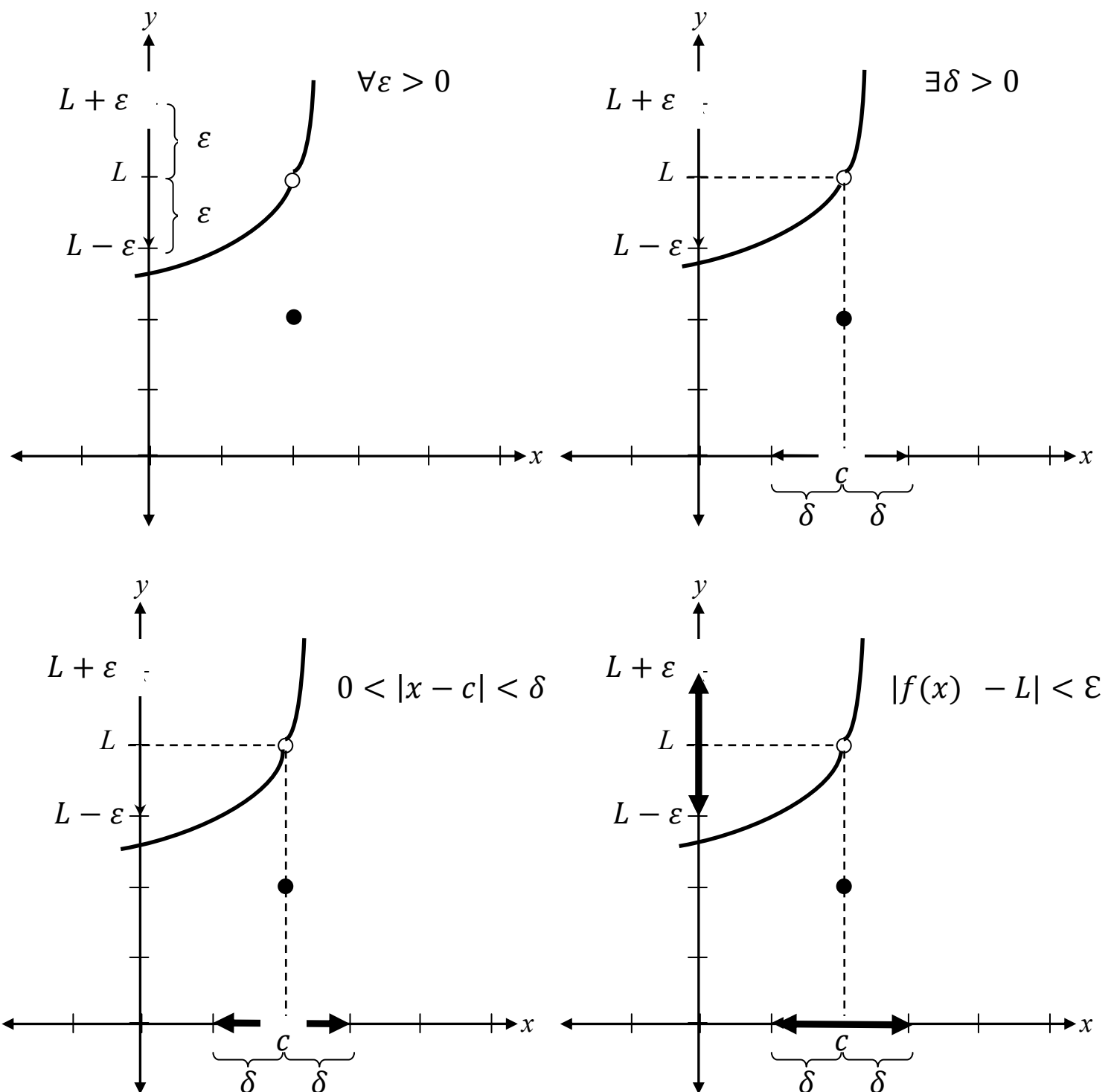
$$\left. \begin{array}{l} x \text{ mendekati } c : |x - c| < \delta \\ x \neq c : |x - c| > 0 \end{array} \right\} \therefore 0 < |x - c| < \delta$$

(ii). $f(x)$ mendekati L : $|f(x) - L| < \epsilon$

Dari (i) & (ii),

❖ Definisi Limit

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \epsilon$.



❖ Pembuktian Limit

Contoh 1:

Buktikan $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 5 = -1$

Jawab:

$\forall \varepsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$, sgh jika $0 < |x - 2| < \delta$ maka $|(2x - 5) - (-1)| < \varepsilon$.

- Analisis Pendahuluan

Dlm rangka mencari δ (yg tergantung pd ε), perhatikan pertaksamaan:

$$|(2x - 5) - (-1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$|2(x - 2)| < \varepsilon$$

$$|2||x - 2| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dlm hal ini dgn mengambil akan $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ akan memenuhi.

- Bukti formal

$\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ shg jika $0 < |x - 2| < \delta$

maka:

$$\begin{aligned} |(2x - 5) - 1| &= |2x - 4| = |2(x - 2)| \\ &= 2|x - 2| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (\text{Terbukti}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Contoh 2:

Buktikan $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

Jawab:

$\forall \varepsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$, sgh jika $0 < |x - 5| < \delta$

maka $\left| \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) - 10 \right| < \varepsilon$.

- Analisis Pendahuluan

Dlm rangka mencari δ (yg tergantung pd ε), perhatikan pertaksamaan:

$$\left| \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) - 10 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \left(\frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \right) - 10 \right| < \varepsilon$$

$$|x + 5 - 10| < \varepsilon$$

$$|x - 5| < \varepsilon$$

Dlm hal ini dgn mengambil akan $\delta = \varepsilon$ akan memenuhi.

- Bukti formal

$\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \varepsilon$ shg jika $0 < |x - 5| < \delta$

maka:

$$\left| \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) - 10 \right| = \left| \left(\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} \right) - 10 \right| =$$

$$|x + 5 - 10| = |x - 5| < \delta = \varepsilon. \text{ (Terbukti)} \quad \blacksquare$$

Soal.

Buktikan:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow c} mx + b = mc + b$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}, c > 0$$