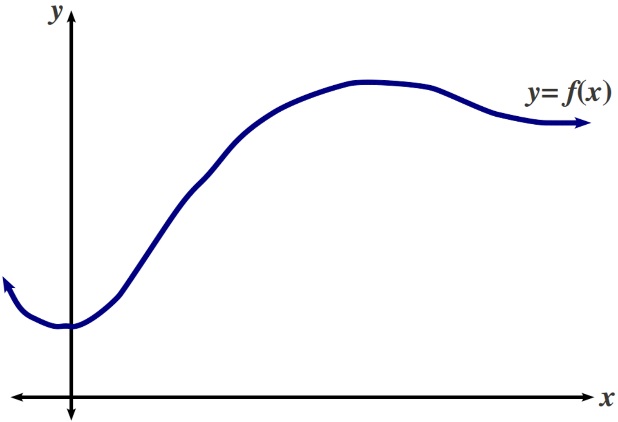
DERIVATIVE
(TURUNAN)

Kus Prihantoso Krisnawan

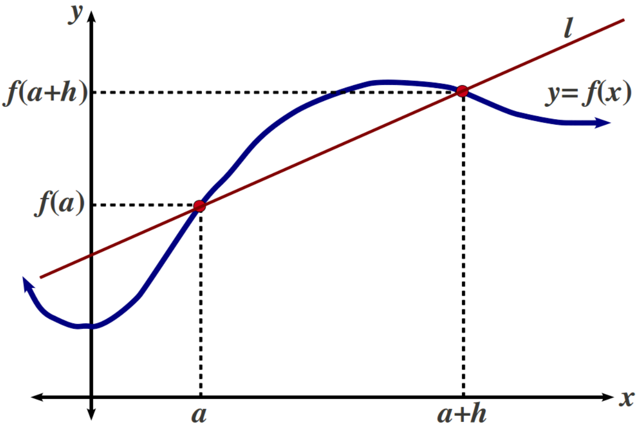
November 18^{th}, 2011

Yogyakarta

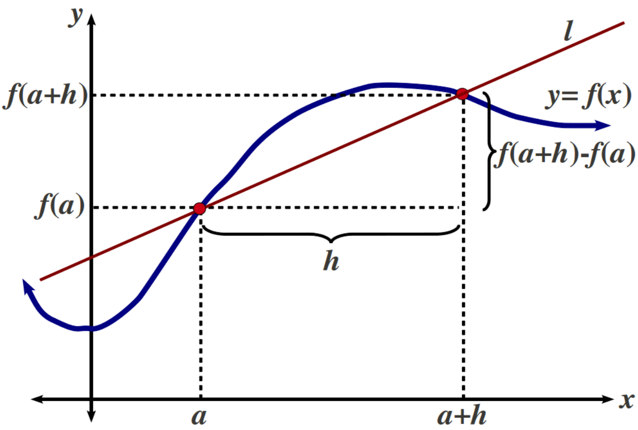
Garis Singgung



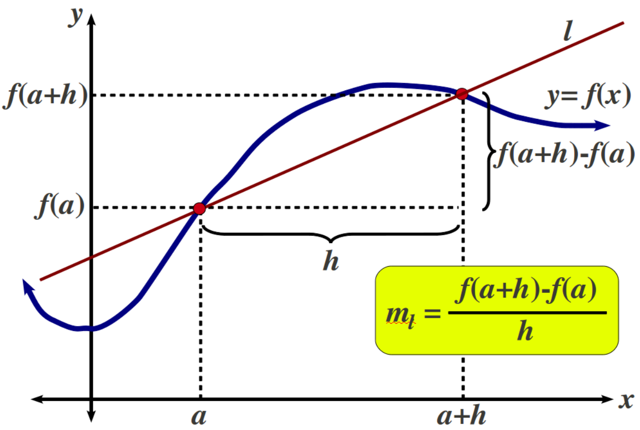
Garis Singgung



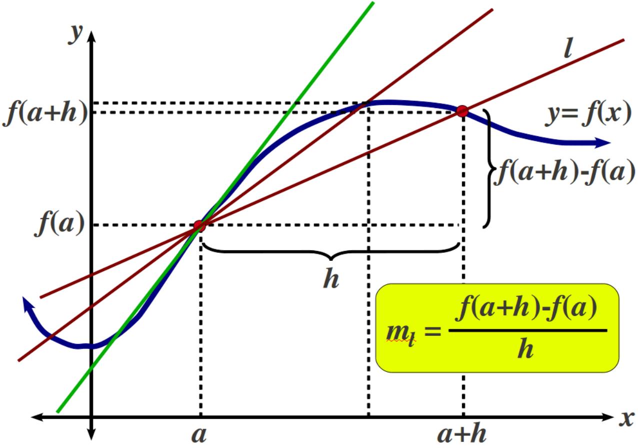
Garis Singgung



Garis Singgung



Garis Singgung



$$m_t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Garis Singgung

Jika nilai h semakin kecil (mendekati/limit 0) maka garis l berubah menjadi garis singgung dari kurva $f(x)$ di titik a (garis warna hijau) dengan kemiringan (gradien) dari garis l didefinisikan sebagai

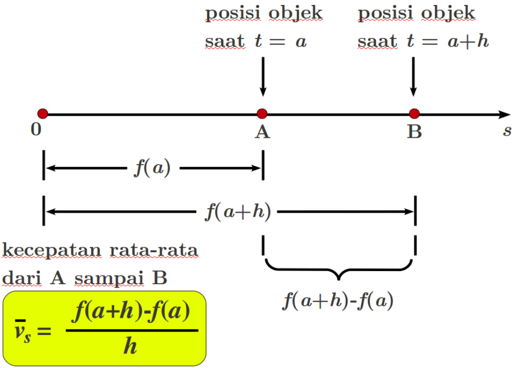
$$m_l = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Kecepatan Sesaat

Sebuah objek bergerak sepanjang garis lurus dan memenuhi persamaan $s = f(t)$ dengan s menyatakan jarak yang ditempuh oleh objek dari titik asal sampai waktu t.

Kecepatan Sesaat

Sebuah objek bergerak sepanjang garis lurus dan memenuhi persamaan $s = f(t)$ dengan s menyatakan jarak yang ditempuh oleh objek dari titik asal sampai waktu t.



Kecepatan Sesaat

Jika kecepatan rata-rata dihitung pada selang waktu yang sangat dekat (h mendekati 0), maka kecepatan pada saat a (kecepatan sesaat $v(a)$) adalah merupakan limit dari kecepatan rata-rata, yaitu

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

Definisi Turunan

Definisi

Turunan fungsi f pada titik a, dinotasikan $f'(a)$, didefinisikan

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

jika limitnya ada.

Definisi Turunan

Definisi

Turunan fungsi f pada titik a, dinotasikan $f'(a)$, didefinisikan

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

jika limitnya ada.

Definisi

Turunan fungsi f pada titik $x = a$, dinotasikan $f'(a)$, didefinisikan

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4}$$

jika limitnya ada.

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Jawab:

Berdasarkan definisi (pada halaman sebelumnya), kita punya

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 6x - 8) - (2^2 + 6.2 - 8)}{x - 2} \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Jawab:
Berdasarkan definisi (pada halaman sebelumnya), kita punya

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 6x - 8) - (2^2 + 6.2 - 8)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

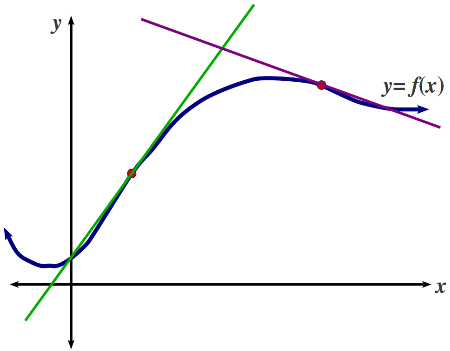
Jawab:

Berdasarkan definisi (pada halaman sebelumnya), kita punya

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 6x - 8) - (2^2 + 6.2 - 8)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x + 8) = 10 \end{aligned}$$

Fungsi f berdasar f'

Fungsi $f'(a)$ merupakan gradien garis singgung dari fungsi $f(x)$ di titik $(a, f(a))$, dari gradien ini kita bisa tahu apakah fungsi f naik atau turun pada interval tertentu.



Fungsi f berdasar f'

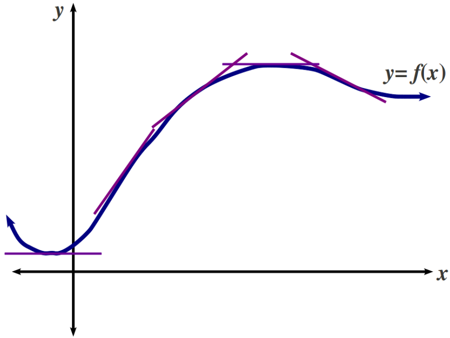
Akibat

Jika $f'(x) > 0$ *pada suatu interval maka f naik.*
Jika $f'(x) < 0$ *pada suatu interval maka f turun.*

Fungsi f berdasar f'

Akibat

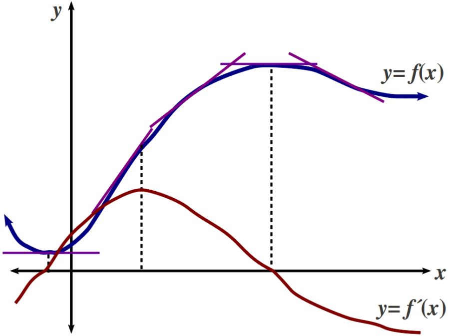
Jika $f'(x) > 0$ pada suatu interval maka f naik.
Jika $f'(x) < 0$ pada suatu interval maka f turun.



Fungsi f berdasar f'

Akibat

Jika $f'(x) > 0$ pada suatu interval maka f naik.
Jika $f'(x) < 0$ pada suatu interval maka f turun.



Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$, untuk $n \neq 0$

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$, untuk $n \neq 0$
- $\frac{d}{dx}(c.f(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$, untuk $n \neq 0$
- $\frac{d}{dx}(c.f(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$, untuk $n \neq 0$
- $\frac{d}{dx}(c.f(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = [\frac{d}{dx}f(x)]g(x) + f(x)[\frac{d}{dx}g(x)]$

Aturan Turunan

Dengan menggunakan definisi (seperti pada contoh) didapatkan beberapa aturan dalam turunan,

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$, untuk $n \neq 0$
- $\frac{d}{dx}(c.f(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = [\frac{d}{dx}f(x)]g(x) + f(x)[\frac{d}{dx}g(x)]$
- $\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{[\frac{d}{dx}f(x)]g(x) - f(x)[\frac{d}{dx}g(x)]}{(g(x))^2}$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}6x - \frac{d}{dx}8 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ *pada titik* $x = 2$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}6x - \frac{d}{dx}8 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 8$ pada titik $x = 2$ adalah $f'(2) = 2.2 + 4 = 10$.

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x + 7)$.

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x + 7)$.

Jawab:

$$f'(x) = [\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 5)](x + 7) + (x^2 - 3x + 5)[\frac{d}{dx}(x + 7)]$$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x + 7)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 5)](x + 7) + (x^2 - 3x + 5)[\frac{d}{dx}(x + 7)] \\ &= (2x - 3)(x + 7) + (x^2 - 3x + 5).1 \\ &= 3x^2 + 8x - 16. \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x + 7)$.

Jawab:

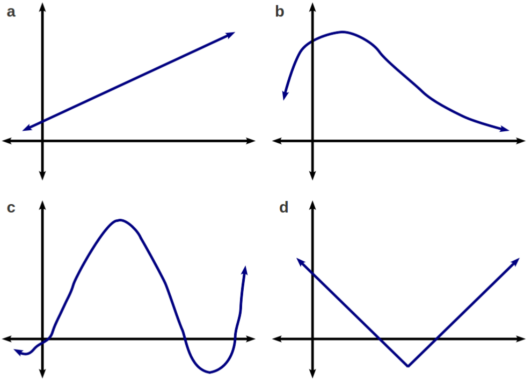
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 5)](x + 7) + (x^2 - 3x + 5)[\frac{d}{dx}(x + 7)] \\
&= (2x - 3)(x + 7) + (x^2 - 3x + 5).1 \\
&= 3x^2 + 8x - 16.
\end{aligned}
$$

atau kalikan dulu fungsinya, maka $f(x) = x^3 + 4x^2 - 16x + 35$, sehingga

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 + 4\frac{d}{dx}x^2 - 16\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}35 = 3x^2 + 8x - 16.$$

Problems

1. Sketsakan grafik fungsi $f'(x)$ dan $f''(x)$ berdasarkan grafik fungsi $f(x)$ berikut:



Problems

2. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = x + 3$
   b. $g(x) = x^2 - x + 6$
   c. $h(x) = 7x^2 + 5x - 2$
   d. $f(x) = (x^2 - 2x)(3x + 5)$
   e. $g(x) = (4x^2 + x - 2)(3x^2 + 4x + 5)$
   f. $h(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$
   g. $f(s) = \frac{3s^2+s-1}{s^2+5}$
   h. $g(t) = (t - 2)(t + 5)(t + 6)$
   i. $h(s) = (2s + 3)(4s + 5)(s + 6)$
   j. $f(t) = \frac{(2t+3)(4t+5)}{t+6}$

Problems

3. Tentukan kemiringan garis singgung pada parabola $y = x^2 + 2x$ di titik $(-3, 3)$.
4. Tentukan kemiringan garis singgung pada parabola $y = x^3$ di titik $(-1, -1)$.
5. Tentukan persamaan garis singgung pada soal no 3 dan 4.
6. Sebuah bola di lemparkan ke atas dengan kecepatan 40ft/s, ketinggian bola setelah t detik memenuhi persamaan $h = 40t - 16t^2$. Tentukan kecepatan bola saat $t = a$, $t = 1$, dan $t = 2$.
7. Sebuah partikel bergerak lurus memenuhi persamaan $s = 4t^3 + 6t + 2$ dengan s menyatakan jarak yang ditempuh oleh objek dari titik asal sampai waktu t detik. Tentukan kecepatan partikel pada saat $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, dan $t = 3$.