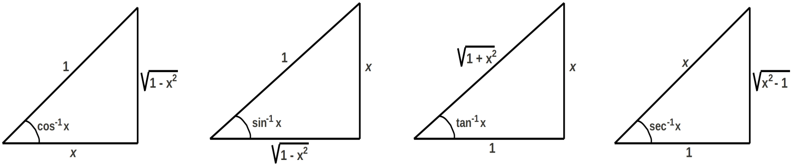
DERIVATIVE (continued)
(TURUNAN)

Kus Prihantoso Krisnawan

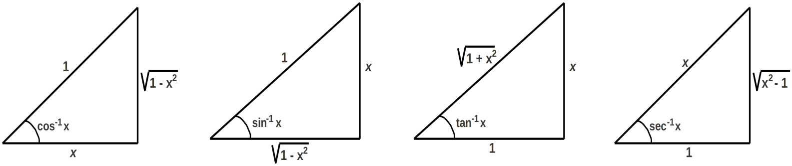
December 9^{th}, 2011

Yogyakarta

Invers Trigonometri



Invers Trigonometri



$$\begin{aligned}
\sin\left(\cos^{-1} x\right) &= \sqrt{1 - x^2} \\
\cos\left(\sin^{-1} x\right) &= \sqrt{1 - x^2} \\
\sec\left(\tan^{-1} x\right) &= \sqrt{1 + x^2} \\
\tan\left(\sec^{-1} x\right) &= \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & x \leq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Turunan Invers Trigonometri

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2} \qquad \tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2-1}, & x \leq -1 \end{cases}$$

Turunan Invers Trigonometri

$$
\begin{aligned}
\sin(\cos^{-1} x) &= \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2} \\
\sec(\tan^{-1} x) &= \sqrt{1+x^2} \qquad \tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2-1}, & x \leq -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_x \cos^{-1} x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1 \\
D_x \sin^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1 \\
D_x \tan^{-1} x &= \frac{1}{1+x^2} \\
D_x \sec^{-1} x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1
\end{aligned}
$$

Latihan

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $y = \sin^{-1}(2x^2)$
   b. $y = \tan^{-1}(\cos(5x^3 - x^2 + 1))$
   c. $y = x^3 \tan^{-1} x$
   d. $y = (\sec^{-1} x)^3$
   e. $y = (1 + \sin^{-1} x)^4$
   f. $y = arcsec\left(\frac{1}{x^2+4}\right)$
2. Bagaimanakah kemiringan garis singgung dari kurva $y = \sin^{-1} x$ pada titik c, jika c mendekati 1 dari kiri?
3. Seorang yang berdiri di atas sebuah tebing vertikal setinggi 200 kaki sedang memperhatikan sebuah perahu yang berada di danau tepat dibawahnya. Perahu tersebut bergerak meninggalkan kaki tebing dengan kecepatan 25 kaki per detik. Seberapa cepat perubahan sudut pandangan mata orang tersebut terhadap garis horisontal ketika perahu berada pada jarak 150 kaki dari kaki tebing?

Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad D_x e^x = e^x \qquad D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad D_x e^x = e^x \qquad D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

$$D_x \sinh x = \cosh x \qquad D_x \cosh x = \sinh x$$
$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$
$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Invers Fungsi Hiperbolik

$$\begin{aligned}
x = sinh^{-1} y &\Leftrightarrow y = sinh\, x \\
x = cosh^{-1} y &\Leftrightarrow y = cosh\, x \;\; dan \;\; x \geq 0 \\
x = tanh^{-1} y &\Leftrightarrow y = tanh\, x \\
x = sech^{-1} y &\Leftrightarrow y = sech\, x \;\; dan \;\; x \geq 0.
\end{aligned}$$

Invers Fungsi Hiperbolik

$$\begin{aligned}
x = sinh^{-1} y &\Leftrightarrow y = sinh\, x \\
x = cosh^{-1} y &\Leftrightarrow y = cosh\, x \;\; dan \;\; x \geq 0 \\
x = tanh^{-1} y &\Leftrightarrow y = tanh\, x \\
x = sech^{-1} y &\Leftrightarrow y = sech\, x \;\; dan \;\; x \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sinh^{-1} y &= ln\,(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\
cosh^{-1} y &= ln\,(y + \sqrt{y^2 - 1}), \qquad y \geq 1 \\
tanh^{-1} y &= \frac{1}{2}\, ln\, \frac{1 + y}{1 - y}, \qquad -1 < y < 1 \\
sech^{-1} y &= ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \right), \quad 0 < y \leq 1.
\end{aligned}$$

Turunan Invers Fungsi Hiperbolik

$$\sinh^{-1} x = \ln\,(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \cosh^{-1} x = \ln\,(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1, \qquad \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1.$$

Turunan Invers Fungsi Hiperbolik

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1, \qquad \operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\quad 0<x\leq 1.$$

$$D_x\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D_x\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x\geq 1$$

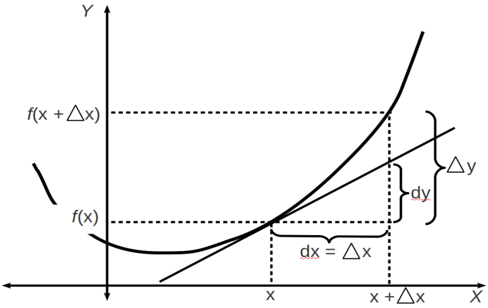
$$D_x\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}, \qquad -1<x<1$$

$$D_x\operatorname{sech}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0<x\leq 1.$$

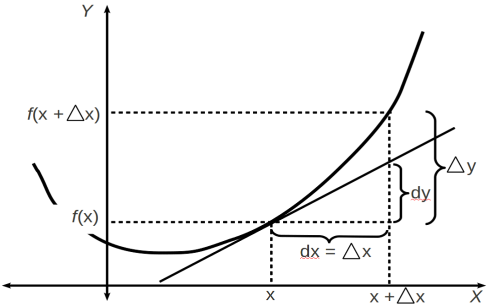
Latihan

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $y = 5x\, sinh^2 x$
   b. $y = cosh^3(x^2 + 1)$
   c. $y = ln\,(sinh\, x)$
   d. $y = sinh\, 4x.cosh\, 3x$
   e. $y = x^2 sinh^{-1} x^4$
   f. $y = ln(cosh^{-1}(x^2 + 3))$
   g. $y = cosh^{-1}(\cos x^4 - 2)$
   h. $y = ln(sinh^{-1}(\sin(x^3 - 2)))$
2. Tentukan persamaan garis singgung dari $y = (\cos x)^{\sin x}$ pada titik $(0, 1)$.

Aproksimasi

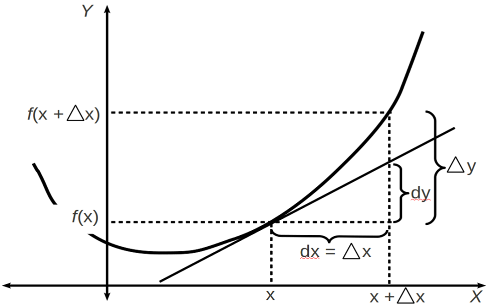


Aproksimasi



$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad dy = f'(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = f'(x)\triangle x$$

Aproksimasi



$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad dy = f'(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = f'(x)\triangle x$$

$$f(x + \triangle x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\triangle x \qquad (1)$$

Contoh

Contoh

Berapakah nilai dari $\sqrt{16,2}$ *dan* $\sqrt[3]{26,7}$*?*

Contoh

Contoh

Berapakah nilai dari $\sqrt{16,2}$ *dan* $\sqrt[3]{26,7}$*?*

Jawab:

- $\sqrt{16,2} = \sqrt{16 + 0,2}$, nyatakan $x = 16$, $\triangle x = 0,2$ dan $f(x) = \sqrt{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sehingga

Contoh

Contoh

Berapakah nilai dari $\sqrt{16,2}$ dan $\sqrt[3]{26,7}$?

Jawab:

- $\sqrt{16,2} = \sqrt{16 + 0,2}$, nyatakan $x = 16$, $\triangle x = 0,2$ dan $f(x) = \sqrt{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &\approx f(x) + f'(x)\triangle x = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\triangle x \\ f(16 + 0,2) &\approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}.0.2 = 4,025 \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Berapakah nilai dari $\sqrt{16,2}$ dan $\sqrt[3]{26,7}$?

Jawab:

- $\sqrt{16,2} = \sqrt{16 + 0,2}$, nyatakan $x = 16$, $\triangle x = 0,2$ dan $f(x) = \sqrt{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &\approx f(x) + f'(x)\triangle x = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\triangle x \\ f(16 + 0,2) &\approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}.0.2 = 4,025 \end{aligned}$$

- $\sqrt[3]{26,7} = \sqrt[3]{27 - 0,3}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$ sehingga $f(26,7) \approx \sqrt[3]{27} - \frac{1}{3\sqrt[3]{27}^2}.0.3 = 2,98889$

Contoh

Contoh

Sebuah balon yang berjari-jari 3 inchi di tiup sehingga mengembang dan jari-jarinya bertambah 0,025 inchi. Aproksimasikan perubahan luas permukaan balon? (asumsikan balon berbentuk bulat)

Contoh

Contoh

Sebuah balon yang berjari-jari 3 inchi di tiup sehingga mengembang dan jari-jarinya bertambah 0,025 inchi. Aproksimasikan perubahan luas permukaan balon? (asumsikan balon berbentuk bulat)

Jawab:

Luas permukaan sebuah benda berbentuk bulat adalah $A = 4\pi r^2$, maka perubahan luas permukaan balon ($\triangle A$) dapat diaproksimasikan dengan

$$dA = 8\pi r dr$$

saat $r = 3$ inchi dan $dr = \triangle r = 0,025$ inchi. Sehingga

$$\triangle A \approx dA = 8\pi(3)(0.025) = 1,885 inchi^2$$

Estimasi Eror

Hasil dari suatu pengukuran selalu ada eror (galat). Pada contoh sebelumnya, erornya masih diabaikan.

Estimasi Eror

Hasil dari suatu pengukuran selalu ada eror (galat). Pada contoh sebelumnya, erornya masih diabaikan.

Contoh

Hasil pengukuran dari sebuah kubus diperoleh panjang sisi kubus $11,4 \pm 0,005$ *centimeter. Berapakah volume kubus?*

Estimasi Eror

Hasil dari suatu pengukuran selalu ada eror (galat). Pada contoh sebelumnya, erornya masih diabaikan.

Contoh

Hasil pengukuran dari sebuah kubus diperoleh panjang sisi kubus $11,4 \pm 0,005$ *centimeter. Berapakah volume kubus?*

Jawab:

Volume dari sebuah kubus dengan sisi x adalah $V = x^3$ maka $\triangle V \approx dV = 3x^2 dx$. Nyatakan $x = 11,4$ dan $dx = \triangle x = 0,005$ maka

$$V(x \pm \triangle x) \approx V(x) \pm dV(x) = x^3 \pm 3x^2 dx$$

Estimasi Eror

Hasil dari suatu pengukuran selalu ada eror (galat). Pada contoh sebelumnya, erornya masih diabaikan.

Contoh

Hasil pengukuran dari sebuah kubus diperoleh panjang sisi kubus $11,4 \pm 0,005$ *centimeter. Berapakah volume kubus?*

Jawab:

Volume dari sebuah kubus dengan sisi x adalah $V = x^3$ maka $\triangle V \approx dV = 3x^2dx$. Nyatakan $x = 11,4$ dan $dx = \triangle x = 0,005$ maka

$$\begin{aligned} V(x \pm \triangle x) &\approx V(x) \pm dV(x) = x^3 \pm 3x^2dx \\ V(11,4 \pm 0,005) &\approx 11,4^3 \pm 3(11,4)^2(0,005) = 1482 \pm 19cm^3. \end{aligned}$$

$\triangle V$ disebut sabagai **eror absolut**

$\frac{\triangle V}{V}$ disebut sebagai **eror relatif.**

Latihan

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai dari akar-akar berikut.

   a. $\sqrt{36,2}$ b. $\sqrt{80,7}$
   c. $\sqrt[3]{27,3}$ d. $\sqrt[3]{63,8}$
   e. $\sqrt[3]{-124,5}$ f. $\sqrt[5]{-243,5}$

2. Sebuah tabung mempunyai panjang tepat 12 inchi dan ukuran diameternya adalah $6 \pm 0,005$ inchi. Tentukan volume tabung dengan estimasi eror absolut dan eror relatifnya.

Laju yang berkaitan

1. Sebuah balon dilepaskan dari jarak 150 kaki dari pengamat, ketinggian balon saat sebelum dilepaskan sama dengan ketinggian pengamat (0 kaki). Jika balon bergerak vertikal dengan kecepatan 8 kaki per detik, seberapa cepat perubahan jarak antara pengamat dengan balon ketika balon pada ketinggian 50 kaki?
2. Air diisikan kedalam tangki yang berbentuk kerucut terpancung (lihat gambar A) dengan debit air 8 kaki^3 per menit. Jika tinggi tangki adalah 12 kaki dan jari-jari alas kerucut adalah 6 kaki, seberapa cepat kenaikan air pada kerucut ketika tinggi air 4 kaki?
3. Air keluar dari dasar sebuah tangki hemispheric (lihat gambar B) yang mempunyai jari-jari 8 kaki dengan debit 2 kaki^3 per jam. Pada saat awal, tangki tersebut terisi penuh. Seberapa cepat perubahan level air ketika tinggi air 3 kaki? (Volume dari potongan dengan tinggi h untuk hemispheric dengan jari-jari r adalah $\pi h^2(r - \frac{h}{3})$)