SISTEM LINIER NONHOMOGEN

Kus Prihantoso Krisnawan

March 6, 2012

Mathematics Department
Yogyakarta State University

Pendahuluan

Pada bagian ini, kita akan membicarakan mengenai solusi dari sistem nonhomogen

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{1}$$

dengan A matriks $n \times n$ dan $b(t)$ adalah vektor yang elemen-elemennya fungsi kontinu.

Pendahuluan

Pada bagian ini, kita akan membicarakan mengenai solusi dari sistem nonhomogen

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{1}$$

dengan A matriks $n \times n$ dan $b(t)$ adalah vektor yang elemen-elemennya fungsi kontinu.

Definisi

Matriks solusi fundamental untuk sistem

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

adalah matirks $\Phi(t)$ berukuran $n \times n$ yang memenuhi

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \tag{3}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Pendahuluan

Ingat bahwa matriks $\Phi(t) = e^{At}$ memenuhi persamaan (3) dengan nilai awal $\Phi(0) = I$, sehingga $\Phi(t) = e^{At}$ disebut sebagai matriks fundamental.

Pendahuluan

Ingat bahwa matriks $\Phi(t) = e^{At}$ memenuhi persamaan (3) dengan nilai awal $\Phi(0) = I$, sehingga $\Phi(t) = e^{At}$ disebut sebagai matriks fundamental.

Lema

Jika $\Phi(t)$ dan Ψ adalah dua matriks solusi fundamental untuk sistem (2) maka terdapat matriks konstan C sehingga

$$\Phi(t) = \Psi(t)C.$$

Bukti lengkap ada di M. Braun, 1983, *Differential Equations and their Applications*, 3^{ed} edition.

Pendahuluan

Teorema

Jika $\Psi(t)$ *adalah matriks solusi fundamental dari sistem (2) maka*

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) \tag{4}$$

Pendahuluan

Teorema

Jika $\Psi(t)$ adalah matriks solusi fundamental dari sistem (2) maka

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) \tag{4}$$

Proof.

Berdasarkan lema sebelumnya, maka

$$e^{At} = \Psi(t)C.$$

Pendahuluan

Teorema

Jika $\Psi(t)$ *adalah matriks solusi fundamental dari sistem (2) maka*

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) \tag{4}$$

Proof.

Berdasarkan lema sebelumnya, maka

$$e^{At} = \Psi(t)C.$$

Pilih $t = 0$ maka $e^{A.0} = \Psi(0)C$,

Pendahuluan

Teorema

Jika $\Psi(t)$ adalah matriks solusi fundamental dari sistem (2) maka

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) \tag{4}$$

Proof.

Berdasarkan lema sebelumnya, maka

$$e^{At} = \Psi(t)C.$$

Pilih $t = 0$ maka $e^{A.0} = \Psi(0)C$, sehingga $C = \Psi^{-1}(0)$.

Pendahuluan

Teorema

Jika $\Psi(t)$ *adalah matriks solusi fundamental dari sistem (2) maka*

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) \tag{4}$$

Proof.

Berdasarkan lema sebelumnya, maka

$$e^{At} = \Psi(t)C.$$

Pilih $t = 0$ maka $e^{A.0} = \Psi(0)C$, sehingga $C = \Psi^{-1}(0)$.
Jadi $e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$. $\square$

Teorema

Teorema

Jika $\Phi(t)$ adalah matriks fundamental untuk sistem (2) maka solusi dari sistem nonhomogen (1) dengan adalah nilai awal $x(0) = x_0$ adalah

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \tag{5}$$

Teorema

Proof.
$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ maka

$$\dot{x}(t) =$$

Teorema

Proof.

$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ maka

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &\quad + \int_0^t \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Teorema

Proof.

$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ maka

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&\quad + \int_0^t \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \\
&= A\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + b(t) + \int_0^t A\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Teorema

Proof.
$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ maka

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&\quad + \int_0^t \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \\
&= A\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + b(t) + \int_0^t A\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \\
&= A\left[\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right] + b(t)
\end{aligned}$$

Teorema

Proof.

$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ maka

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&\quad + \int_0^t \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \\
&= A\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + b(t) + \int_0^t A\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \\
&= A\left[\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right] + b(t) \\
&= Ax(t) + b(t)
\end{aligned}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema

Sebagai akibatnya, untuk $\Phi(t) = e^{At}$ maka solusi dari sistem (1) adalah

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}(\tau)b(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Catatan: Jika $A = A(t)$ maka persamaan (6) juga merupakan solusi.

Latihan

1. Tentukan e^{At} jika

   a. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan A jika diketahui

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

3. tentukan solusi dari

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$