LOGIKA MATEMATIKA

Oleh

NUR INSANI, M.SC

Disadur dari

BUDIHARTI, S.Si.

- Logika adalah ilmu yang mempelajari secara sistematis kaidah-kaidah penalaran yang absah/valid.
- Ada dua macam penalaran, yaitu: penalaran deduktif dan penalaran induktif.

Penalaran deduktif

- Penalaran deduktif adalah penalaran yang didasarkan pada premis-premis yang diandaikan benar untuk menarik suatu kesimpulan dengan mengikuti pola penalaran tertentu.
- Contoh:

Premis 1	:	Semua mahasiswa baru mengikuti OSPEK.
Premis 2	:	Wulandari adalah mahasiswa baru.
Kesimpulan	:	Wulandari mengikuti OSPEK.

Penalaran induktif

- Penalaran induktif adalah penalaran yang didasarkan pada premis-premis yang bersifat faktual untuk menarik kesimpulan yang berlaku umum.
- Contoh:

Premis 1	:	Ayam-1 berkembang biak dengan telur.
Premis 2	:	Ayam-2 berkembang biak dengan telur.
Premis 3	:	Ayam-3 berkembang biak dengan telur.
Premis 4	:	Ayam-4 berkembang biak dengan telur.
:		
:		
:		
Premis 50	:	Ayam-50 berkembang biak dengan telur.
Kesimpulan	:	Semua ayam berkembang biak dengan telur.

Logika Matematika

- Logika Matematika/Logika Simbol ialah Logika yang menggunakan bahasa Matematika, yaitu dengan menggunakan lambang-lambang atau simbol- simbol.
- Keuntungan/ kekuatan bahasa simbol adalah: ringkas, univalent/bermakna tunggal, dan universal/dapat dipakai dimana-mana.
- Logika mempelajari cara penalaran manusia, sedangkan penalaran seseorang diungkapkan dalam bahasa berupa kalimat-kalimat. Dengan demikian logika mempelajari kalimat-kalimat yang mengungkapkan atau merumuskan penalaran manusia.

PROPOSISI / PERNYATAAN

Proposisi : Suatu kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya.

Nilai benar / salah suatu proposisi disebut NILAI KEBENARAN pernyataan tersebut.

Nilai kebenaran tergantung pada realitas.

PROPOSISI (lanjutan)

Proposisi dikelompokkan menjadi 2 :

1. Proposisi sederhana :

tidak mengandung kata hubung

2. Proposisi majemuk

terdiri atas satu atau lebih pernyataan

sederhana yang dihubungkan dengan kata hubung.

PROPOSISI/PERNYATAAN

- Contoh:
  1. Bangkok adalah ibukota Thailand.
  2. 9 adalah bilangan genap.
  3. Badak itu memiliki gading.
  4. 3 lebih tua daripada 5
  5. Setahun terdiri dari 52 minggu.
  6. $8 + 4 = 12$
  7. Mengapa kamu menangis?
  8. $3 > 5$
  9. Ambilkan aku kue itu!
  10. Semoga kamu lekas sembuh!

Selidikilah kalimat-kalimat tersebut , mana yang proposisi atau bukan.

PROPOSISI/PERNYATAAN

- Pernyataan yang benar dikatakan mempunyai nilai kebenaran B (benar), sedangkan pernyataan yang salah dikatakan mempunyai nilai kebenaran S (salah).
- **Catatan:**

  Nilai kebenaran suatu pernyataan kadang-kadang ditulis dengan lambang angka 1 atau 0. Angka 1 ekuivalen dengan nilai kebenaran B, sedangkan angka 0 ekuivalen dengan nilai kebenaran S. Lambang nilai kebenaran 1 dan 0 biasanya digunakan untuk menganalisis suatu jaringan listrik

PROPOSISI/PERNYATAAN

- Kebenaran suatu pernyatan dibedakan menjadi dua, yaitu:

a) Kebenaran faktual, yaitu kesesuaian antara isi peryataan dan fakta sesungguhnya.

b) Kebenaran logis, yaitu kesesuaian dengan aturan-aturan logika.

- Dalam ilmu pengetahuan kita selalu berbicara mengenai obyek-obyek yang terbatas, tidak mengenai segala sesuatu. Keseluruhan obyek-obyek (terbatas) yang menjadi bahan pembicaraan yang sedang kita lakukan disebut semesta pembicaraan atau semesta saja dan disingkat S.

PROPOSISI/PERNYATAAN

- Untuk membicarakan anggota-anggota dari semesta biasanya digunakan lambang. Ada dua macam lambang, yaitu:

a) Konstanta, adalah lambang yang digunakan untuk menunjuk atau membicarakan anggota tertentu dari semesta.

b) Peubah, adalah lambang yang digunakan untuk menunjuk atau membicarakan anggota yang tidak tertentu (sembarang) dari semesta.

- Peubah bilangan dan disajikan dengan huruf-huruf kecil x,y,z
- Peubah pernyataan dan disajikan dengan huruf-huruf kecil p,q,r dst.

Kalimat terbuka

- Kalimat terbuka ialah kalimat yang memuat peubah, sehingga belum dapat di tentukan nilai kebenarannya.
- Kalimat semacam ini masih “terbuka” untuk menjadi pernyataan yang benar atau yang salah.
- Contoh:

  a. x adalah bilangan bulat.

  b. $x + 2 > 10$

  c. $x^2 - 3x + 5 = 0$

  d. $y = 2x + 1$
- Kita dapat mengubah suatu kalimat terbuka menjadi peryataan dengan mengganti (mensubstitusikan) semua peubah yang termuat di dalamnya dengan konstanta dari semestanya. Pernyataan yang dihasilkan bisa bernilai benar, bisa bernilai salah.

Kalimat terbuka

- Himpunan penyelesaian dari suatu kalimat terbuka ialah himpunan semua anggota dari S yang bila lambangnya disubstitusikan ke dalam peubah dari kalimat terbuka itu akan menghasikan pernyataan yang benar.
- Contoh:

  S = {Bil. Asli }

  a. $x + 2 > 10$ -→ H.P = {9,10,11,12,.....}

  b. $x^2 - x - 6 = 0$

  (x-3) (x + 2 = 0 --→ HP ={3}

  c. $x + 1 > 0$ -→ HP = S

  d. $(2x-1)(x + 3) = 0$ → HP = {   }
- Himpunan penyelesaian harus memuat semua elemen dari semesta yang menghasilkan pernyataan benar.

INGKARAN

- Ingkaran/Negasi dari suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang diperoleh dengan menambahkan kata "tidak" atau menyisipkan kata "bukan" pada pernyataan semula.
- Ingkaran dari suatu pernyataan p disajikan dengan lambang $\overline{p}$ atau –p atau ~p, dan dibaca: "tidak p".
- Bila peryataan p bernilai benar, maka ingkarannya bernilai salah dan sebaliknya.

p	$\overline{p}$
B	S
S	B

INGKARAN

- Contoh :
- Jikustik adalah sebuah kelompok band yang berasal dari Yogyakarta. (benar)

  Tidak benar bahwa Jikustik adalah sebuah kelompok band yang berasal dari Yogyakarta. (salah)

  Jikustik bukan sebuah kelompok band yang berasal dari Yogyakarta. (salah)
- Manusia mempunyai ekor (salah)

  Manusia tidak mempunyai ekor (benar)

Pernyataan Majemuk

- Pernyataan Majemuk ialah pernyataan yang terdiri dari beberapa pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan menggunakan kata hubung.
- Dalam Logika Matematika terdapat empat macam kata hubung, yaitu: (1) …..dan….., (2) …..atau….., (3) bila ………,maka…… (4) ….. bila dan hanya bila …….

Pernyataan Majemuk

- Contoh :

  a. Yogyakarta adalah kota pelajar dan (Yogyakarta) memiliki banyak objek wisata.

  b. Kurnia pergi ke kampus atau ia nonton film.

  c. Bila air dipanaskan, maka ia akan mendidih.

  d. Medan ibukota Sumatera Utara bila dan hanya bila Semarang ibukota Jawa Timur.

- Pernyataan majemuk diatas berturut-turut disebut: konjungsi ($\wedge$), disjungsi ($\vee$), implikasi ($\rightarrow$), dan ekuivalensi/biimplikasi ($\leftrightarrow$) .

KATA HUBUNG KALIMAT

Kata hubung kalimat antara lain :

1. Negasi / kontradiksi / ingkaran ($\sim$)
2. Konjungsi / dan ($\wedge$)
3. Disjungsi / atau ($\vee$)
4. Implikasi / kondisional / pernyataan bersyarat ($\rightarrow$)
5. Biimplikasi/bikondisional/pernyataan bersyarat ganda ($\leftrightarrow$)

Pernyataan Majemuk

- Nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk ditentukan oleh: nilai kebenaran dari masing-masing pernyataan tunggalnya dan kata hubung apa yang digunakan.
- Karena masing-masing pernyataan tunggalnya bisa bernilai benar atau salah, maka ada empat kemungkinan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.

Konjungsi

- Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan kata hubung ”dan” Kata hubung “dan” disajikan dengan lambang “$\wedge$”.
- Definisi:

Suatu konjungsi bernilai benar hanya bila ke dua pernyataan tunggalnya bernilai benar.

p	**q**	**p $\wedge$ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Konjungsi

- Contoh :
  a. Indonesia adalah negara Republik dan berpenduduk 200 juta jiwa.
  b. Kerbau berkaki empat dan dapat terbang.
  c. 3 adalah bilangan genap dan habis di bagi lima.

Disjungsi

- Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan kata hubung "atau" Kata hubung "atau" disajikan dengan lambang "$\vee$".
- Dalam Logika Matematika juga dibedakan dua macam "atau" Yang pertama disebut Disjungsi Inklusif (dengan lambang "$\vee$") dan yang kedua disebut Disjungsi Eksklusif (dengan lambang "$\underline{\vee}$").
- Definisi:

  a. Suatu disjungsi inklusif bernilai benar bila sekurang-kurangnya salah satu pernyataan tunggalnya benar.

  b. Suatu disjungsi eksklusif bernilai benar bila salah satu (dan tidak kedua-duanya) dari pernyataan tunggalnya benar.

$\veebar$

Disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

p	q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjungsi

- Contoh :

  a. Pak Hartono berlangganan harian Kompas atau Kedaulatan Rakyat.

  b. Anisa pergi ke perpustakaan atau ke kantin.

  c. $5 \leq 6$ (5 kurang dari atau sama dengan 6)

  d. $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota himpunan A atau himpunan B.

  e. Bila diketahui bahwa $x.y = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $x = 0$ atau $y = 0$.

- Kalau tidak dikatakan apa-apa, maka dalam Matematika biasanya yang dimaksud adalah disjungsi inklusif.

Implikasi

- Implikasi adalah peryataan majemuk yang menggunakan kata hubung ”bila …., maka ….”
- Pernyataan tunggal yang pertama disebut *anteseden* dan yang kedua disebut *konsekuen*.
- Kata hubung ”bila …., maka ….” disajikan dengan lambang ” $\Longrightarrow$”

Implikasi

- Dalam bahasa sehari-hari kita memakai implikasi dalam bermacam-macam arti, misalnya:
  a) Untuk menyatakan suatu syarat: “Bila kamu tidak membeli karcis, maka kamu tidak akan diperbolehkan masuk”.
  b) Untuk menyatakan suatu hubungan sebab akibat:” Bila kehujanan, maka Tono pasti sakit”.
  c) Untuk menyatakan suatu tanda:”Bila bel berbunyi, maka mahasiswa masuk ke dalam ruang kuliah.

Implikasi

- Definisi:

  Suatu implikasi bernilai benar bila antesedennya salah atau konsekuennya benar (jadi suatu Implikasi bernilai salah hanya apabila anteseden benar dan konsekuennya salah).

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

- Contoh

a) Bila Anindita adalah seorang pria, maka ia akan mempunyai kumis.

b) Bila bumi berputar dari timur ke barat maka matahari akan terbit disebelah barat.

c) Bila berat jenis besi lebih dari satu, maka ia akan terapung dalam air.

d) Bila berat jenis besi lebih besat dari satu, maka ia akan terapung dalam air.

e) Bila $3 > 2$, maka $6 > 4$

f) Bila $3 < 2$, maka $-3 > -2$

g) Bila $x > 10$, maka $x > 5$

- Untuk mengucapkan (menyatakan) suatu implikasi sebagai suatu pernyataan yang benar ada 3 cara .
- Misalnya : mengucapkan "A $\Longrightarrow$ B" dengan cara:

1. "Bila A, maka B"
2. "B bila A"
3. "A hanya bila B" (karena bila tidak B atau B salah, maka juga tidak A atau A salah; lihat baris keempat tabel kebenaran implikasi).

- A $\Longrightarrow$ B
- B juga disebut <u>syarat perlu</u> untuk A.

  (Suatu syarat disebut syarat perlu bila tidak terpenuhinya (salahnya) syarat tersebut mengakibatkan tidak terjadinya apa yang disyaratkan).
- A diatas disebut <u>syarat cukup</u> untuk B, karena bila A terjadi (benar) maka B juga berjadi (benar). Lihat baris pertama tabel kebenaran implikasi.

  (Suatu syarat disebut syarat cukup bila terpenuhinya syarat tersebut mengakibatkan terjadinya apa yang disyaratkannya).

Implikasi

- Contoh:
- Bila x adalah bilangan genap, maka x habis dibagi 2. x habis dibagi 2 bila x adalah bilangan genap.

  x adalah bilangan genap hanya bila x habis di bagi 2.

  "x habis di bagi 2 " merupakan syarat perlu agar " x adalah bilangan bulat "

  "x adalah bilangan bulat " merupakan syarat cukup untuk "x habis di bagi 2 "

Implikasi

- Tugas 2

1. Carilah pengertian konvers, invers dan kontraposisi dari implikasi.
2. Berilah contoh konvers,invers, dan kontraposisi, (1 pernyataan implikasi).

3. Lengkapilah tabel berikut ini!

Tentukan kolom mana yang memiliki nilai kebenaran yang sama!

1	2	3 implikasi	4 konvers	5	6	7 invers	8 kontraposisi
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B						
B	S						
S	B						
S	S						

Ekuivalensi (Biimplikasi)

- Peryataan majemuk yang menggunakan kata hubung “Bila dan hanya bila” disebut ekuivalensi atau biimplikasi. Kata hubung tersebut disajikan dengan lambanga “ $\Leftrightarrow$ ”
- <u>Definisi:</u>

Suatu ekuivalensi bernilai benar bila kedua pernyataan tunggalnya mempunyai nilai kebenaran yang sama.

p	**q**	**p $\Leftrightarrow$ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Ekuivalensi (Biimplikasi)

- Contoh:

  Suatu segitiga disebut sama kaki bila dan bila segitiga itu mempunyai dua sisi yang sama panjang (maksudnya suatu ekuivalensi:"bila dan hanya bila")

Ekuivalensi (Biimplikasi)

- Teorema:

$$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \,\&\, (b \Rightarrow a)$$

Tugas 3: lengkapi tabel berikut ini! Tentukan kolom mana yang memiliki nilai kebenaran yang sama!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q$	$-(p\rightarrow$ $)$
B	B										
B	S										
S	B										
S	S										

Negasi-negasi dari Konjungsi, Disjungsi, Implikasi & Biimplikasi

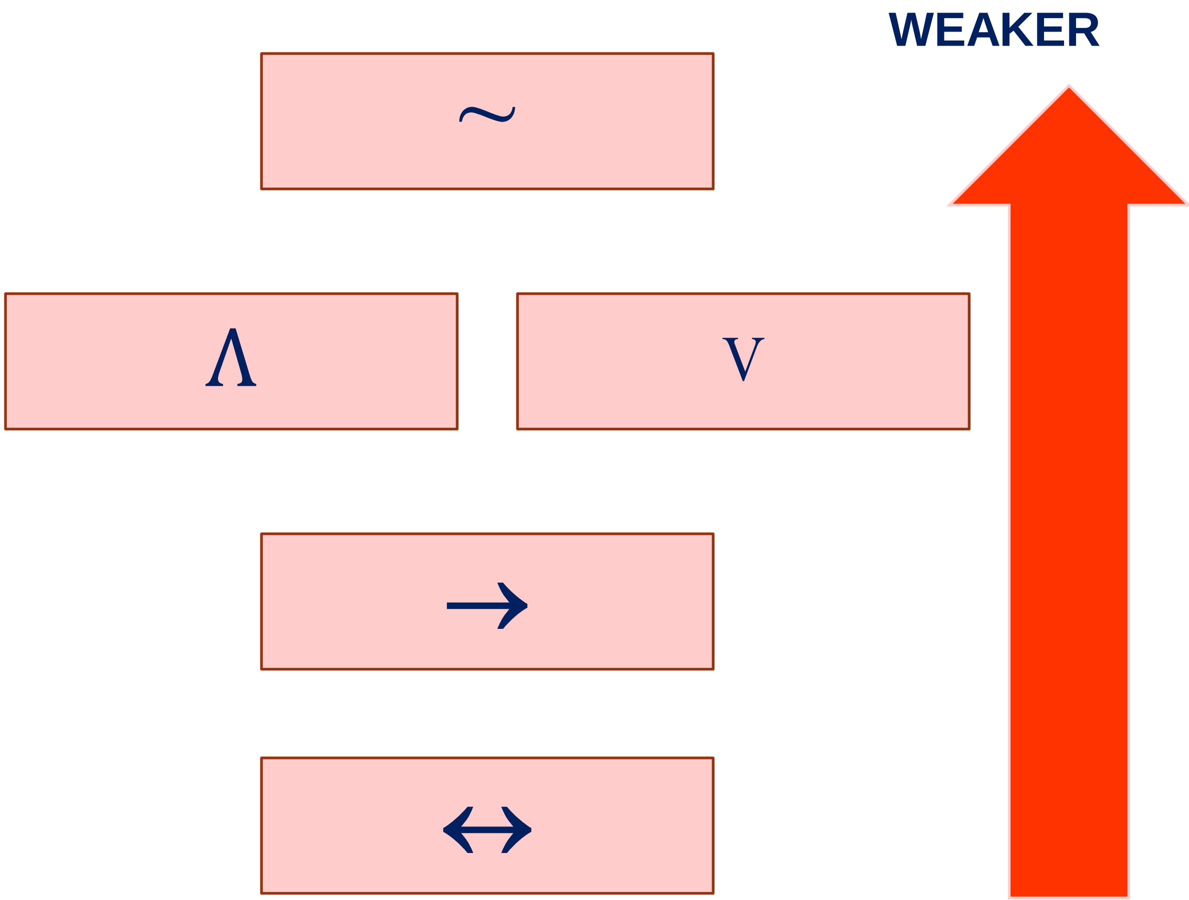
$$-(a \,\&\, b) \equiv -a \vee -b$$

$$-(a \vee b) \equiv -a \,\&\, -b$$

$$-(a \Rightarrow b) \equiv a \,\&\, -b$$

$$-(a \Leftrightarrow b) \equiv (a \,\&\, -b) \vee (b \,\&\, -a)$$

Tingkat Kekuatan Kata Hubung



Contoh

- Rumus: $p \rightarrow (q \vee r)$

  dapat ditulis menjadi: $p \rightarrow q \vee r$

- Rumus : $(\sim q) \leftrightarrow (p \wedge r)$

  dapat ditulis menjadi: $\sim q \leftrightarrow p \wedge r$

- Rumus : $((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((\sim q) \leftrightarrow (p \wedge r)))$

  dapat ditulis menjadi:

  $$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\sim q \leftrightarrow p \wedge r)$$

Tugas 4:

Kerjakanlah soal No. 3, 5, & 7 pada Latihan 3 halaman 29-30 pada buku Logika & Himpunan karya Sukirman, M.Pd.