ANALISIS REAL
(BARISAN DAN DERET)

Kus Prihantoso Krisnawan

August 30, 2012

Yogyakarta

Search for a pattern

Pada bagian ini kita akan mencoba menebak bentuk umum dari suatu barisan.

Search for a pattern

Pada bagian ini kita akan mencoba menebak bentuk umum dari suatu barisan.

Contoh: Misalkan diberikan sebuah barisan (u_n) yang didefinisikan sbb: $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ dan

$$\det \begin{bmatrix} u_{n+3} & U_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix} = n!, \quad n \geq 0.$$

Buktikan bahwa $u_n \in \mathbb{Z}$ untuk setiap n.

Search for a pattern

Jawab: Bentuk relasi rekursif dari barisan (u_n) adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$$

Search for a pattern

Jawab: Bentuk relasi rekursif dari barisan (u_n) adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$$

Perhitungan untuk beberapa suku, diperoleh

$$u_3 = \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

Search for a pattern

Jawab: Bentuk relasi rekursif dari barisan (u_n) adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$$

Perhitungan untuk beberapa suku, diperoleh

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \\ u_4 &= \frac{2 \cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 3 \end{aligned}$$

Search for a pattern

Jawab: Bentuk relasi rekursif dari barisan (u_n) adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$$

Perhitungan untuk beberapa suku, diperoleh

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \\ u_4 &= \frac{2\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 3 \\ u_5 &= \frac{3\cdot 2}{1} + \frac{2\cdot 1}{1} = 4\cdot 2 \end{aligned}$$

Search for a pattern

Jawab: Bentuk relasi rekursif dari barisan (u_n) adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$$

Perhitungan untuk beberapa suku, diperoleh

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{1\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \\
u_4 &= \frac{2\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 3 \\
u_5 &= \frac{3\cdot 2}{1} + \frac{2\cdot 1}{1} = 4\cdot 2 \\
u_6 &= \frac{4\cdot 2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2} = 5\cdot 3 \\
u_7 &= \frac{5\cdot 3\cdot 4\cdot 2}{3} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3} = 6\cdot 4\cdot 2 \\
u_8 &= \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{4\cdot 2} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 2} = 7\cdot 5\cdot 3
\end{aligned}$$

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$
Asumsikan rumus tersebut benar untuk u_{n+2}, u_{n+1}, dan u_n sehingga

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$
Asumsikan rumus tersebut benar untuk u_{n+2}, u_{n+1}, dan u_n sehingga

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)\cdots n(n-2)\cdots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots}$$

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$
Asumsikan rumus tersebut benar untuk u_{n+2}, u_{n+1}, dan u_n sehingga

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)\cdots n(n-2)\cdots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\ &= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} = \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \end{aligned}$$

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$
Asumsikan rumus tersebut benar untuk u_{n+2}, u_{n+1}, dan u_n sehingga

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)\cdots n(n-2)\cdots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\ &= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} = \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\ &= (n+2)n(n-2)\cdots \end{aligned}$$

shg dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut benar.

Search for a pattern

Kita perkirakan, rumus umum dari barisan tersebut adalah

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots$$

Selanjutnya, gunakan induksi matematika untuk menunjukkan rumus yang diperoleh adalah benar.
Untuk $n = 3$ maka $u_3 = 3 - 1 = 2$
Asumsikan rumus tersebut benar untuk u_{n+2}, u_{n+1}, dan u_n sehingga

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n} = \frac{(n+1)(n-1)\cdots n(n-2)\cdots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\ &= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} = \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\ &= (n+2)n(n-2)\cdots \end{aligned}$$

shg dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut benar.
Dan karena n bilangan bulat maka $(n+2)n(n-2)\cdots$ juga bilangan bulat.

Limit Barisan

Definisi:

i. Sebuah barisan (x_n) dikatakan konvergen menuju $L < \infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $|x_n - L| < \epsilon$ untuk setiap $n > n_\epsilon$.

Limit Barisan

Definisi:

i. Sebuah barisan (x_n) dikatakan konvergen menuju $L < \infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $|x_n - L| < \epsilon$ untuk setiap $n > n_\epsilon$.

ii. Sebuah barisan (x_n) dikatakan menuju takhingga jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $x_n > \epsilon$ untuk $n > n_\epsilon$.

Limit Barisan

Definisi:

i. Sebuah barisan (x_n) dikatakan konvergen menuju $L < \infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $|x_n - L| < \epsilon$ untuk setiap $n > n_\epsilon$.

ii. Sebuah barisan (x_n) dikatakan menuju takhingga jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $x_n > \epsilon$ untuk $n > n_\epsilon$.

Salah satu metoda untuk menentukan limit adalah the squeezing principle (teorema apit).

The squeezing principle

i. Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk setiap n dan jika (a_n) dan (c_n) konvergen ke $L < \infty$ maka (b_n) juga konvergen ke L.

Limit Barisan

Definisi:

i. Sebuah barisan (x_n) dikatakan konvergen menuju $L < \infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $|x_n - L| < \epsilon$ untuk setiap $n > n_\epsilon$.

ii. Sebuah barisan (x_n) dikatakan menuju takhingga jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian hingga $x_n > \epsilon$ untuk $n > n_\epsilon$.

Salah satu metoda untuk menentukan limit adalah the squeezing principle (teorema apit).

The squeezing principle

i. Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk setiap n dan jika (a_n) dan (c_n) konvergen ke $L < \infty$ maka (b_n) juga konvergen ke L.

ii. Jika $a_n \leq b_n$ untuk setiap n dan (a_n) menuju takhingga maka (b_n) juga menuju takhingga.

Limit Barisan

Contoh: Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real sedemikian sehinga

$$\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1} - x_n) = L.$$

Tunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke L.

Limit Barisan

Jawab: Berdasarkan hipotesis, didapat bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian sehingga jika $n \geq n_\epsilon$, berlaku

$$L - \epsilon < 2x_{n+1} - x_n < L + \epsilon$$

Limit Barisan

Jawab: Berdasarkan hipotesis, didapat bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian sehingga jika $n \geq n_\epsilon$, berlaku

$$L - \epsilon < 2x_{n+1} - x_n < L + \epsilon$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
L - \epsilon &< 2x_{n+1} - x_n < L + \epsilon \\
2(L - \epsilon) &< 4x_{n+2} - 2x_{n+1} < 2(L + \epsilon) \\
&\cdots \\
2^{k-1}(L - \epsilon) &< 2^k x_{n+k} - 2^{k-1} x_{n+k-1} < 2^{k-1}(L + \epsilon)
\end{aligned}$$

Limit Barisan

diperoleh

$$(1+2+\cdots+2^{k-1})(L-\epsilon) \quad < \quad 2^k x_{n+k} - x_n < (1+2+\cdots+2^{k-1})(L+\epsilon)$$

Limit Barisan

diperoleh

$$
\begin{aligned}
(1+2+\cdots+2^{k-1})(L-\epsilon) &< 2^k x_{n+k} - x_n < (1+2+\cdots+2^{k-1})(L+\epsilon) \\
(1-\frac{1}{2^k})(L-\epsilon) &< x_{n+k} - \frac{1}{2^k}x_n < (1-\frac{1}{2^k})(L+\epsilon)
\end{aligned}
$$

Limit Barisan

diperoleh

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+2^{k-1})(L-\epsilon) &< 2^k x_{n+k} - x_n < (1+2+\cdots+2^{k-1})(L+\epsilon)\\ (1-\frac{1}{2^k})(L-\epsilon) &< x_{n+k} - \frac{1}{2^k}x_n < (1-\frac{1}{2^k})(L+\epsilon)\end{aligned}$$

pilih k sdm shg $|\frac{1}{2^k}x_n| < \epsilon$ dan $|\frac{1}{2^k}(L \pm \epsilon)| < \epsilon$. maka untuk $m \geq n+k$

$$L - 3\epsilon < x_m < L + 3\epsilon.$$

Limit Barisan

Contoh: Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Limit Barisan

Contoh: Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Solusi: Nilai $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ untuk setiap n.

Limit Barisan

Contoh: Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Solusi: Nilai $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ untuk setiap n.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan rumus binomial dapat diperoleh

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + x_n^n. \end{aligned}$$

Limit Barisan

Contoh: Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Solusi: Nilai $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ untuk setiap n.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan rumus binomial dapat diperoleh

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + x_n^n. \end{aligned}$$

Sehingga

$$n > \binom{n}{2} x_n^2,$$

Limit Barisan

dengan demikian

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

untuk $n \geq 2$.

Limit Barisan

dengan demikian

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

untuk $n \geq 2$.

selanjutnya, karena $0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

Limit Barisan

dengan demikian

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

untuk $n \geq 2$.

selanjutnya, karena $0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
dan karena barisan $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ konvegen ke 0 maka (x_n) konvergen ke 0.

Limit Barisan

Contoh: Misalkan (a_n) adalah barisan bilangan real dengan sifat untuk setiap $n \geq 2$ terdapat bilangan bulat k dengan $\frac{n}{2} \leq k < n$ sedemikian sehingga $a_n = \frac{a_k}{2}$. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Limit Barisan

Contoh: Misalkan (a_n) adalah barisan bilangan real dengan sifat untuk setiap $n \geq 2$ terdapat bilangan bulat k dengan $\frac{n}{2} \leq k < n$ sedemikian sehingga $a_n = \frac{a_k}{2}$. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bukti: Definisikan barisan (b_n) sbb:

$$b_n = \max\{|a_k|, 2^{n-1} \leq k < 2^n\}.$$

Limit Barisan

Contoh: Misalkan (a_n) adalah barisan bilangan real dengan sifat untuk setiap $n \geq 2$ terdapat bilangan bulat k dengan $\frac{n}{2} \leq k < n$ sedemikian sehingga $a_n = \frac{a_k}{2}$. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bukti: Definisikan barisan (b_n) sbb:

$$b_n = \max\{|a_k|, 2^{n-1} \leq k < 2^n\}.$$

Jika kita jabarkan deret ini maka didapatkan

$$\begin{aligned} b_1 &= \max\{|a_1|\} \\ b_2 &= \max\{|a_2|, |a_3|\} \\ b_3 &= \max\{|a_4|, |a_5|, |a_6|, |a_7|\} \\ &\cdots \\ b_n &= \max\{|a_{2^{n-1}}|, |a_{2^{n-1}+1}|, \cdots |a_{2^n-1}|\} \end{aligned}$$

Limit Barisan

Selanjutnya karena $a_n = \frac{a_k}{2}$ untuk $\frac{n}{2} \leq k < n$, maka $0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2}$,

Limit Barisan

Selanjutnya karena $a_n = \frac{a_k}{2}$ untuk $\frac{n}{2} \leq k < n$, maka $0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2}$,

sehingga

$$0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2} \leq \frac{b_{n-2}}{2^2} \leq \frac{b_{n-3}}{2^3} \leq \cdots \leq \frac{b_1}{2^{n-1}}$$

Limit Barisan

Selanjutnya karena $a_n = \frac{a_k}{2}$ untuk $\frac{n}{2} \leq k < n$, maka $0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2}$,

sehingga

$$0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2} \leq \frac{b_{n-2}}{2^2} \leq \frac{b_{n-3}}{2^3} \leq \cdots \leq \frac{b_1}{2^{n-1}}$$

Dengan $\lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{2^{n-1}} = 0$, maka didapat $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Limit Barisan

Selanjutnya karena $a_n = \frac{a_k}{2}$ untuk $\frac{n}{2} \leq k < n$, maka
$0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2}$,

sehingga

$$0 \leq b_n \leq \frac{b_{n-1}}{2} \leq \frac{b_{n-2}}{2^2} \leq \frac{b_{n-3}}{2^3} \leq \cdots \leq \frac{b_1}{2^{n-1}}$$

Dengan $\lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{2^{n-1}} = 0$, maka didapat $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Di lain pihak kita dapatkan $|a_n| \leq b_n$, untuk setiap n, sehingga dengan teorema squeez didapatkan bahwa
(a_n) konvergen ke 0.

Barisan Monoton

Definisi: Barisan (x_n) dikatakan **monoton naik** jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk setiap n, dan **monoton turun** jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk setiap n.

Barisan Monoton

Definisi: Barisan (x_n) dikatakan **monoton naik** jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk setiap n, dan **monoton turun** jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk setiap n.

Definisi: Barisan (x_n) dikatakan **terbatas** jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap n.

Barisan Monoton

Definisi: Barisan (x_n) dikatakan **monoton naik** jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk setiap n, dan **monoton turun** jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk setiap n.

Definisi: Barisan (x_n) dikatakan **terbatas** jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap n.

Teorema Weierstrass: Barisan monoton yang terbatas merupakan barisan konvergen.

Barisan Monoton

Contoh: Buktikan bahwa barisan (a_n), yang didefinisikan,

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}, n \geq 1$$

adalah barisan konvergen.

Barisan Monoton

Contoh: Buktikan bahwa barisan (a_n), yang didefinisikan,

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}, n \geq 1$$

adalah barisan konvergen.

Bukti: Barisan a_n adalah barisan monoton naik karena $a_n \leq a_{n+1}$.
Kita akan buktikan bahwa barisan ini terbatas.

Barisan Monoton

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{2}+\sqrt{\frac{2\cdot 2^2}{2^2}+\sqrt{\frac{3\cdot 2^3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n\cdot 2^n}{2^n}}}}} \end{aligned}$$

Barisan Monoton

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{2}+\sqrt{\frac{2\cdot 2^2}{2^2}+\sqrt{\frac{3\cdot 2^3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n\cdot 2^n}{2^n}}}}} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\sqrt{\frac{3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}} \\
&< \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}.
\end{aligned}
$$

Barisan Monoton

Misalkan $b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$

Barisan Monoton

Misalkan $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n}$

Kita tahu bahwa $b_1 = 1 < 2$, sehingga jika $b_n < 2$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n} < \sqrt{1 + 2} < 2$.

Barisan Monoton

Misalkan $b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$

Kita tahu bahwa $b_1 = 1 < 2$, sehingga jika $b_n < 2$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1+b_n} < \sqrt{1+2} < 2$.

Sehingga terbukti secara induktif bahwa $b_n < 2$ untuk setiap n.

Barisan Monoton

Misalkan $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n}$

Kita tahu bahwa $b_1 = 1 < 2$, sehingga jika $b_n < 2$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n} < \sqrt{1 + 2} < 2$.

Sehingga terbukti secara induktif bahwa $b_n < 2$ untuk setiap n.

dengan demikian $a_n < b_n\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ untuk setiap n ((a_n) terbatas).

Barisan Monoton

Misalkan $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n}$

Kita tahu bahwa $b_1 = 1 < 2$, sehingga jika $b_n < 2$ maka
$b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n} < \sqrt{1 + 2} < 2$.

Sehingga terbukti secara induktif bahwa $b_n < 2$ untuk setiap n.

dengan demikian $a_n < b_n\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ untuk setiap n ((a_n) terbatas).

Karena barisan (a_n) naik dan terbatas maka (a_n) konvergen.

Deret Berjatuhan (Telescoping Sereies)

Contoh

Tentkan hasil dari

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Deret Berjatuhan (Telescoping Sereies)

Contoh

Tentkan hasil dari

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Jawab: Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

Deret Berjatuhan (Telescoping Sereies)

Contoh

Tentkan hasil dari

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Jawab: Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

Sehingga jumlahan di atas sama dengan

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

Contoh

Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, dengan $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$$

untuk semua $n \geq 1$.

Contoh

Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, dengan $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$$

untuk semua $n \geq 1$.

Jawab: Perhatikan bahwa

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 - 1}{2}$$

Contoh

Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, dengan $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$$

untuk semua $n \geq 1$.
Jawab: Perhatikan bahwa

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 - 1}{2} = \frac{(a_k+1)(a_k-1)}{2}$$

Contoh

Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, dengan $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$$

untuk semua $n \geq 1$.

Jawab: Perhatikan bahwa

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 - 1}{2} = \frac{(a_k+1)(a_k-1)}{2}$$

sehingga

$$\frac{1}{a_{k+1}-1} =$$

Contoh

Misalkan $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, dengan $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$$

untuk semua $n \geq 1$.
Jawab: Perhatikan bahwa

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 - 1}{2} = \frac{(a_k+1)(a_k-1)}{2}$$

sehingga

$$\frac{1}{a_{k+1}-1} = \frac{1}{a_k-1} - \frac{1}{a_k+1} \tag{1}$$

untuk $k \geq 1$.

Contoh

Persamaan (1) sama dengan

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

untuk $k \geq 1$.

Contoh

Persamaan (1) sama dengan

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

untuk $k \geq 1$. Sehingga

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} \quad =$$

Contoh

Persamaan (1) sama dengan

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

untuk $k \geq 1$. Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

Contoh

Persamaan (1) sama dengan

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

untuk $k \geq 1$. Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \\
&= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

Contoh

Persamaan (1) sama dengan

$$\frac{1}{a_k+1} = \frac{1}{a_k-1} - \frac{1}{a_{k+1}-1}$$

untuk $k \geq 1$. Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} &= \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_2-1} - \frac{1}{a_3-1} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} \\
&= \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+1}-1}.
\end{aligned}$$

Contoh

Dengan demikian

$$\frac{1}{a_0+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}-1}+\frac{1}{a_{n+1}-1}$$

Contoh

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n+1}-1} &= \frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}-1}+\frac{1}{a_{n+1}-1} \\ &= \frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

untuk semua $n \geq 1$.

Contoh

Tentukan

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

Contoh

Tentukan

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

Jawab: Kita punya

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right)^2}}$$

Contoh

Tentukan

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

Jawab: Kita punya

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned}$$

Contoh

Tentukan

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

Jawab: Kita punya

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

Contoh

Tentukan

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$$

Jawab: Kita punya

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Contoh

sehingga

$$\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sum_{n=1}^{49} \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}}$$

Contoh

sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \sum_{n=1}^{49} \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+1}{2}} - \sqrt{\frac{1-1}{2}} + \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} + \sqrt{\frac{4+1}{2}} - \sqrt{\frac{4-1}{2}} \\ &\quad + \cdots + \sqrt{\frac{49+1}{2}} - \sqrt{\frac{49-1}{2}}\end{aligned}$$

Contoh

sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \sum_{n=1}^{49} \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+1}{2}} - \sqrt{\frac{1-1}{2}} + \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} + \sqrt{\frac{4+1}{2}} - \sqrt{\frac{4-1}{2}} \\
&\quad + \cdots + \sqrt{\frac{49+1}{2}} - \sqrt{\frac{49-1}{2}} \\
&= -\sqrt{\frac{2-1}{2}} + \sqrt{\frac{48+1}{2}} + \sqrt{\frac{49+1}{2}}
\end{aligned}$$

Contoh

sehingga

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \sum_{n=1}^{49} \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+1}{2}} - \sqrt{\frac{1-1}{2}} + \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} + \sqrt{\frac{4+1}{2}} - \sqrt{\frac{4-1}{2}} \\
&\quad + \cdots + \sqrt{\frac{49+1}{2}} - \sqrt{\frac{49-1}{2}} \\
&= -\sqrt{\frac{2-1}{2}} + \sqrt{\frac{48+1}{2}} + \sqrt{\frac{49+1}{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}} + 5 = 5 + 3\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Limit Fungsi

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab:

Limit Fungsi

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

Limit Fungsi

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}$$

Limit Fungsi

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$1704 = 7 \cdot 224 + 136$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48 \end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned}
1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\
224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\
136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\
88 &= 1 \cdot 48 + 40
\end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$
\begin{aligned}
1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\
224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\
136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\
88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\
48 &= 1 \cdot 40 + 8
\end{aligned}
$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned}
1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\
224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\
136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\
88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\
48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\
40 &= 5 \cdot 8
\end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\ 88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\ 48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\ 40 &= 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$
\begin{aligned}
1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\
224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\
136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\
88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\
48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\
40 &= 5 \cdot 8
\end{aligned}
$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

2. Find the gcd of $x^3 - 1$ and $x^2 - 1$!

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned}1704 &= 7 \cdot 224 + 136\\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88\\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48\\ 88 &= 1 \cdot 48 + 40\\ 48 &= 1 \cdot 40 + 8\\ 40 &= 5 \cdot 8\end{aligned}$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

2. Find the gcd of $x^3 - 1$ and $x^2 - 1$!

Answer:

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\ 88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\ 48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\ 40 &= 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

2. Find the gcd of $x^3 - 1$ and $x^2 - 1$!

Answer:

$$x^3 - 1 = x \cdot (x^2 - 1) + (x - 1)$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\ 88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\ 48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\ 40 &= 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

2. Find the gcd of $x^3 - 1$ and $x^2 - 1$!

Answer:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= x \cdot (x^2 - 1) + (x - 1) \\ x^2 - 1 &= (x + 1) \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

Example

1. Find the gcd of 1704 and 224!

Answer:

$$\begin{aligned} 1704 &= 7 \cdot 224 + 136 \\ 224 &= 1 \cdot 136 + 88 \\ 136 &= 1 \cdot 88 + 48 \\ 88 &= 1 \cdot 48 + 40 \\ 48 &= 1 \cdot 40 + 8 \\ 40 &= 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

Thus, $\gcd(1704, 224) = 8$.

2. Find the gcd of $x^3 - 1$ and $x^2 - 1$!

Answer:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= x \cdot (x^2 - 1) + (x - 1) \\ x^2 - 1 &= (x + 1) \cdot (x - 1) \end{aligned}$$