FUNGSI LOGARITMA ASLI

$D_x(\dots..) = x^2$

$D_x(\dots..) = x$

$D_x(\dots..) = 1 = x^0$

$D_x(\dots..) = x^{-1}$

$D_x(\dots..) = x^{-2}$

$D_x(\dots..) = x^{-3}$

Definisi

Fungsi logaritma asli, dinyatakan oleh ln, didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

(Daerah asalnya adalah $\mathcal{R}$).

❖ Turunan Logaritma Asli

$$\boxed{D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0}$$

Lebih umumnya,

Jika $u = f(x) > 0$ dan *f* terdifferensialkan, maka:

$$\boxed{D_x(\ln u) = \frac{1}{u}.D_x u = \frac{u'}{u} \quad , \quad x > 0}$$

<u>Contoh</u>: Hitunglah

1. $D_x\left(ln\sqrt[3]{x}\right)$
2. $D_x(ln|x|)$

$$\boxed{D_x(ln|x|) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0}$$

❖ Integral Logaritma Asli

Dari contoh 2, mengimplikasikan bahwa:

$$\boxed{\int \frac{1}{x} \quad dx = \; ln|x| + C \, , \quad x \neq 0}$$

atau lebih umumnya jika $u = f(x) > 0$,

$$\int \frac{1}{u} \quad du = \; ln|u| + C \, , \quad u \neq 0$$

<u>Contoh</u>:

1. $\int \frac{x}{x^2+4} dx$ 2. $\int \frac{2lnx}{x} dx$ 3. $\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2} dx$

<u>**Teorema**</u>: Sifat-sifat Logaritma Asli

Jika a dan b bilangan positif dan r bil. rasional, maka

(i). ln 1 = 0

(ii). ln ab = ln a + ln b

(iii). ln $\frac{a}{b}$ = ln a – ln b

(iv). ln a^r = r ln a

Contoh:

1. Tentukan turunan dari $y = ln\sqrt[3]{\frac{(x+2)}{x^5}}, \quad x > 1.$

❖ **Pendifferensialan Logaritma**

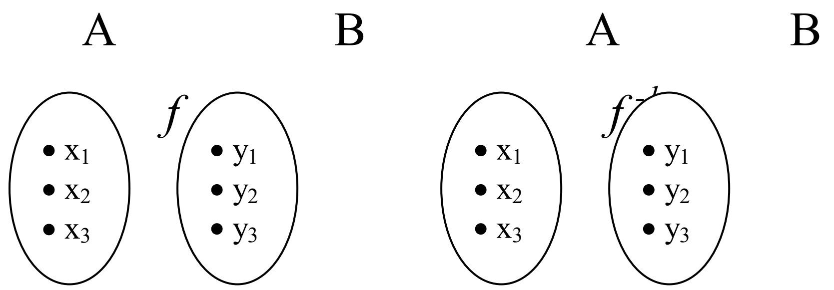
Menghitung turunan yang melibatkan hasil kali, hasil bagi, pemangkatan suatu fungsi dapat dibantu dgn menerpakan fs. Logaritma asli & sifat2nya. Metode ini disebut dgn Pendifferensialan Logaritma.

Contoh:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ utk $y = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{(x+3)^{1/3}}$

❖ **Grafik Logaritma Asli**

7.2. Fungsi Balikan dan Turunannya



Misal f fungsi dari himpunan ke himpunan B, adalah f^{-1} fungsi balikan dari f.

Contoh 1.

Diketahui $f(x) = 2x$, fungsi balikan dari f yaitu $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Contoh 2.

Diketahui $f(x) = x^2$, fungsi balikan dari f yaitu ...

Kriteria bahwa suatu fungsi memiliki balikan adalah fungsi tersebut harus monoton murni, atau fungsi tersebut pada daerah asalnya berupa fungsi naik atau fungsi turun. Suatu fungsi f dikatakan monoton murni jika f '(x) > 0. Pada contoh 1, f(x) = 2x adalah fungsi monoton murni sehingga fungsi f memiliki fungsi balikan. Jika f mempunyai fungsi balikan yaitu f^{-1}, maka f^{-1} juga memiliki balikan yaitu f.

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Gambar 1 Gambar 2

Langkah – langkah untuk mencari rumus untuk f^{-1} (x) yaitu

1. Selesaikan persamaan y = f(x) untuk x dalam y
2. Gunakan f^{-1} (y) untuk menamai ekspresi yang dihasilkan dalam y

3. Gantikan yang x untuk mendapatkan rumus untuk f^{-1} (x)

Contoh 3. Carilah f^{-1} (x) jika f(x) $= -\frac{1}{x-3}$.

y $= -\frac{1}{x-3}$ ⇔ y(x – 3) = – 1 ⇔ xy – 3y = – 1 ⇔ xy = 3y – 1 ⇔ x $= \frac{3y-1}{y}$. Diperoleh f^{-1} (x) $= \frac{3x-1}{x}$.

7.3. Fungsi Eksponen Asli

Definisi

Balikan dari fungsi ln disebut fungsi fungsi eksponen asli (exp).

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Gambar

Dari definisi di atas diperoleh

1. exp (ln x) = exp (y) = x; x > 0
2. ln (exp y) = ln (x) = y; untuk semua y

Definisi

Huruf e adalah bilangan real positif yang bersifat ln e = 1 dengan $e \approx 2{,}718281828459045$.

ln e = 1

ln 1 = 0

Dapat diperlihatkan jika r bilangan rasional, exp r identik dengan e^r.

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Dan jika x bilangan real, maka $e^x = \exp x$

Sifat – Sifat Fungsi Eksponen Asli

(i). $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

(ii). $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Turunan dari fungsi eksponen asli adalah $D_x\, e^x = e^x$.

Bukti: $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = \ln e^x = x \ln e \Leftrightarrow x = \ln y$, sehingga $D_x\, x = D_x(\ln y) \Leftrightarrow$

$1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y = e^x$. Terbukti $D_x\, e^x = e^x$.

Hal ini dapat dikombinasikan dengan aturan rantai. Jika $u = f(x)$ dan jika f terdeferensialkan, maka $D_x\, e^u = e^u\, D_x\, u$.

Contoh 1. Carilah $D_x(e^{x^2+2})$

Misalkan $u = x^2 + 2$, maka $D_x\, u = 2x$.

Diperoleh $D_x(e^{x^2+2}) = D_x(e^u) = e^u\, D_x\, u = 2x\, e^{x^2+2}$.

Dari setiap rumus turunan selalu terdapat rumus pengintegralan yang berpadanan. Diperoleh $\int D_x e^e\, dx = \int e^x\, dx$ $\Leftrightarrow$ $e^x + c = \int e^x\, dx$, atau dengan u menggantikan x $e^u + c = \int e^u\, du$.

7.4. Fungsi Eksponen Umum

Misal r bilangan rasional maka $r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$.

$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}$

(i). Untuk x bilangan real, $a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$

(ii). $\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a \ln e = x \ln a$

Sifat – Sifat Fungsi Eksponen Umum

Misal: a > 0, b > 0, x, y, bilangan real

(i). $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(ii). $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii). $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv). $(ab)^x = a^x b^y$

(v). $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

Turunan fungsi pangkat $f(x) = x^a$ adalah $D_x\ x^a = ax^{a-1}$, dan turunan fungsi $g(x) = a^x$ yaitu $D_x\ a^x = a^x \ln a$

Bukti: $D_x\ (a^x) = D_x\ (e^{x \ln a}) = e^{x \ln a}\ D_x\ (x \ln a) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

Dan pengintegralan untuk $f(x) = a^x$ yaitu

$\int D_x a^x dx = \int a^x \ln a\ dx \quad \Leftrightarrow \quad a^x + c = \ln a \int a^x dx$, diperoleh $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \neq 1$ atau dengan u menggantikan x maka $\int a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, a \neq 1$.

7.5. Fungsi Logaritma Umum

Definisi

Jika $a > 0$, $a \neq 1$, $y = {}^a\log x \Leftrightarrow x = a^y$

${}^e\log x = \ln x$

D_x ($^a\log x$) = …

y = $^a\log x \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow \ln x = \ln a^y \Leftrightarrow \ln x = y \ln a \Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$, sehingga

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$. Jadi D_x ($^a\log x$) = $\frac{1}{x \ln a}$ + c.

Contoh 1. D_x ($^5\log 25$) = $\frac{1}{25 \ln 5}$ + c.

Contoh 2. $D_x (x^x) = D_x (e^{x \ln x}) = e^{x \ln x} D_x (x \ln x) = e^{x \ln x} (\frac{x}{x} + \ln x)$.

7.6. Fungsi Balikan Trigonometri

Kriteria suatu fungsi y = *f*(x) mempunyai invers adalah

a. merupakan fungsi satu – satu; jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$

b. tiap garis datar memotong grafik tersebut pada paling banyak 1 titik

c. f monoton murni, yaitu fungsi naik pada interval I atau turun pada I

d. f ‘(x) > 0 atau f ‘(x) < 0

Agar suatu fungsi yang tak memiliki balikan dalam daerah asal alaminya, mempunyai suatu balikan (invers), maka daerah asal fungsi (D_f) dapat dibatasi (sehingga fungsi tersebut naik atau turun saja), dan range fungsi (R_f) dapat dipertahankan seluas mungkin.

Contoh: $f(x) = y = \sin x \Leftrightarrow x = \sin^{-1} y$ atau $f^{-1}(x) = \sin^{-1} y = \text{arc} \sin y$

Jika peran x diganti dengan y, maka grafik dari $f^{-1}(x)$ indentik dengan grafik $f(x)$, yaitu pencerminan dari grafik $f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Definisi

Untuk memperoleh balikan dari sinus, daerah asal fungsi dapat dibatasi pada selang $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sehingga $x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x$ dan $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Hal ini juga berlaku pada fungsi – fungsi trigonometri lainnya, fungsi cosinus, tan, sec, cosec, dan cot, dengan selang terbatas yang pastinya juga berbeda, yaitu

(a). $x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x$ dan $0 \le x \le \pi$.

(b). $x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x$ dan $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(c). $x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x$ dan $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$.

Contoh:

1. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} =$
2. $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$
3. $\tan^{-1} (-\sqrt{3}) =$
4. $\sin^{-1} (\sin\frac{3\pi}{2}) =$
5. $\cos^{-1} (\cos^{-1} 0{,}6) =$
6. $\sec^{-1}(2) =$

Empat kesamaan yang berguna

(i). $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

(ii). $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

(iii). $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$

(iv). $\tan(\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$

7.7. Fungsi Trigonometri : Turunan

Ingat kembali, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$,

turunan dari masing-masing fungsi tersebut dapat dicari, yaitu:

Contoh 1. $D_x \cot x = D_x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$.

Dapat diperoleh turunan dari masing – masing fungsi tersebut:

$D_x \sin x = \cos x$ $D_x \cos x = -\sin x$

$D_x \tan x = \sec^2 x$ $D_x \cot x = -\csc^2 x$

D_x sec x = sec x tan x D_x cosec x = csc x cot x

Jika u = $f(x)$, maka D_x sin u = cos u D_x (Aturan Rantai). Hal ini berlaku pula pada fungsi – fungsi yang lainnya (cos, tan, dan lain – lain).

Contoh 1. $D_x \sin(3x^2 + 4) = \ldots$

Ambil $u = 3x^2 + 4$, diperoleh $D_x u = 6x$

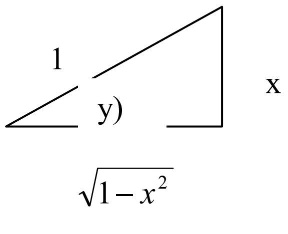
Jadi $D_x \sin(3x^2 + 4) = D_x \sin u = \cos u \, D_x u = \cos(3x^2 + 4)\, 6x$.

Contoh 2. Carilah turunan fungsi y = cot x sec x

Contoh 3. $y = \frac{x^2}{1 - \tan x}$, maka $D_x y = \ldots$

Turunan Fungsi Balikan Trigonometri

(i). $y = \arc\sin x = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$

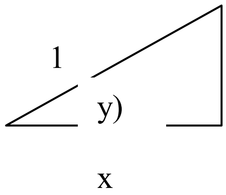


$x = \sin y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \ldots$

$\frac{dx}{dy} = \ldots \rightarrow \frac{dy}{dx} =$

$y = \sin^{-1} x \rightarrow D_x (\sin^{-1} x) =$ ……………….., $-1 < x < 1$

(ii). $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$



$x = \cos y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \ldots$

$y = \cos^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \ldots$

$y = \cos^{-1} x \rightarrow D_x (\cos^{-1} x) =$ …………….., $-1 < x < 1$

(iii). $y = \tan^{-1} x \rightarrow D_x (\tan^{-1} x) =$ ……………..

(iv). $y = \sec^{-1} x \rightarrow D_x (\sec^{-1} x) =$ …………….., $|x| > 1$

Contoh 1. Carilah D_x arc cos (x^2)

Ambil $u = x^2$, maka $D_x (x^2) = 2x$.

$D_x \text{ arc cos } (x^2) = D_x \text{ arc cos } u = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} D_x u = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Contoh 2. $D_x \tan^{-1} \sqrt{x+1} = \ldots$

Dari sebelumnya, diperoleh:

(i). $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

(ii). $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$

(iii). $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c$