SISTEM LINIER DI $\mathbb{R}^n$

Kus Prihantoso Krisnawan

March 7, 2012

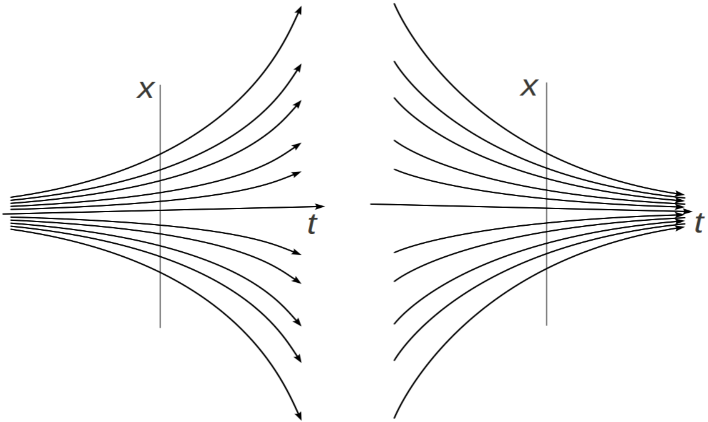
Program Studi Matematika
Universitas Negeri Yogyakarta

PD Linier Homogen Orde 1

1. Solusi dari $\dot{x} = ax$ adalah $x = e^{at}x_0$, dg x_0 adalah nilai awal.

PD Linier Homogen Orde 1

1. Solusi dari $\dot{x} = ax$ adalah $x = e^{at}x_0$, dg x_0 adalah nilai awal.



Potret fase untuk $a > 0$ Potret fase untuk $a < 0$

Sistem tak berpasangan

2. Bagaimanakah solusi dan gambar potret fase dari sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Sistem tak berpasangan

2. Bagaimanakah solusi dan gambar potret fase dari sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Solusinya adalah

$$x_1 = e^{at}x_{01} \tag{2}$$

$$x_2 = e^{bt}x_{02} \tag{3}$$

Sistem tak berpasangan

2. Bagaimanakah solusi dan gambar potret fase dari sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Solusinya adalah

$$x_1 = e^{at}x_{01} \tag{2}$$
$$x_2 = e^{bt}x_{02} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2) dapat ditulis sebagai $t = ln\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^{\frac{1}{a}}$,

Sistem tak berpasangan

2. Bagaimanakah solusi dan gambar potret fase dari sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Solusinya adalah

$$x_1 = e^{at}x_{01} \tag{2}$$

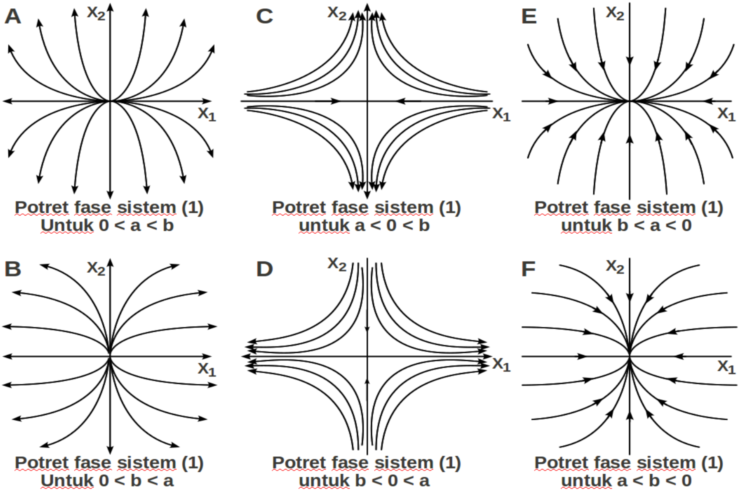
$$x_2 = e^{bt}x_{02} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2) dapat ditulis sebagai $t = ln\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^{\frac{1}{a}}$, substitusi nilai ini ke persamaan (3) didapatkan

$$x_2 = x_0 x_1^{\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Sistem tak berpasangan

Berdasar pers. (2), (3), dan (4), didapatkan potret fase:



Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Pada soal 2., titik ekuilibriumnya adalah $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Pada soal 2., titik ekuilibriumnya adalah $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

Jika *flow* (semua *manifold*) dari sistem menuju titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *stabil* dan sistemnya disebut *sistem stabil*.

Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Pada soal 2., titik ekuilibriumnya adalah $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

Jika *flow* (semua *manifold*) dari sistem menuju titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *stabil* dan sistemnya disebut *sistem stabil*.

Jika semua *manifold* meninggalkan ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *tidak stabil* dan sistemnya disebut *sistem tidak stabil*.

Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x_1}, \bar{x_2})$ yang memenuhi persamaan $\dot{x_1} = 0$ dan $\dot{x_2} = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Pada soal 2., titik ekuilibriumnya adalah $(\bar{x_1}, \bar{x_2}) = (0, 0)$.

Jika *flow* (semua *manifold*) dari sistem menuju titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *stabil* dan sistemnya disebut *sistem stabil*.

Jika semua *manifold* meninggalkan ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *tidak stabil* dan sistemnya disebut *sistem tidak stabil*.

Jika ada *manifold* yang menuju titik ekuilibrium dan ada *manifold* yang meninggalkan titik ekulibrium, maka titik ekuilibrium sistem disebut *titik saddle* dan sistemnya disebut *sistem tidak stabil*.

Sistem tak berpasangan

Titik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ disebut *titik kesetimbangan (equilibrium point)* atau *titik tetap (fixed point)*.

Pada soal 2., titik ekuilibriumnya adalah $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

Jika *flow* (semua *manifold*) dari sistem menuju titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *stabil* dan sistemnya disebut *sistem stabil*.

Jika semua *manifold* meninggalkan ekuilibrium, maka titik ekuilibrium dikatakan *tidak stabil* dan sistemnya disebut *sistem tidak stabil*.

Jika ada *manifold* yang menuju titik ekuilibrium dan ada *manifold* yang meninggalkan titik ekulibrium, maka titik ekuilibrium sistem disebut *titik saddle* dan sistemnya disebut *sistem tidak stabil*.

Dari gambar potret fase, terlihat bahwa untuk kasus E dan F titik ekuilibrium $(0, 0)$ stabil, untuk kasus A dan B titik ekuilibrium $(0, 0)$ tidak stabil, untuk kasus C dan D titik ekuilibrium $(0, 0)$ saddle.

Bentuk e^{At}

3. Bagaimanakah solusi dari sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{5}$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Bentuk e^{At}

3. Bagaimanakah solusi dari sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{5}$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Ingat bahwa solusi dari $\dot{x} = ax$ adalah $x = e^{at}x_0$.

Bentuk e^{At}

3. Bagaimanakah solusi dari sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{5}$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Ingat bahwa solusi dari $\dot{x} = ax$ adalah $x = e^{at}x_0$.

Berdasarkan solusi dari kasus tersebut (secara intuitif) kita dapatkan solusi dari sistem (5) adalah $x = e^{At}x_0$.

Bentuk e^{At}

3. Bagaimanakah solusi dari sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{5}$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Ingat bahwa solusi dari $\dot{x} = ax$ adalah $x = e^{at}x_0$.

Berdasarkan solusi dari kasus tersebut (secara intuitif) kita dapatkan solusi dari sistem (5) adalah $x = e^{At}x_0$.

Bagaimanakah menghitung e^{At}?

Bentuk e^{At}

Ingat bahwa, kita dapat menderetkan Taylor fungsi e^{at},

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots \tag{6}$$

Bentuk e^{At}

Ingat bahwa, kita dapat menderetkan Taylor fungsi e^{at},

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots \tag{6}$$

Dengan pemikiran yang sama, maka e^{At} didefinisikan sebagai

Definisi

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka untuk $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{7}$$

Bentuk e^{At}

Ingat bahwa, kita dapat menderetkan Taylor fungsi e^{at},

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots \tag{6}$$

Dengan pemikiran yang sama, maka e^{At} didefinisikan sebagai

Definisi

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka untuk $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{7}$$

Namun deret (7) juga sulit dihitung...

Nilai eigen real dan berbeda

Teorema

Jika nilai eigen dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ *adalah* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$*, dengan* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *untuk setiap i dan* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *untuk* $i \neq j$*, maka himpunan vektor eigen yang terkait, yaitu* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$*, membentuk basis untuk* $\mathbb{R}^n$*, dan matriks* $P = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n]$ *adalah matriks invertibel, serta memenuhi*

$$P^{-1}AP = D \tag{8}$$

dengan $D = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$.

Bukti silahkan lihat di buku Howard Anton (Linear Algebra).

Nilai eigen real dan berbeda

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix} \tag{9}$$

Nilai eigen real dan berbeda

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix} \tag{9}$$

Berdasarkan persamaan (7), (8), dan (9) didapat

$$e^{At} = P \left\{ I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots \right\} P^{-1}$$

Nilai eigen real dan berbeda

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix} \tag{9}$$

Berdasarkan persamaan (7), (8), dan (9) didapat

$$\begin{aligned} e^{At} &= P\left\{ I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots \right\} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A $(n \times n)$ punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A $(n \times n)$ punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A ($n \times n$) punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ x_n & = & c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{array} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (11) adl kombinasi linier dari $e^{\lambda_j t}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan $(0, 0, \cdots, 0)$ adl titik ekuilibrium.

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A ($n \times n$) punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (11) adl kombinasi linier dari $e^{\lambda_j t}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan $(0, 0, \cdots, 0)$ adl titik ekuilibrium.

Jika $\lambda_j < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A $(n \times n)$ punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (11) adl kombinasi linier dari $e^{\lambda_j t}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan $(0, 0, \cdots, 0)$ adl titik ekuilibrium.

Jika $\lambda_j < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil**.

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A $(n \times n)$ punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \quad\;\; \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (11) adl kombinasi linier dari $e^{\lambda_j t}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan $(0, 0, \cdots, 0)$ adl titik ekuilibrium.

Jika $\lambda_j < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil**.

Jika ada j sehingga $\lambda_j > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen real dan berbeda

Berdasar pers. (10), jika matriks A $(n \times n)$ punya n nilai eigen real dan berbeda, maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{11}$$

dengan c_{ij} adalah konstanta.

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (11) adl kombinasi linier dari $e^{\lambda_j t}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan $(0, 0, \cdots, 0)$ adl titik ekuilibrium.

Jika $\lambda_j < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil**.

Jika ada j sehingga $\lambda_j > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat ada i sehingga $x_i \to \infty$, dengan demikian **sistem tidak stabil**.

Nilai eigen kompleks

Teorema

Jika matriks $A(2n \times 2n)$ mempunyai sebanyak $2n$ nilai eigen kompleks yang berbeda, $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, dan vektor eigen yang berkaitan adl $w_j = u_j + iv_j$ dan $\bar{w}_j = u_j - iv_j$, dg $j = 1, 2, \cdots, n$, maka $\{u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n\}$ adl basis untuk $\mathbb{R}^{2n}$ dan matriks $P = [v_1 \;\; u_1 \;\; v_2 \;\; u_2 \cdots v_n \;\; u_n]$ invertibel serta memenuhi

$$P^{-1}AP = diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \tag{12}$$

adl sebuah matriks $2n \times 2n$ dg blok 2×2 sepanjang diagonal.

Bukti silahkan lihat di Hirsch and Smale (Linear Algebra and Differential Equations).

Nilai eigen kompleks

Selanjutnya, perhatikan bahwa jika $\lambda_j = a_j + ib_j$ maka

$$\left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k = diag \begin{bmatrix} Re\{\lambda_j^k\} & -Im\{\lambda_j^k\} \\ Im\{\lambda_j^k\} & Re\{\lambda_j^k\} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Nilai eigen kompleks

Selanjutnya, perhatikan bahwa jika $\lambda_j = a_j + ib_j$ maka

$$\left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k = diag \begin{bmatrix} Re\{\lambda_j^k\} & -Im\{\lambda_j^k\} \\ Im\{\lambda_j^k\} & Re\{\lambda_j^k\} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Berdasarkan persamaan (7), (12), dan (13) didapat

$$e^{At} = P \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k \frac{t^k}{k!} \right\} P^{-1}$$

Nilai eigen kompleks

Selanjutnya, perhatikan bahwa jika $\lambda_j = a_j + ib_j$ maka

$$\left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k = diag \begin{bmatrix} Re\{\lambda_j^k\} & -Im\{\lambda_j^k\} \\ Im\{\lambda_j^k\} & Re\{\lambda_j^k\} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (7), (12), dan (13) didapat

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k \frac{t^k}{k!} \right\} P^{-1} \\ &= P \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} diag \begin{bmatrix} Re\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} & -Im\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} \\ Im\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} & Re\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \end{aligned}$$

Nilai eigen kompleks

Selanjutnya, perhatikan bahwa jika $\lambda_j = a_j + ib_j$ maka

$$\left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k = diag \begin{bmatrix} Re\{\lambda_j^k\} & -Im\{\lambda_j^k\} \\ Im\{\lambda_j^k\} & Re\{\lambda_j^k\} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Berdasarkan persamaan (7), (12), dan (13) didapat

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right\}^k \frac{t^k}{k!} \right\} P^{-1} \\ &= P \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} diag \begin{bmatrix} Re\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} & -Im\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} \\ Im\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} & Re\{\frac{(\lambda_j t)^k}{k!}\} \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \\ &= P \ diag \begin{bmatrix} Re\{e^{\lambda_j t}\} & -Im\{e^{\lambda_j t}\} \\ Im\{e^{\lambda_j t}\} & Re\{e^{\lambda_j t}\} \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \;\; diag \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \tag{14}$$

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \ \ diag \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \tag{14}$$

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (2) adalah kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan titik $(0, 0, \cdots, 0)$ adalah titik ekuilibrium.

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \;\; diag \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \qquad (14)$$

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (2) adalah kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan titik $(0, 0, \cdots, 0)$ adalah titik ekuilibrium.

Jika $Re\{\lambda_j\} < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \ diag \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \qquad (14)$$

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (2) adalah kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan titik $(0, 0, \cdots, 0)$ adalah titik ekuilibrium.

Jika $Re\{\lambda_j\} < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \;\; diag \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \qquad (14)$$

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (2) adalah kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan titik $(0, 0, \cdots, 0)$ adalah titik ekuilibrium.

Jika $Re\{\lambda_j\} < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil**.

Jika ada j sehingga $Re\{\lambda_j\} > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen kompleks

Sehingga

$$e^{At} = P \;\; diag\left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} \qquad (14)$$

Perhatikan bahwa setiap x_i pd pers (2) adalah kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, dan titik $(0, 0, \cdots, 0)$ adalah titik ekuilibrium.

Jika $Re\{\lambda_j\} < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**

Jika ada j sehingga $Re\{\lambda_j\} > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat ada i sehingga $x_i \to \infty$, dengan demikian **sistem tidak stabil.**

Nilai eigen kembar

Definisi

Misalkan matriks $A(n \times n)$ mempunyai nilai eigen λ dengan multiplisitas $m \leq n$. Vektor taknol v yang memenuhi

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

dengan $k = 1, 2, \cdots, m$, disebut sebagai ***vektor eigen tergeneralisasi****.*

Definisi

Matriks $N(n \times n)$ dikatakan ***nilpoten orde k*** *jika $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$.*

Nilai eigen kembar

Teorema

Jika matriks $A(n \times n)$ mempunyai sebanyak k nilai eigen real yang berulang, yaitu: λ_1 ada sebanyak j_1, λ_2 ada sebanyak j_2, $\cdots$, dan λ_k ada sebanyak j_k, dengan $j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$, maka terdapat basis $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ untuk $\mathbb{R}^n$, dengan v_i adalah vektor eigen-vektor eigen tergeneralisasi untuk setiap i, dan matriks $P = [v_1 \;\; v_2 \cdots v_n]$ invertibel serta memenuhi

$$A = S + N, \tag{15}$$

dg $P^{-1}SP = diag[\lambda_j]$. Matriks $N = A - S$ adl nilpoten orde $j = max\{j_i\} \leq n$, dg S dan N saling commute ($SN = NS$).

Bukti silahkan lihat di Hirsch and Smale (Linear Algebra and Differential Equations).

Nilai eigen kembar

Berdasarkan persamaan (7) dan (15) maka didapatkan

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt}$$

Karena $P^{-1}SP = diag[\lambda_j]$ dan $N^k = 0$ maka

$$e^{At} = P \;\; diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1}. \tag{16}$$

Setiap x_i pd pers (16) adl komblin dari $e^{\lambda_j t}$.

Jika $\lambda_j < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen kembar

Berdasarkan persamaan (7) dan (15) maka didapatkan

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt}$$

Karena $P^{-1}SP = diag[\lambda_j]$ dan $N^k = 0$ maka

$$e^{At} = P \;\; diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1}. \qquad (16)$$

Setiap x_i pd pers (16) adl komblin dari $e^{\lambda_j t}$.

Jika $\lambda_j < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**

Nilai eigen kembar

Berdasarkan persamaan (7) dan (15) maka didapatkan

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt}$$

Karena $P^{-1}SP = diag[\lambda_j]$ dan $N^k = 0$ maka

$$e^{At} = P \ diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1}. \tag{16}$$

Setiap x_i pd pers (16) adl komblin dari $e^{\lambda_j t}$.

Jika $\lambda_j < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**

Jika ada j sehingga $\lambda_j > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat

Nilai eigen kembar

Berdasarkan persamaan (7) dan (15) maka didapatkan

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt}$$

Karena $P^{-1}SP = diag[\lambda_j]$ dan $N^k = 0$ maka

$$e^{At} = P \ \ diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1}. \qquad (16)$$

Setiap x_i pd pers (16) adl komblin dari $e^{\lambda_j t}$.

Jika $\lambda_j < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**

Jika ada j sehingga $\lambda_j > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat ada i sehingga $x_i \to \infty$, dengan demikian **sistem tidak stabil.**

Nilai eigen kembar

Akibat

Dengan menggunakan hipotesis yang sama dengan teorema sebelumnya maka solusi dari sistem $\dot{x} = Ax$ *dengan nilai awal* $x(0) = x_0$ *adalah*

$$x(t) = diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] x_0.$$

Bentuk e^{At}

Kesimpulan terkait bentuk e^{At}:

1. Jika nilai eigen real dan berbeda maka:

$$e^{At} = P \ \ diag[e^{\lambda_j t}]P^{-1},$$

2. Jika ada nilai eigen kompleks ($\lambda_j = a_j + ib_j$ dan $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$), maka:

$$e^{At} = P \ \ diag\left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1}$$

3. Jika ada nilai eigen kembar:

$$e^{At} = diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

Bentuk e^{At}

Kesimpulan terkait bentuk e^{At}:

1. Jika nilai eigen real dan berbeda maka:

$$e^{At} = P \;\; diag[e^{\lambda_j t}]P^{-1},$$

2. Jika ada nilai eigen kompleks ($\lambda_j = a_j + ib_j$ dan $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$), maka:

$$e^{At} = P \;\; diag\left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1}$$

3. Jika ada nilai eigen kembar:

$$e^{At} = diag[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \cdots \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

Jika A mempunyai nilai eigen real dan kompleks yang berulang maka bentuk e^{At} merupakan kombinasi dari ketiga hal di atas.

Kestabilan Sistem $\dot{x} = Ax$ (secara intuitif)

Kesimpulan terkait kestabilan sistem $\dot{x} = Ax$:

1. Titik $(0, 0, \cdots, 0)$ merupakan titik ekuilibrium dari sistem.
2. Mempunyai solusi $x = e^{At}x_0$ dengan setiap x_i merupakan kombinasi linier dari $e^{a_j t}$, dengan $a_j = Re\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
3. Jika $Re\{\lambda_j\} < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**
4. Jika ada j sehingga $Re\{\lambda_j\} > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat ada i sehingga $x_i \to \infty$, dengan demikian **sistem tidak stabil.**

Latihan

Analisis sistem linier $\dot{x} = Ax$, dengan matriks A sbb:

1. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$