DERIVATIVE (continued)

(TURUNAN)

Kus Prihantoso Krisnawan

December 14^{th}, 2011

Yogyakarta

Maximum-minimum

Misalkan S adalah suatu interval yang merupakan domain dari fungsi f dan S memuat c. Nilai $f(c)$ disebut *nilai ekstrim* jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum atau minimum.

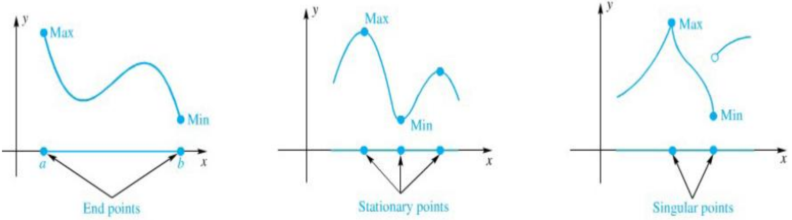
Maximum-minimum

Misalkan S adalah suatu interval yang merupakan domain dari fungsi f dan S memuat c. Nilai $f(c)$ disebut *nilai ekstrim* jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum atau minimum.
Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrim maka c disebut *titik kritis*.

Maximum-minimum

Misalkan S adalah suatu interval yang merupakan domain dari fungsi f dan S memuat c. Nilai $f(c)$ disebut *nilai ekstrim* jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum atau minimum.
Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrim maka c disebut *titik kritis*.
Kemungkinan tempat terjadinya titik kritis adalah

- di ujung interval;
- saat $f'(c) = 0$ (titik stasioner);
- saat $f'(c)$ tidak ada (titik singular).



Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$,

c. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$.

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$,

c. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$.

Jika kita lihat grafiknya akan langsung kelihatan titik-titik kritisnya

Contoh

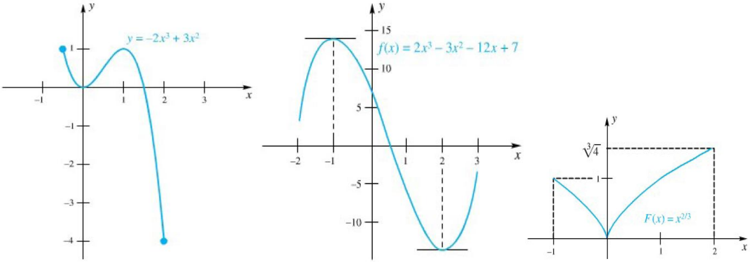
Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$,

c. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$.

Jika kita lihat grafiknya akan langsung kelihatan titik-titik kritisnya



Contoh

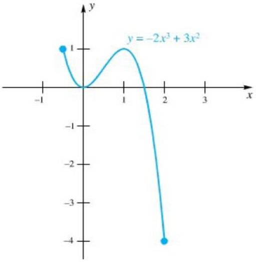
Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

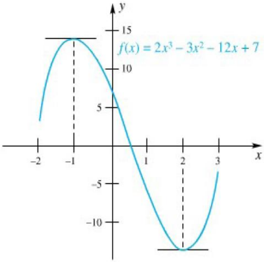
a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,

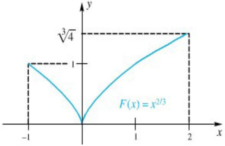
b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$,

c. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$.

Jika kita lihat grafiknya akan langsung kelihatan titik-titik kritisnya







Bagaimana cara menentukan max-min tanpa melihat grafiknya?

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$
dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$,

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-1) = 1$ dan $f(2) = \sqrt[3]{4}$,

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-1) = 1$ dan $f(2) = \sqrt[3]{4}$,
Nilai $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak mungkin bernilai 0.

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$
dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-1) = 1$ dan $f(2) = \sqrt[3]{4}$,
Nilai $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak mungkin bernilai 0.
Nilai $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak terdefinisi jika $x = 0$, $f(0) = 0$.

Contoh (lanjutan)

a. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ dan $f(2) = -4$,
Nilai $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ terjadi saat $x = 0$ atau $x = 1$ dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = -6x^2 + 6x$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-\frac{1}{2}, 2]$, dengan kata lain, $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-\frac{1}{2}, 2]$ sehingga keberadaan titik kritis jenis ketiga tidak mungkin terjadi.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 1 dan minimumnya adalah -4.

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1, 2]$,
Pada ujung-ujung interval: $f(-1) = 1$ dan $f(2) = \sqrt[3]{4}$,
Nilai $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak mungkin bernilai 0.
Nilai $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ tidak terdefinisi jika $x = 0$, $f(0) = 0$.
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah $\sqrt[3]{4}$ dan minimumnya adalah 0.

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.
Pada ujung-ujung interval: $f(-2) = 3$ dan $f(3) = -2$,

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.
Pada ujung-ujung interval: $f(-2) = 3$ dan $f(3) = -2$,
Nilai $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$ terjadi saat $x = -1$ atau $x = 2$ dengan $f(-1) = 14$ dan $f(2) = -13$,

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.
Pada ujung-ujung interval: $f(-2) = 3$ dan $f(3) = -2$,
Nilai $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$ terjadi saat $x = -1$ atau $x = 2$ dengan $f(-1) = 14$ dan $f(2) = -13$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-2, 3]$, shg $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-2, 3]$

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.
Pada ujung-ujung interval: $f(-2) = 3$ dan $f(3) = -2$,
Nilai $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$ terjadi saat $x = -1$ atau $x = 2$ dengan $f(-1) = 14$ dan $f(2) = -13$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-2, 3]$, shg $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-2, 3]$
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 14 dan minimumnya adalah -13.

Contoh (lanjutan)

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada interval $[-2, 3]$.
Pada ujung-ujung interval: $f(-2) = 3$ dan $f(3) = -2$,
Nilai $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$ terjadi saat $x = -1$ atau $x = 2$ dengan $f(-1) = 14$ dan $f(2) = -13$,
Selanjutnya perhatikan bahwa $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ terdefinisi untuk setiap nilai x dalam interval $[-2, 3]$, shg $f(x)$ terdiferensial pada interval $[-2, 3]$
Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 14 dan minimumnya adalah -13.

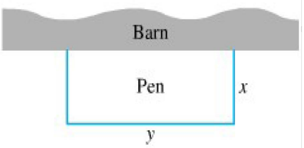
Latihan

Identifikasikan titik-titik kritis dari fungsi berikut dan tentukan nilai maksimum dan minimum pada interval yang diberikan.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 4;\ I = [-4, 0]$
2. $h(x) = x^3 - 3x + 1;\ I = [-\frac{3}{2}, 3]$
3. $g(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x);\ I = [-3, 3]$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2+1};\ I = [-3, 1]$
5. $g(x) = x^5 - \frac{25}{3}x^3 + 20x - 1;\ I = [-3, 2]$
6. $h(x) = \frac{x}{x^2+1};\ I = [-1, 4]$
7. $s(t) = \sin t - \cos t;\ I = [0, \pi]$
8. $f(s) = |3s - 2|;\ I = [-1, 4]$
9. $h(t) = \frac{t^{\frac{5}{3}}}{2+t};\ I = [-1, 8]$
10. $g(\theta) = \theta^2 \sec\theta;\ I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Contoh Aplikasi

1. Tentukan 2 bilangan yang hasil kalinya -16 dan jumlah kuadratnya minimum.
2. Bilangan berapakah yang hasil dari akar kuadratnya dikurangi delapan kalinya mencapai maksimal.
3. Bilangan berapakah yang dikurangi kuadratnya mencapai maksimal.
4. Seorang petani mempunyai pagar yang panjangnya 80 kaki yang akan digunakan untuk membatasi lahan berbentuk segi empat di samping sebuah kandang yang panjangnya 100 kaki, seperti terlihat pada gambar (sisi yang berbatasan dengan kandang tidak memerlukan pagar). Berapakah ukuran segiempat agar mencapai luas maksimum?



Contoh Aplikasi

5. Seorang petani ingin memagari 3 daerah segiempat yang identik yang masing-masing mempunyai luas 300 kaki^2 seperti terlihat pada gambar. Berapakah ukuran x dan y agar panjang pagar minimal?
6. Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari sebuah karton yang berukuran panjang 24 inchi dan lebar 9 inchi dengan cara memotong ujung-ujung karton seperti terlihat pada gambar. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum.
7. Tentukan volume maksimum dari sebuah tabung yang berada di dalam sebuah kerucut dengan jari-jari alas b dan tinggi a, lihat gambar (nyatakan hasilnya dalam a dan b).