TEORI KESTABILAN

Kus Prihantoso Krisnawan

March 6, 2012

Mathematics Department
Yogyakarta State University

Review

Pada pertemuan terdahulu, kita telah mengetahui beberapa hal mengenai sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

dengan A matriks kuadrat, yaitu:

Review

Pada pertemuan terdahulu, kita telah mengetahui beberapa hal mengenai sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

dengan A matriks kuadrat, yaitu:
Solusi dari sistem (1) adalah $x(t) = e^{At}x_0$.

Review

Pada pertemuan terdahulu, kita telah mengetahui beberapa hal mengenai sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

dengan A matriks kuadrat, yaitu:
Solusi dari sistem (1) adalah $x(t) = e^{At}x_0$.
Sehingga $x_i(t)$, untuk setiap i, merupakan kombinasi linier dari $e^{Re\{\lambda_j\}t}$, untuk setiap j. Sebagai akibatnya:

Review

Pada pertemuan terdahulu, kita telah mengetahui beberapa hal mengenai sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

dengan A matriks kuadrat, yaitu:
Solusi dari sistem (1) adalah $x(t) = e^{At}x_0$.
Sehingga $x_i(t)$, untuk setiap i, merupakan kombinasi linier dari $e^{Re\{\lambda_j\}t}$, untuk setiap j. Sebagai akibatnya:

- Jika $Re\{\lambda_j\} < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil**.

Review

Pada pertemuan terdahulu, kita telah mengetahui beberapa hal mengenai sistem

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

dengan A matriks kuadrat, yaitu:
Solusi dari sistem (1) adalah $x(t) = e^{At}x_0$.
Sehingga $x_i(t)$, untuk setiap i, merupakan kombinasi linier dari $e^{Re\{\lambda_j\}t}$, untuk setiap j. Sebagai akibatnya:

- Jika $Re\{\lambda_j\} < 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka saat $t \to \infty$, berakibat $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (0, 0, \cdots 0)$, dengan demikian **sistem stabil.**
- Jika ada j sehingga $Re\{\lambda_j\} > 0$, maka saat nilai $t \to \infty$, berakibat ada i sehingga $x_i \to \infty$, dengan demikian **sistem tidak stabil.**

Matriks Fundamental

Namun, kita baru bekerja secara intuitif (belum kita buktikan secara formal), pada pertemuan kali ini kita akan mencoba membuktikan hal-hal tersebut secara formal.

Lema

Diberikan matriks kuadrat A, maka

$$Ae^{At} = e^{At}A \tag{2}$$

Matriks Fundamental

Namun, kita baru bekerja secara intuitif (belum kita buktikan secara formal), pada pertemuan kali ini kita akan mencoba membuktikan hal-hal tersebut secara formal.

Lema

Diberikan matriks kuadrat A, maka

$$Ae^{At} = e^{At}A \tag{2}$$

Lema

Misalkan A adalah matriks kuadrat, maka

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}. \tag{3}$$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\frac{d}{dt}e^{At} =$$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah} - I}{h}e^{At}$$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-I}{h}e^{At} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\frac{A^3h^3}{3!}+\cdots\right)-I}{h}e^{At}\end{aligned}$$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\frac{A^3h^3}{3!}+\cdots\right)-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(A+\frac{A^2h}{2!}+\frac{A^3h^2}{3!}+\cdots\right)e^{At}
\end{aligned}$$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\frac{A^3h^3}{3!}+\cdots\right)-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(A+\frac{A^2h}{2!}+\frac{A^3h^2}{3!}+\cdots\right)e^{At} \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}$$

Sehingga $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. $\square$

Matriks Fundamental

Proof.

Dengan menggunakan definisi dari turunan, kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\frac{A^3h^3}{3!}+\cdots\right)-I}{h}e^{At} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(A+\frac{A^2h}{2!}+\frac{A^3h^2}{3!}+\cdots\right)e^{At} \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}$$

Sehingga $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. $\square$

Selanjutnya bentuk $\phi = e^{At}$ disebut **matriks fundamental.**

Teorema Dasar Sistem Linier

Teorema

(Teorema dasar untuk sistem linier) *Misalkan A adalah matriks* $n \times n$ *dan* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Masalah nilai awal*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \qquad (4)$$

mempunyai solusi tunggal yang diberikan oleh

$$x(t) = e^{At} x_0 \qquad (5)$$

Teorema Dasar Sistem Linier

Proof.

Bukti bahwa $x(t) = e^{At}x_0$ solusi sistem (4)

Berdasarkan lema sebelumnya, jika $x(t) = e^{At}x_0$ maka kita dapatkan

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t) \tag{6}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Teorema Dasar Sistem Linier

Proof.

Bukti bahwa $x(t) = e^{At}x_0$ solusi sistem (4)

Berdasarkan lema sebelumnya, jika $x(t) = e^{At}x_0$ maka kita dapatkan

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t) \tag{6}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, $x(0) = e^{A.0}x_0 = Ix_0 = x_0$.

Dg demikian $x(t) = e^{At}x_0$ adl solusi dari sistem (4). $\square$

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)

Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)
Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\dot{y}(t) \quad =$$

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)

Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\dot{y}(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t)$$

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)
Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t)\\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) =\end{aligned}$$

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)

Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$,

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)
Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, sehingga $y(t)$ konstan.

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)
Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, sehingga $y(t)$ konstan.
Dg demikian $y(t) = y(0) = e^{-A.0}x(0) = Ix_0 = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema Dasar Sistem Linier

Bukti ketunggalan solusi sistem (4)
Misalkan $x(t)$ (belum tahu bentuknya) adalah sebarang solusi dari sistem (4), definisikan fungsi baru $y(t)$ sbb

$$y(t) = e^{-At}x(t). \tag{7}$$

Maka berdasarkan lema sebelumnya, dan fakta bahwa $x(t)$ adalah solusi dari sistem (4) didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, sehingga $y(t)$ konstan.
Dg demikian $y(t) = y(0) = e^{-A.0}x(0) = Ix_0 = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Jadi: satu-satunya solusi dari sistem (4) adalah $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$.

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ *dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah* $w_j = u_j + iv_j$ *(ingat bahwa: jika* $b_j = 0$ *maka* $v_j = 0$*).*

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$ maka subruang-subruang atas $\mathbb{R}^n$ berikut ini

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ *dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah* $w_j = u_j + iv_j$ *(ingat bahwa: jika* $b_j = 0$ *maka* $v_j = 0$*). Misalkan*

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$*, dengan* $n = 2m = k$ *maka subruang-subruang atas* $\mathbb{R}^n$ *berikut ini*

$$E^s = span\{u_j, v_j | a_j < 0\},$$

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$ maka subruang-subruang atas $\mathbb{R}^n$ berikut ini

$$\begin{aligned} E^s &= span\{u_j, v_j | a_j < 0\}, \\ E^u &= span\{u_j, v_j | a_j > 0\}, \end{aligned}$$

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$ maka subruang-subruang atas $\mathbb{R}^n$ berikut ini

$$\begin{aligned} E^s &= span\{u_j, v_j | a_j < 0\}, \\ E^u &= span\{u_j, v_j | a_j > 0\}, \quad dan \\ E^c &= span\{u_j, v_j | a_j = 0\}. \end{aligned}$$

disebut ***subruang stabil*** *(E^s),*

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$ maka subruang-subruang atas $\mathbb{R}^n$ berikut ini

$$\begin{aligned} E^s &= span\{u_j, v_j | a_j < 0\}, \\ E^u &= span\{u_j, v_j | a_j > 0\}, \quad dan \\ E^c &= span\{u_j, v_j | a_j = 0\}. \end{aligned}$$

disebut ***subruang stabil*** *(E^s),* ***subruang takstabil*** *(E^u),*

Teori Kestabilan

Definisi

Diberikan matriks real A dengan nilai eigen $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan vektor eigen tergeneralisasi yang terkait adalah $w_j = u_j + iv_j$ (ingat bahwa: jika $b_j = 0$ maka $v_j = 0$). Misalkan

$$B = \{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, u_m, v_m\} \tag{8}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $n = 2m = k$ maka subruang-subruang atas $\mathbb{R}^n$ berikut ini

$$\begin{aligned} E^s &= span\{u_j, v_j | a_j < 0\}, \\ E^u &= span\{u_j, v_j | a_j > 0\}, \quad dan \\ E^c &= span\{u_j, v_j | a_j = 0\}. \end{aligned}$$

disebut ***subruang stabil*** *(E^s),* ***subruang takstabil*** *(E^u), dan* ***subruang center*** *(E^c).*

Teori Kestabilan

Teorema

Sistem $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A bernilai negatif.

Proof.

Bukti kekanan:

Teori Kestabilan

Teorema

Sistem $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A bernilai negatif.

Proof.

Bukti kekanan:

Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya positif.

Teori Kestabilan

Teorema

Sistem $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A bernilai negatif.

Proof.

Bukti kekanan:

Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya positif. Ingat bahwa solusi sistem $\dot{x} = Ax$ selalu memuat bentuk $e^{Re(\lambda)t}$ sehingga jika ada bagian real dari (λ) yang bernilai posistif maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{Re(\lambda)t}$ juga akan semakin besar (menuju tak hingga).

Teori Kestabilan

Teorema

Sistem $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A bernilai negatif.

Proof.

Bukti kekanan:

Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya positif.
Ingat bahwa solusi sistem $\dot{x} = Ax$ selalu memuat bentuk $e^{Re(\lambda)t}$ sehingga jika ada bagian real dari (λ) yang bernilai posistif maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{Re(\lambda)t}$ juga akan semakin besar (menuju tak hingga).
Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya 0.

Teori Kestabilan

Teorema

Sistem $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A bernilai negatif.

Proof.

Bukti kekanan:

Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya positif.
Ingat bahwa solusi sistem $\dot{x} = Ax$ selalu memuat bentuk $e^{Re(\lambda)t}$ sehingga jika ada bagian real dari (λ) yang bernilai posistif maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{Re(\lambda)t}$ juga akan semakin besar (menuju tak hingga).
Andaikan ada nilai eigen yang bagian realnya 0.
maka solusi dari sistem akan memuat bentuk
$ct^k \cos(Im(\lambda)t)$ atau $ct^k \sin(Im(\lambda)t)$ dengan $k \geq 0$
sehingga $\lim_{t\to\infty} e^{At} \neq 0$. $\square$

Teori Kestabilan

Proof.

Bukti kekiri:

Teori Kestabilan

Proof.

Bukti kekiri:

Ingat bahwa solusi sistem $\dot{x} = Ax$ selalu memuat bentuk $e^{Re(\lambda)t}$ sehingga jika semua bagian real dari (λ) bernilai negatif maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{Re(\lambda)t}$ akan menuju 0.

Teori Kestabilan

Proof.

Bukti kekiri:

Ingat bahwa solusi sistem $\dot{x} = Ax$ selalu memuat bentuk $e^{Re(\lambda)t}$ sehingga jika semua bagian real dari (λ) bernilai negatif maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{Re(\lambda)t}$ akan menuju 0. Dengan kata lain saat $t \to \infty$, solusi sistem akan menuju titik ekuilibrium, sehingga sistemnya stabil asimtotis. $\square$

Teori Kestabilan

Akibat

Jika ada bagian real nilai eigen A yang bernilai positif maka sistem $\dot{x} = Ax$ tidak stabil.

Proof.

Analog dengan bukti teorema ke arah kanan (saat ada bagian real nilai eigen yang positif). $\square$